

АЛЁШИНА ОЛЬГА ОЛЕГОВНА

**РАСЧЁТ ТОНКИХ УПРУГИХ ТОРСОВЫХ ОБОЛОЧЕК ОДИНАКОВОГО СКАТА С
ЭЛЛИПСОМ В ОСНОВАНИИ**

05.23.17 – Строительная механика

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва – 2021 г.

Работа выполнена в Инженерной академии Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Научный руководитель: Рынковская Марина Игоревна
кандидат технических наук, доцент,
директор департамента строительства Инженерной академии РУДН

Официальные оппоненты: Пятикрестовский Константин Пантелеевич,
доктор технических наук, старший научный сотрудник,
профессор кафедры строительных сооружений, конструкций и
материалов АО «НИЦ «Строительство»

Николаев Анатолий Петрович,
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и
водопользования Волгоградского государственного аграрного
университета (Волгоградский ГАУ)

Колесников Александр Георгиевич,
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры уникальных зданий и сооружений Юго-Западного
государственного университета (ЮЗГУ)

Защита диссертации состоится 30 декабря 2021 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета ПДС 2022.003, созданного на базе РУДН, по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке РУДН по адресу: г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, а также на сайте <http://dissovet.rudn.ru>

Объявление о защите и автореферат диссертации размещены на сайтах <http://vak2.ed.gov.ru/> и <http://dissovet.rudn.ru>

Автореферат разослан _____ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета ПДС 2022.003
кандидат технических наук

Маркович А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Тонкостенные конструкции типа оболочек составляют обширный класс в архитектуре, строительстве, судостроении, авиастроении, машиностроении и в других отраслях промышленности. Каждый вид поверхностей имеет определенные преимущества перед другими. Торсы (развертывающиеся невырожденные поверхности) могут быть развернуты на плоскость всеми ее точками без разрывов и складок, при этом углы между любыми кривыми, принадлежащими поверхности, и длины этих кривых не изменяются. Коэффициенты квадратичных форм торсовых поверхностей одинакового ската с плоской кривой в основании $A = 1, F = L = M = 0$. Таким образом, уравнение поверхности задается в линиях кривизн, т.е. является наиболее простым. Одно семейство линий кривизны на торсовой поверхности – прямые линии.

Об актуальности исследования геометрии и НДС торсовых оболочек одинакового ската в своих работах писали А.В. Крутов, С.Н. Кривошапко, С.В. Бескопыльная, М.И. Рынковская, А.И. Карташев, а также иностранные исследователи Баджория Г.Ч., Тхома А., Кумудини Джаявардена М.К., Юханио М.А.

Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) торсовой оболочки одинакового ската с направляющей плоской кривой, даже с учётом развития вычислительной техники и больших успехов теории тонких оболочек, представлено на сегодняшний день в малом объеме.

Диссертационная работа посвящена исследованию геометрии и НДС торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом. Впервые НДС оболочек одинакового ската с эллипсом в основании изучали С.Н. Кривошапко, М.А. Тимошин, Тхома А., однако исследования не были доведены до числовых результатов. Таким образом данная тематика весьма актуальна.

Целью диссертационной работы является получение новых результатов по геометрии, конструированию и НДС торсовых оболочек одинакового ската с направляющим эллипсом, нахождение аналитического решения для анализа НДС, сравнение полученных аналитических результатов с решениями метода конечных элементов (МКЭ) и вариационно-разностного метода (ВРМ).

Для достижения поставленной в работе цели были решены следующие **задачи**:

- составление общих формул для определения координат основных точек торсовой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании;
- определение закона задания пространственной плоской кривой самопересечения прямолинейных образующих торсовой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании;
- получение системы трех дифференциальных уравнений в частных производных для определения параметров напряженного состояния исследуемого торса аналитическим методом по общей теории упругих тонких оболочек;
- использование безмоментной теории оболочек для нахождения параметров напряженного состояния торса одинакового ската с направляющим эллипсом;
- определение напряженно-деформированного состояния исследуемой торсовой оболочки численными методами расчета (методом конечных элементов и вариационно-разностным методом);
- предложение новой конструкции со срединной поверхностью в виде торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом.

Объектом исследования является торсовая оболочка одинакового ската с эллипсом в основании.

Научная новизна исследования

1. Получены обобщенные формулы для определения координат основных точек при построении торсов одинакового ската с эллипсом в основании;

2. Установлен закон задания плоской пространственной кривой, образующейся при самопересечении прямолинейных образующих и торсовой оболочки;

3. Аналитическим способом получены системы трех дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка в перемещениях u_x , u_y , u_z для определения параметров НДС торса одинакового ската с эллипсом в основании и для такого же пологого торса, и установлена сложность нахождения решения данной системы;

4. По безмоментной теории оболочек получены решения для определения параметров напряженного состояния исследуемой торсовой оболочки для четырех различных типов нагрузки;

5. По безмоментной теории методом А.Л. Гольденвейзера определены числовые значения перемещений u_u , u_v , u_z торса в криволинейной системе координат поверхности;

6. Предложена новая конструкция в форме поверхности одинакового ската, численно исследовано НДС данной конструкции.

Теоретическая и практическая значимость работы

1. Определены координаты основных точек торса и закон задания плоской пространственной кривой, образующейся при самопересечении поверхности, что, в некоторых случаях является полезной, а иногда необходимой информацией при раскройке листового материала или изготовлении опалубки;

2. Установлено, что аналитическими методами на сегодняшний день параметры НДС не могут быть определены из-за сложности нахождения решения системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка;

3. Получены аналитические решения для четырех различных нагрузок по безмоментной теории оболочек для торсов одинакового ската с направляющим эллипсом, установлена взаимосвязь данных нагрузок;

4. В связи с тем, что чисто безмоментное состояние конструкций встречается крайне редко и их условия существования не всегда могут быть конструктивно реализованы, для установления возможности существования безмоментного состояния исследуемого торса определены параметры НДС численными методами расчета (МКЭ и ВРМ) при моделировании граничных условий, приближенных к задачам безмоментной теории; установлено, что торсы испытывают изгибные напряжения;

5. Рассмотрен и применен метод А.Л. Гольденвейзера, позволяющий по безмоментной теории оболочек определять параметры НДС оболочки;

6. Предложена простая в проектировании, конструировании и монтаже конструкция в форме торса одинакового ската с эллипсом в основании.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты изучения геометрии торсов одинакового ската с направляющим эллипсом;

2. Системы трех дифференциальных уравнений в перемещениях для торсов и установление сложности нахождения решений данных систем;

3. Установление и обоснование факта, что торсовые оболочки одинакового ската с эллипсом в основании не могут быть отнесены к числу оболочек с чисто безмоментным напряженным состоянием;

4. Применение метода А.Л. Гольденвейзера для определения перемещений рассматриваемых торсов по безмоментной теории;

5. Новая конструкция козырька в форме торсовой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании над входом в здание.

Соответствие паспорту специальности

Диссертация соответствует паспорту специальности 05.23.17 Строительная механика в части:

- п.1 – «Общие принципы расчёта сооружений и их элементов»,
- п.3 – «Аналитические методы расчёта сооружений и их элементов»,
- п.4 – «Численные методы расчёта сооружений и их элементов»,
- п.8 – «Исследование нагрузок на сооружения».

Апробация работы

Материалы диссертации доложены и обсуждены в период с 2017 по 2021 годы на международных конференциях и межвузовском семинаре:

1. International Conference Scientific research of the SCO countries: synergy and integration, Scientific publishing house Infinity. Beijing, China. 18 March, 2020.
2. International conference Process Management and Scientific Developments. Scientific publishing house Infinity. Birmingham, United Kingdom. June 9, 2020.
3. Международная конференция «Инженерные системы – 2020», посвященная 60-летию Российского университета дружбы народов. Москва, 14–16 октября 2020;
4. International Conference on Engineering Systems 2021 (ICES 2021) (Международная конференция «Инженерные системы – 2021» на английском языке). 28 – 30 April 2021 Moscow, Russia.
5. 51 Межвузовский научный семинар РУДН «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы». Москва, 26 октября 2021.

Публикации

Основные научные положения диссертационной работы опубликованы в 5 печатных работах, 2 публикации в издании, индексируемом в международной базе данных Scopus, 3 публикации – в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных «Перечнем РУДН» / ВАК РФ.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, 7 приложений и списка литературы, включающего 101 наименование, в том числе на иностранном языке. Основной текст работы изложен на 137 страницах машинописного текста, объем приложений составляет 68 страниц. Работа включает 72 рисунка и 82 таблицы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы работы, определены цели и задачи исследования, предложены методы решения поставленных задач, обозначена новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

В первой главе дан краткий исторический обзор развития теории расчета упругих оболочек в криволинейных координатах.

Рассматриваются расчетные уравнения для тонких упругих оболочек, срединная поверхность которых задана в произвольной неортогональной системе координат u, v , предложенные А.Л. Гольденвейзером в 1953 г. Уравнения равновесия и геометрические уравнения А.Л. Гольденвейзера содержат символы Кристоффеля Γ_{ik}^i и внутренние силовые

факторы («псевдоусилия», «псевдомоменты»), зависящие от двух переменных u и v . В 1977 году С.Н. Кривошапко предложил иной вариант составления системы расчетных уравнений для расчета тонких упругих оболочек, заданных в произвольных криволинейных координатах ($\chi \neq 0$), содержащих общепринятые в инженерной практике внутренние усилия и моменты.

Проведен анализ научных исследований в области теории расчета торсовых оболочек на кафедре сопротивления материалов и расчета на прочность (на сегодняшний день Департамент строительства) Российского университета дружбы народов (РУДН). Начиная с 1963 г. в РУДН разработаны и защищены несколько кандидатских диссертаций и докторская диссертация, посвященные данной теме.

Большие результаты достигнуты по изучению геометрии торсов, а числовые результаты по изучению НДС получены только в работах Баджории Г.Ч., Кумудини Джаявардена М.К., С.Н. Кривошапко, С.Б. Косицына, М.И. Рынковской и все они получены только на примере длинных торсов-геликоидов. Есть только несколько примеров расчета торсов, построенных на двух плоских направляющих кривых по безмоментной теории. В зарубежной литературе примеров расчета торсовых оболочек по моментной теории не обнаружено.

Торсовой называется поверхность, которая может быть развернута на плоскость всеми ее точками без разрывов и складок, при этом длины кривых и углы между любыми кривыми, принадлежащими поверхности, не изменяются. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы поверхность была торсовой, гауссова кривизна ее срединной поверхности всюду была равна нулю ($K = k_1 k_2 = 0$).

На сегодняшний день известны и описаны в литературе 24 торса общего вида и 10 торсовых поверхностей одинакового ската.

Поверхности одинакового ската составляют подкласс торсовых поверхностей. Торс одинакового ската с направляющим эллипсом (рисунок 1) является линейчатой поверхностью, имеющей постоянный угол α между прямолинейными образующими и соответствующими главными нормальными направляющего эллипса.

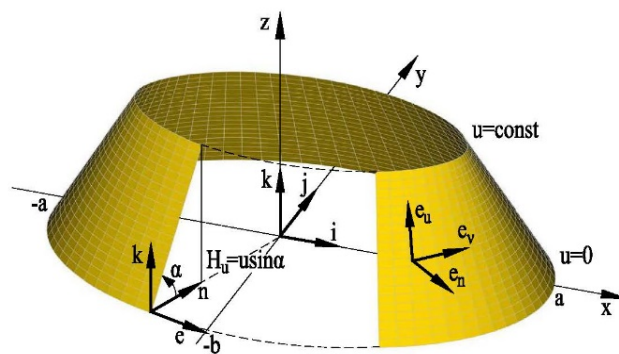


Рисунок 1 - Торс одинакового ската с направляющим эллипсом

В кандидатской диссертации рассматриваются торсовые поверхности одинакового ската с направляющим эллипсом в основании, который задается уравнениями:

$$x = x(v) = a \cos v, \quad y = y(v) = b \sin v, \quad (1)$$

где a , b – размеры полуосей направляющего эллипса в основании торса, параметр v в пределах $0 \leq v \leq 2\pi$.

Параметрическая форма задания оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом (1) будет:

$$\begin{aligned}
x &= x(u, v) = a \cos v - \frac{ub \cos \alpha \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}, \\
y &= y(u, v) = b \sin v - \frac{u a \cos \alpha \sin v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}, \\
z &= z(u) = u \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{2}$$

Семейство линий u – прямолинейные образующие торса одинакового ската, при этом координатная линия $u = 0$ совпадает с направляющим эллипсом, α – угол между главной нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{e} \times \mathbf{k}$, направленной внутрь направляющего эллипса, и прямой образующей u (Рисунок 1).

Для данной поверхности коэффициенты первой квадратичной формы в развернутом виде, характеризующие внутреннюю геометрию оболочки:

$$A = 1, \quad B = \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v} - \frac{ab \cos \alpha}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}, \quad F = 0. \tag{3}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы, характеризующей искривленность поверхности в пространстве:

$$L = M = 0, \quad N = \frac{B a b \sin \alpha}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}. \tag{4}$$

При значении коэффициента первой квадратичной формы $F = 0$ получаем ортогональную координатную сеть поверхности, при значении коэффициента второй квадратичной формы $M = 0$ – сопряженные координатные линии. Более того, координатная сеть является главной сетью поверхности, так как $F = 0$ и $M = 0$.

Главные кривизны поверхности в нашем случае:

$$k_1 = k_u = \frac{L}{A^2} = 0, \quad k_2 = k_v = \frac{N}{B^2} = \frac{ab \sin \alpha}{B(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}. \tag{5}$$

Средняя кривизна торса:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{ab \sin \alpha}{2B(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)} \neq 0. \tag{6}$$

В диссертации в области изучения геометрии торсов одинакового ската с эллипсом в основании получены обобщенные формулы для вычисления координат основных точек срединной поверхности с любыми геометрическими параметрами направляющего эллипса и углом наклона α прямолинейных образующих u при $k = a/b$, $a > b$, $u = b^2/(a \cos \alpha)$ (рисунок 2):

$$\begin{aligned}
A(x, y, z) &= A(0; 0; u k \sin \alpha) = A(0; 0; k \frac{b^2}{a} \operatorname{tg} \alpha), \\
B(x, y, z) &= B(a - u \cos \alpha; 0; u \sin \alpha) = B(a - \frac{b^2}{a}; 0; \frac{b^2}{a} \operatorname{tg} \alpha), \\
D(x, y, z) &= D(-a + u \cos \alpha; 0; u \sin \alpha) = D(-a + \frac{b^2}{a}; 0; \frac{b^2}{a} \operatorname{tg} \alpha).
\end{aligned} \tag{7}$$

Благодаря полученным результатам в диссертации установлены интересные закономерности по построению данного класса торсов:

- при эллипсах в основании с одинаковыми размерами полуосей a и b , но с разными углами наклона α прямолинейной образующей u координата точек B и D по оси x не меняется;

- при эллипсах в основании с одинаковым размером полуоси b и одинаковым углом наклона α прямолинейной образующей u и координата точки A по оси z постоянна, то есть.

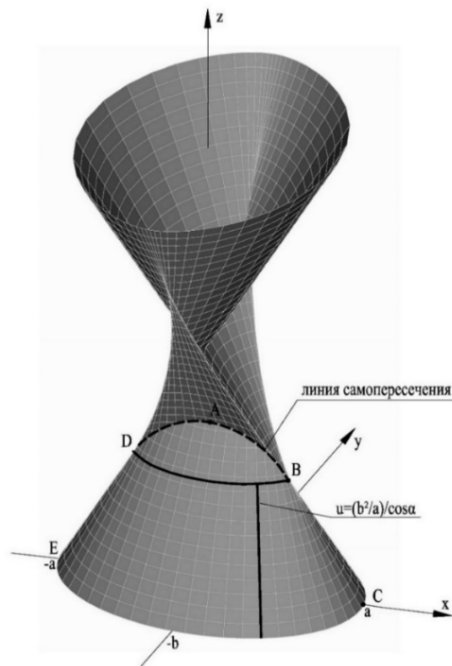


Рисунок 2 - Основные точки и кривая самопересечения торса

Определен закон задания кривой самопересечения прямолинейных образующих u (рисунок 2). Уравнение исследуемой кривой получается из канонического уравнения эллипса $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ и имеет вид:

$$z = m(1 - x^2/n^2)^{\frac{1}{2}}; \quad n^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} \frac{k^2}{k^2 - 1}; \quad m = k \frac{b^2}{a} \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$

при этом значение параметра m является координатой точки $A(z)$ в формулах (7).

В кандидатской диссертации рассмотрены возможности системы автоматизированного проектирования NX программы Siemens PLM Software. Используя возможности данной системы в качестве методов изучения геометрии, получена развертка торса одинакового ската с эллипсом в основании (рисунок 3). Используя современную технологию 3D-печати для быстрого прототипирования создана физическая модель исследуемого торса из ABS-пластика (рисунок 4).

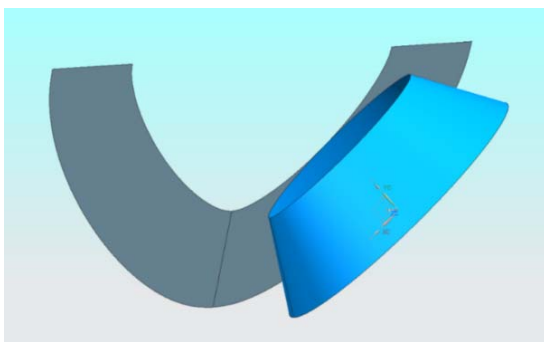


Рисунок 3 – Развертка торсовой оболочки



Рисунок 4 – Физическая модель торса

Во второй главе кандидатской диссертации показано как упрощаются общие дифференциальные уравнения равновесия теории оболочек в неортогональной системе координат для исследуемого класса торсовых оболочек, предложенные в 1977 г. С.Н.

Кривошапка. Благодаря тому, что коэффициенты квадратичных форм $F = 0$ и $M = 0$, произвольные криволинейные координаты u, v являются ортогональными линиями главных кривизн, что облегчает задачу определения параметров НДС рассматриваемого класса торсов аналитическими методами расчета.

Система 17 расчетных уравнений:

- уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u}N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + BX = 0, \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial u}(B^2S) - \frac{B}{R_v}Q_v + BY = 0, \\ N_v\frac{B}{R_v} + \frac{\partial Q_v}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}(BQ_u) - BZ = 0, \\ \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial u}(B^2H) - \frac{\partial M_v}{\partial v} + Q_vB = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(BM_u) + \frac{\partial B}{\partial u}M_v + Q_uB = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

- геометрические уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u = \frac{\partial u_u}{\partial u}, \quad \varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}u_u - u_z\frac{\operatorname{tg}\alpha}{B}\frac{\partial B}{\partial u}, \quad \varepsilon_{uv} = B\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u_v}{B}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial u_u}{\partial v}, \\ \kappa_u = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial u^2}, \quad \kappa_v = -\frac{1}{B}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(u_v\frac{\operatorname{tg}\alpha}{B}\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial u_z}{\partial v}\frac{1}{B}\right) + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right], \\ \kappa_{uv} = -\frac{1}{B}\frac{\partial^2 u_z}{\partial u\partial v} - \frac{\partial u_z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial u_v}{\partial u}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{B}\frac{\partial B}{\partial u} - u_v\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

- физические уравнения:

$$\begin{aligned} N_u = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_u + \nu\varepsilon_v), \quad N_v = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_v + \nu\varepsilon_u), \quad S = \frac{C(1-\nu)}{2}\varepsilon_{uv}, \\ M_u = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_u + \nu\kappa_v); \quad M_v = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_v + \nu\kappa_u); \\ H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\kappa_{uv} = D(1-\nu)\kappa_{uv} \end{aligned} \quad (11)$$

где $C = Eh/(1-\nu^2)$ - жесткость оболочки на растяжение (сжатие),

$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ - цилиндрическая жесткость оболочки на изгиб.

В третьей главе получена система трех дифференциальных уравнений восьмого порядка в частных производных в перемещениях u_x, u_y, u_z для срединной поверхности исследуемой торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом:

$$\begin{aligned} L_{11}u_u + L_{12}u_v + L_{13}u_z + \frac{B}{C}X = 0, \\ L_{21}u_u + L_{22}u_v + L_{23}u_z + \frac{B}{C}Y = 0, \\ L_{31}u_u + L_{32}u_v + L_{33}u_z - \frac{B}{C}Z = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где для операторов L_{ij} введены обозначения:

$$\begin{aligned} L_{11} = B\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)^2, \\ L_{12} = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - \frac{3-\nu}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{13} &= -v\chi \frac{\partial B \partial \dots}{\partial u \partial u} + \chi \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2, \\
L_{21} &= \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 \dots}{\partial u \partial v} + \frac{3-v}{2} \frac{1}{B} \frac{\partial B \partial \dots}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right), \\
L_{22} &= \left[\frac{1-v}{2} B + \chi^2 \frac{1-v}{2} \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \frac{1}{B} \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial u^2} + \left[\frac{1}{B} + \chi^2 \frac{1}{B^3} \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial v^2} + \\
&\quad + \left[\frac{1-v}{2} \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{1-v}{2} \chi^2 \frac{1}{B^2} \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^3 \right] \frac{\partial \dots}{\partial u} + \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) + \chi^2 \frac{1}{B^2} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \left(3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{\partial B}{\partial u} + 2 \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial v} \right) \right] \frac{\partial \dots}{\partial v} + \\
&\quad + \chi^2 \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right) - \frac{1-v}{2} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2, \\
L_{23} &= \chi \frac{1}{B^3} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B \partial^3 \dots}{\partial u \partial v^3} + \chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial^3 \dots}{\partial u^2 \partial v} + \chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \left[3 \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial v^2} + \\
&\quad + \chi \frac{1}{B^2} \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 \dots}{\partial u \partial v} + \left[\chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \right) - \chi \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right] \frac{\partial \dots}{\partial v} + \\
&\quad + \chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{\partial \dots}{\partial u} - \chi \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right), \\
L_{31} &= -v\chi \frac{\partial B \partial \dots}{\partial u \partial u} - \chi \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2, \\
L_{32} &= \chi \frac{1}{B^3} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B \partial^3 \dots}{\partial u \partial v^3} + \chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial^3 \dots}{\partial u^2 \partial v} + \chi \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 \dots}{\partial u^2} + \\
&\quad + \chi \frac{h^2}{12} \left[3 \left(1 + \frac{1}{B} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{\partial B}{\partial u} + \left(2 + \frac{1}{B} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial v} \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial v^2} - \\
&\quad - \chi \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{5+v}{2} \frac{1}{B} + \frac{1-v}{2} \right) \frac{\partial^2 \dots}{\partial u \partial v} + \\
&\quad + \left[\chi \frac{h^2}{12} \left[4 \frac{1}{B^3} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^3 + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial u} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right) \right] - \chi \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right] \frac{\partial \dots}{\partial v} - \\
&\quad - \chi \frac{h^2}{12} \left[\frac{3+v}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial \dots}{\partial u} + \\
&\quad + \chi \frac{h^2}{12} \left[2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B^3} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^3 \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \right) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \right] + \\
&\quad + \chi \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right), \\
L_{33} &= B \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \dots}{\partial u^4} + \frac{1}{B^3} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \dots}{\partial v^4} + 2 \frac{1}{B} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \dots}{\partial u^2 \partial v^2} + 2 \frac{\partial B}{\partial u} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \dots}{\partial u^3} - 2 \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \dots}{\partial u \partial v^2} + \\
&\quad + 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \dots}{\partial u^2 \partial v} + 6 \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \dots}{\partial v^3} - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \dots}{\partial u^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2}{12} \left[\frac{4}{B^3} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 + \left(1 + \frac{6}{B} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \right)^2 + \left(1 + \frac{3}{B} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{B} \right) \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial v^2} + \\
& + \frac{h^2}{12} \left[\left(1 - \frac{3}{B} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{\partial B}{\partial u} + \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial v} \right] \frac{\partial^2 \dots}{\partial u \partial v} + \\
& + \frac{h^2}{12} \left[\frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^3 + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right] \frac{\partial \dots}{\partial u} + \\
& + \frac{h^2}{12} \left[\left(2 + \frac{1}{B^2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2 + \frac{5}{B^3} \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial v} \frac{\partial B}{\partial u} + 3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial^3}{\partial v^3} \left(\frac{1}{B} \right) \right] \frac{\partial \dots}{\partial v} + \\
& + \chi^2 \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)^2. \tag{13}
\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (12) восьмого порядка с операторами L_{ij} (13) для определения параметров НДС исследуемого тора имеет сложное аналитическое решение. На сегодняшний день в кандидатской диссертации в рамках доступных средств работы, в том числе автоматизированных ПК, получение аналитического решения невозможно. Для упрощения задачи и получения аналитического решения автор рассматривает пологую торсовую оболочку.

На основании принимаемых допущений в общей теории пологих оболочек геометрические уравнения (10) для пологого тора принимают вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_u &= \frac{\partial u_u}{\partial u}, \quad \varepsilon_v = \frac{1}{B} \frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} u_u - u_z \frac{\operatorname{tg} \alpha}{B} \frac{\partial B}{\partial u}, \quad \varepsilon_{uv} = B \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u_v}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial u_u}{\partial v}, \\
\kappa_u &= -\frac{\partial^2 u_z}{\partial u^2}, \quad \kappa_v = -\frac{1}{B} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u_z}{\partial v} \frac{1}{B} \right) + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right], \\
\kappa_{uv} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial^2 u_z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial u_z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{B} \right). \tag{14}
\end{aligned}$$

В уравнениях равновесия (9) пренебрегают моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов выражения кривизн и их производные:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} (BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u} N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + BX &= 0, \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 S) + BY = 0, \\
N_v \frac{B}{R_v} + \frac{\partial Q_v}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} (BQ_u) - BZ &= 0, \\
\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 H) - \frac{\partial M_v}{\partial v} + Q_v B &= 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} (BM_u) + \frac{\partial B}{\partial u} M_v + Q_u B = 0. \tag{15}
\end{aligned}$$

Система трех дифференциальных уравнений в перемещениях u_x , u_y , u_z для срединной поверхности пологого тора одинакового ската с направляющим эллипсом получается из системы дифференциальных уравнений (12) с операторами L_{ij} (13), в которой не учитываются подчеркнутые члены в операторах L_{ij} (13). Таким образом, система дифференциальных уравнений в перемещениях для пологого тора получена впервые также в данной кандидатской диссертации. Ввиду сложности нахождения решения далее рассматривается безмоментная теория оболочек.

Уравнения безмоментной теории получаются как частный случай уравнений общей теории оболочек при условии равенства нулю изгибающих M_u , M_v и крутящих M_{uv} , M_{vu}

моментов и поперечных сил Q_u, Q_v , учитывают только нормальные N_u, N_v и касательные S_u, S_v силы.

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия (9) для безмоментной теории расчета торсов одинакового ската с эллипсом в основании имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial u}(BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u}N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + BX = 0; \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u}(B^2S) + BY = 0; \quad \frac{N_v}{R_v} - Z = 0. \quad (16)$$

В кандидатской диссертации рассмотрены задачи с различными типами нагрузок, обусловленных возможностями безмоментной теории, и получены числовые результаты в 11 сечениях (рисунок 5).

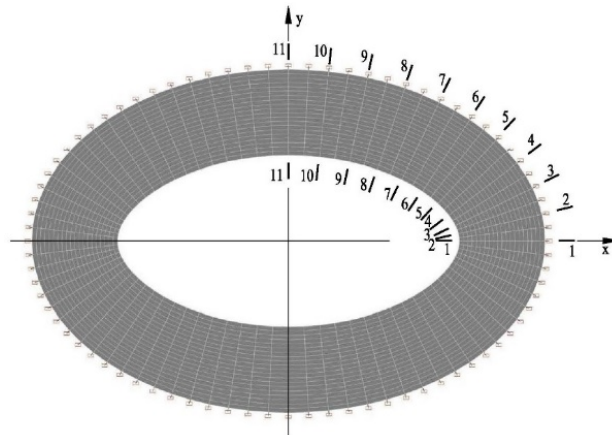


Рисунок 5 – Сечения

Геометрические параметры торса во всех задачах идентичны $a = 3$ м, $b = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$, длина прямолинейных образующих $u = 2$ м. Граничные условия в уровне направляющего эллипса ($u = 0$ м) – шарнирно-подвижное опирание, при $u = 2$ м – свободный край.

В *первой задаче* рассмотрен торс при действии линейной нагрузки $q = 1$ кН/м на верхнем торце $u = \text{const}$ вдоль касательных к срединной поверхности (рисунок 6).

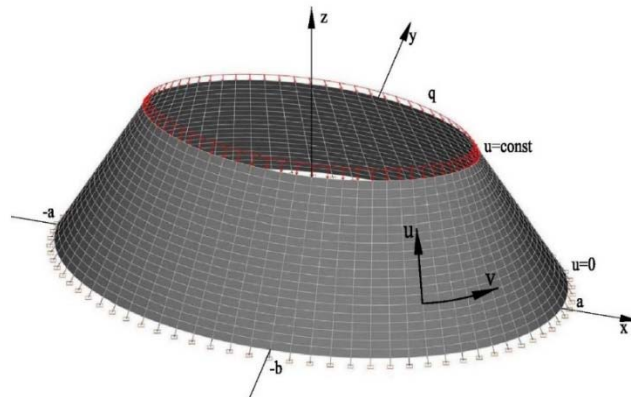


Рисунок 6 - Торс с линейной нагрузкой на торце $u = \text{const}$

Для данной нагрузки на торс внешняя нагрузка в дифференциальных уравнениях равновесия (16) $X = Y = Z = 0$. Таким образом, уравнения (16) упрощаются:

$$\frac{\partial}{\partial u}(BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u}N_v + \frac{\partial S}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u}(B^2S) = 0; \quad \frac{N_v}{R_v} = 0. \quad (17)$$

Система дифференциальных уравнений (17) имеет второй порядок, следовательно, при ее решении достаточно иметь одно граничное условие в каждой точке контура торса. На торце $u = \eta = 2$ м усилия $N_v = 0$ и $S = 0$, также $N_u = -q$.

В результате решения дифференциальных уравнений (17) получаем:

$$N_u = -\frac{q}{B(u, v)} \left(\mu^{\frac{1}{2}} - \frac{\eta\beta}{\mu} \right), \quad (18)$$

где

$$B = B(u, v) = \mu^{\frac{1}{2}} - \frac{u\beta}{\mu}, \quad \mu = \mu(v) = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v, \quad \beta = ab \cos \alpha. \quad (19)$$

Значения нормальных сил N_u от минус 0,25 кН/м до минус 1,00 кН/м.

Во **второй задаче** рассмотрена торсовая оболочка при действии равномерно-распределенной нагрузки $q = 1$ кН/м², направленной по касательной вдоль прямолинейных образующих u тора (рисунок 7).

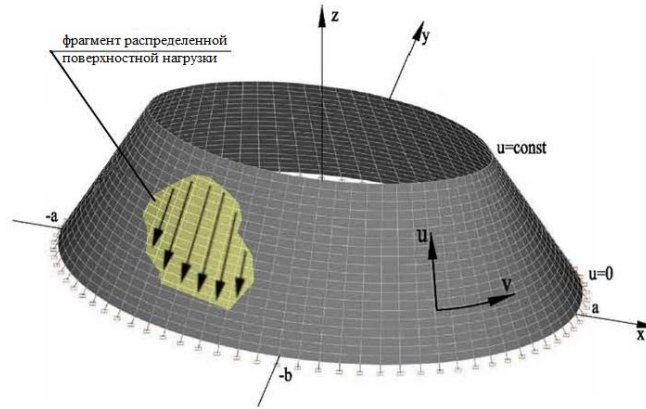


Рисунок 7 - Торс с равномерно-распределенной нагрузкой по касательной вдоль прямолинейных образующих

Для второй задачи внешняя поверхностная нагрузка будет $X = -q$, $Y = Z = 0$. Дифференциальные уравнения (16) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} (BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u} N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + XB = 0; \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 S) = 0; \quad \frac{N_v}{R_v} = 0. \quad (20)$$

Граничное условие на торце $u = \eta = 2$ м $N_u = 0$. Более того, из второго и третьего дифференциальных уравнений системы (20) получаем усилия $N_v = 0$ и $S = 0$.

В результате решения дифференциальных уравнений (20) определяем:

$$N_u = N_u^t = \frac{q}{B(u, v)} \left[\mu^{1/2} (u - \eta) - \frac{\beta}{2\mu} (u^2 - \eta^2) \right]. \quad (21)$$

Значения нормальных сил N_u от 0,00 кН/м до минус 1,78 кН/м.

В **третьей задаче** рассмотрен торс при действии равномерно-распределенной нагрузки $q = 1$ кН/м² по нормали к срединной поверхности (рисунок 8).

Для третьей задачи внешняя поверхностная нагрузка $X = Y = 0$ и $Z = -q$.

Граничное условие на верхнем торце при $u = \eta = 2$ м усилия $S = 0$ и $N_u = 0$.

Дифференциальные уравнения (16) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} (BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u} N_v + \frac{\partial S}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 S) = 0; \quad \frac{N_v}{R_v} - Z = 0. \quad (22)$$

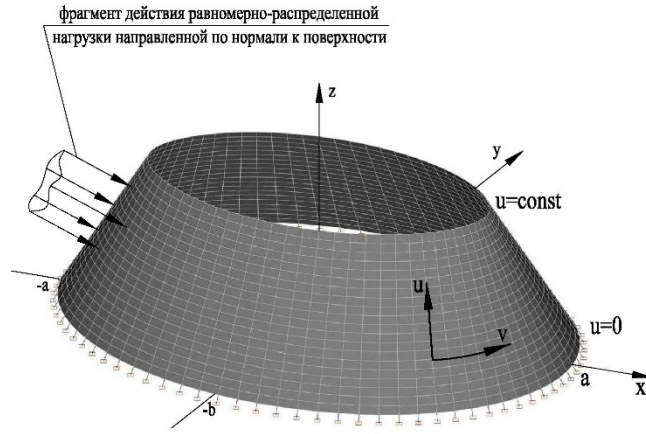


Рисунок 8 - Торс с равномерно-распределенной нагрузкой по нормали к срединной поверхности

В результате решения дифференциальных уравнений (22) получаем:

$$N_v = N_v^n = -B(u, v) \frac{q \mu}{\sin \alpha ab} = \frac{q}{\sin \alpha} \left(u \cos \alpha - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{ab} \right) = \operatorname{tg} \alpha \left(u - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\beta} \right). \quad (23)$$

$$S = S^n = \frac{1}{B^2(u, v)} \frac{3q}{4 \sin \alpha} \varphi \sin 2v \left[2\mu(u - \eta) - \frac{\beta}{\mu^{\frac{1}{2}}} (u^2 - \eta^2) \right]. \quad (24)$$

$$\begin{aligned} N_u = N_u^n = & \frac{1}{B(u, v)} \left\{ \frac{q}{\operatorname{tg} \alpha} \left(\mu^{\frac{1}{2}}(u - \eta) - \frac{\beta}{2\mu} (u^2 - \eta^2) \right) + \right. \\ & + \frac{3q\varphi}{4\beta \sin \alpha} \left[2 \cos 2v \left(\xi_1(v) \left(\frac{1}{B(\eta, v)} - \frac{1}{B(u, v)} \right) - \mu^{\frac{3}{2}}(\eta - u) \right) + \right. \\ & + \sin^2 2v \frac{(a^2 - b^2)}{2} \left(\xi_2(v) \left(\frac{1}{B^2(\eta, v)} - \frac{1}{B^2(u, v)} \right) + \right. \\ & \left. \left. \left. + \xi_3(v) \left(\frac{1}{B(\eta, v)} - \frac{1}{B(u, v)} \right) - 3\mu^{\frac{1}{2}}(\eta - u) \right) \right] \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1(v) &= \left[\frac{\mu^{\frac{7}{2}}}{\beta} - 2\mu^2\eta + \mu^{\frac{1}{2}}\eta^2\beta \right], & \xi_2(v) &= \left[6\mu^{\frac{3}{2}}\eta - \frac{3\mu^3}{\beta} - 3\eta^2\beta \right], \\ \xi_3(v) &= \left[\frac{9\mu^{\frac{5}{2}}}{\beta} - 12\mu\eta + \frac{3\eta^2\beta}{\mu^{\frac{1}{2}}} \right], & \varphi &= \frac{a^2 - b^2}{ab}. \quad (26) \end{aligned}$$

Значения N_v от минус 0,39 кН/м до минус 5,20 кН/м. Значения S от 0,00 кН/м до минус 2,36 кН/м. Значения N_u от 0,90 кН/м до минус 3,61 кН/м.

В *четвертой задаче* рассмотрен торс при действии собственного веса материала оболочки, приведенная нагрузка $g = 1,00$ кН/м² (рисунок 9).

Поверхностная внешняя нагрузка будет $X = -g \sin \alpha$, $Y = 0$ и $Z = -g \cos \alpha$. Таким образом, уравнения равновесия (16) упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} (BN_u) - \frac{\partial B}{\partial u} N_v + \frac{\partial S}{\partial v} + XB = 0; \quad \frac{\partial N_v}{\partial v} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} (B^2 S) = 0; \quad \frac{N_v}{R_v} - Z = 0. \quad (27)$$

Граничное условие на торце $u = \eta = 2$ м $S = 0$ $N_u = 0$.

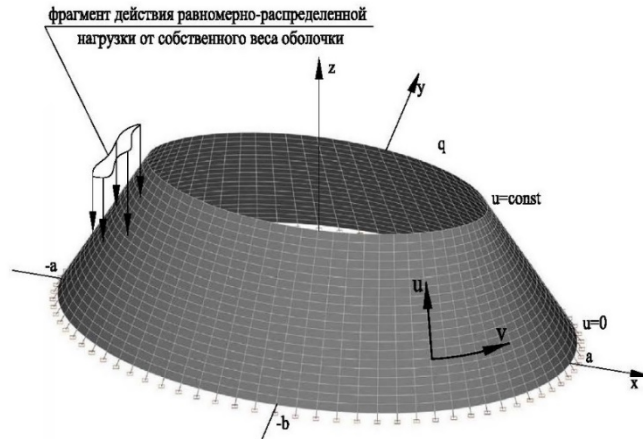


Рисунок 9 - Торс с нагрузкой от собственного веса материала

В результате решения дифференциальных уравнений (27) получаем:

$$N_v = N_v^{sw} = -B(u, v) \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\mu}{ab} = \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha} \left(u \cos \alpha - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{ab} \right) = \frac{g \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \left(u - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\beta} \right). \quad (28)$$

$$S = S^{sw} = \frac{1}{B^2(u, v)} \frac{3g}{4 \operatorname{tg} \alpha} \varphi \sin 2v \left[2\mu(u - \eta) - \frac{\beta}{\mu^{\frac{1}{2}}} (u^2 - \eta^2) \right]. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} N_u = N_u^{sw} = & \frac{1}{B(u, v)} \left\{ \frac{g}{\sin \alpha} \left(\mu^{\frac{1}{2}}(u - \eta) - \frac{\beta}{2\mu} (u^2 - \eta^2) \right) + \right. \\ & + \frac{3g\varphi}{4\beta \operatorname{tg} \alpha} \left[2 \cos 2v \left(\xi_1(v) \left(\frac{1}{B(\eta, v)} - \frac{1}{B(u, v)} \right) - \mu^{\frac{3}{2}}(\eta - u) \right) + \right. \\ & + \sin^2 2v \frac{(a^2 - b^2)}{2} \left(\xi_2(v) \left(\frac{1}{B^2(\eta, v)} - \frac{1}{B^2(u, v)} \right) + \right. \\ & \left. \left. \left. + \xi_3(v) \left(\frac{1}{B(\eta, v)} - \frac{1}{B(u, v)} \right) - 3\mu^{\frac{1}{2}}(\eta - u) \right) \right] \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Значения сил N_v от минус 0,19 кН/м до минус 2,60 кН/м. Значения сил S от 0,00 кН/м до минус 1,18 кН/м. Значения сил N_u от 0,00 кН/м до минус 2,89 кН/м.

Аналитические решения позволяют выявить взаимосвязь между рассмотренными видами нагрузок (таблица 1).

Таблица 1. Взаимосвязь между нагрузками

Равномерно-распределенная нагрузка вдоль образующих	Равномерно-распределенная нагрузка по нормали	Собственный вес (приведенная к равномерно-распределенной на м ²)
-	N_v^n	$N_v^{sw} = \cos \alpha N_v^n$
-	S^n	$S^{sw} = \cos \alpha S^n$
N_u^t	N_u^n	$N_u^{sw} = \sin \alpha N_u^t + \cos \alpha N_u^n$

В третьей главе диссертации впервые найдены перемещения торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом при действии линейной нагрузки q на торце $u=\text{const}$ (рисунок 6) по методике, предложенной А.Л. Гольденвейзером, т.е. определение перемещений по безмоментной теории оболочек.

Перемещения u_u, u_v, u_z определяются интегрированием уравнений, получаемых путем использования закона Гука с учетом геометрических уравнений, для нахождения параметров тангенциальной деформации $\varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}$:

$$u_u = \frac{q}{Eh} \left(\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\beta} - \eta \right) \left(\ln B - \ln \mu^{\frac{1}{2}} \right). \quad (31)$$

$$u_v = -\frac{3q(a^2 - b^2)\sin 2v}{2\beta^2 Eh} \left(\mu^{\frac{3}{2}} \left(\ln B - \ln \mu^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^{\frac{1}{2}} \eta \beta}{2} \right) + \eta \beta \right) + \frac{3q(a^2 - b^2)\sin 2v}{2\beta^2 Eh} B \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\eta \beta}{2\mu^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (32)$$

$$u_z = -\frac{3q(a^2 - b^2)\sin 2v}{2\beta^3 Eh \operatorname{tg} \alpha} \left[\cos 2v \left(B \left(\mu^2 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta \beta \right) - \frac{1}{B} \left(\mu^3 - \mu^{\frac{3}{2}} \eta \beta \right) - 2\mu \eta \beta - 2\mu^{\frac{5}{2}} \left(\ln B - \ln \mu^{\frac{1}{2}} \right) \right) + (a^2 - b^2) \sin^2 2v \left(\frac{3}{B} \left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}} \eta \beta}{4} - \mu^2 \right) + \frac{3}{4B^2} \left(\mu^{\frac{5}{2}} - \mu \eta \beta \right) - \frac{3\mu^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\ln B - \ln \mu^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3\eta \beta}{4} - B \frac{3\eta \beta}{4\mu^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \frac{q}{Eh \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\beta} - \eta \right) \left(\ln B - \ln \mu^{\frac{1}{2}} + v \right). \quad (33)$$

В четвертой главе выполняется численное исследование о возможности возникновения изгибных напряжений в торсах одинакового ската с направляющим эллипсом путем математического моделирования задач из третьей главы в вычислительном комплексе SCAD Office, основанного на методе конечных элементов (МКЭ), и в программе «SHELLVRM» на базе вариационно-разностного метода (ВРМ), разработанной д.т.н., профессором В.Н. Ивановым в департаменте строительства Российского университета дружбы народов (РУДН).

В программах SCAD Office и «SHELLVRM» моделируются граничные условия максимально приближенные к граничным условиям задач в третьей главе. Также результаты численных методов позволят судить о корректности аналитических результатов.

Числовые результаты аналитических расчетов по безмоментной теории (БТ) в третьей главе не позволяют в полном объеме судить об НДС рассмотренных задач. Необходимо учесть, что чисто безмоментное напряженное состояние оболочек встречается редко, и тогда на безмоментное поле напряжений накладывается поле смешенного типа, в котором, наряду с напряжениями от усилий, будут и изгибные напряжения сравнимые по величине с нормальными напряжениями. Также возможен случай, когда напряжения от моментов превосходят напряжения от усилий, а такое состояние невыгодно, так как оболочки обладают малой прочностью при чистом изгибе ввиду их малой толщины.

Оценку влияния изгибных напряжений производят путем сравнения напряжений σ_M от моментов $M_{u,v}$ и σ_N от тангенциальных нормальных усилий $N_{u,v}$:

$$\sigma_N = \frac{N_{u,v}}{h}, \sigma_M = \frac{6M_{u,v}}{h^2}. \quad (34)$$

Для *первой задачи* при действии линейной нагрузки направленной по касательной к поверхности на торце $u = \text{const}$ получены численные результаты МКЭ и ВРМ, в том числе M_u (рисунок 10) и $\sigma(N_u)$ (рисунок 11).

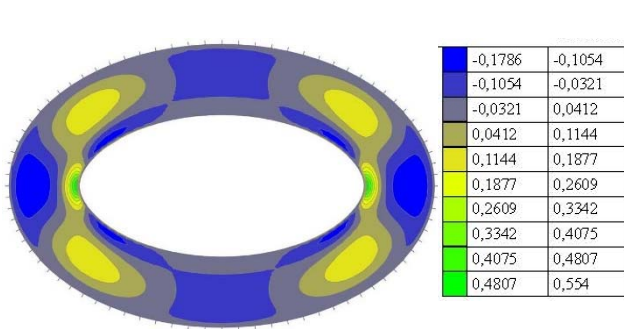


Рисунок 10 – Изгибающий момент M_u (Н·м/м) вдоль прямолинейных образующих в МКЭ

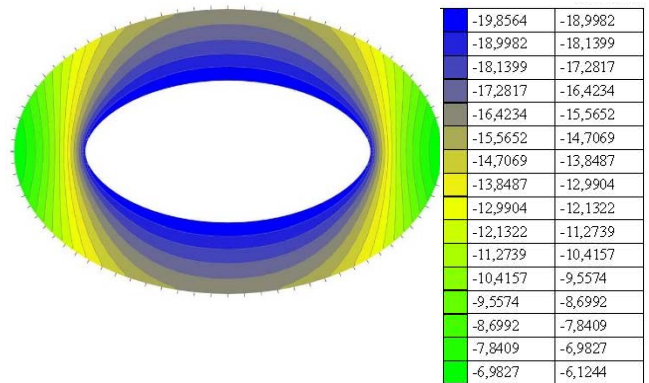


Рисунок 11 – Напряжение $\sigma(N_u)$ (кН/м²) в МКЭ

Максимальное соотношение напряжений $\sigma(M_u)$ к $\sigma(N_u)$ в МКЭ и ВРМ в сечениях 1-1 и 2-2 (рисунок 5) составляет 6 %, в сечениях 3-3, 5-5, 6-6 и 7-7 составляет до 3% и в сечениях 4-4, 8-8 – 11-11 около 1 % и менее.

Максимальные расхождения числовых результатов силы N_u вдоль прямолинейных образующих по БТ от МКЭ и ВРМ составляют чуть больше 18 % в сечении 1-1, в сечении 2-2 около 12 %, в остальных сечениях отклонения 5 - 6 %.

Для *второй задачи* при действии равномерно-распределенной нагрузки вдоль касательных к прямолинейным образующим также получены численные результаты МКЭ и ВРМ, в том числе $\sigma(N_u)$ (рисунок 12) и M_v (рисунок 13).

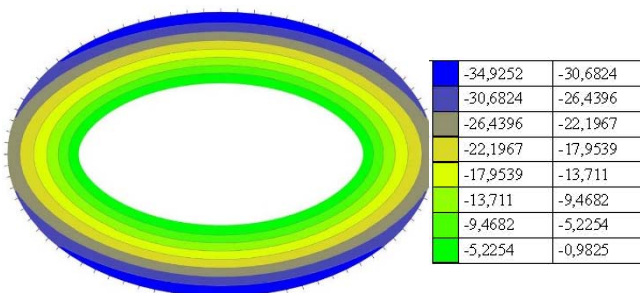


Рисунок 12 – Напряжение $\sigma(N_u)$ (кН/м²) (МКЭ)

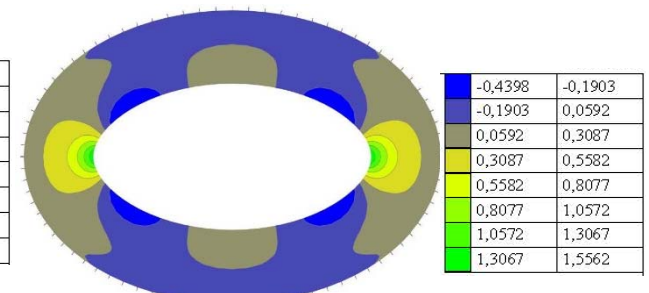


Рисунок 13 – Изгибающий момент M_v (Н·м/м) вдоль криволинейных направляющих

Максимальное соотношение напряжений $\sigma(M_u)$ к $\sigma(N_u)$ МКЭ и ВРМ составляет в сечениях 1-1 и 2-2 30 %, в сеч. 3-3 20 %, в остальных сечениях менее 13 %. Максимальные расхождения числовых результатов силы N_u вдоль прямолинейных образующих по БТ от МКЭ и ВРМ чуть больше 7 % в сечениях 1-1 и 2-2, в остальных сечениях отклонения до 4 %.

Для *третьей задачи* при действии равномерно-распределенной нагрузки по нормали к срединной поверхности также получены численные результаты МКЭ и ВРМ, в том числе $\sigma(N_v)$ (рисунок 14) и M_v (рисунок 15).

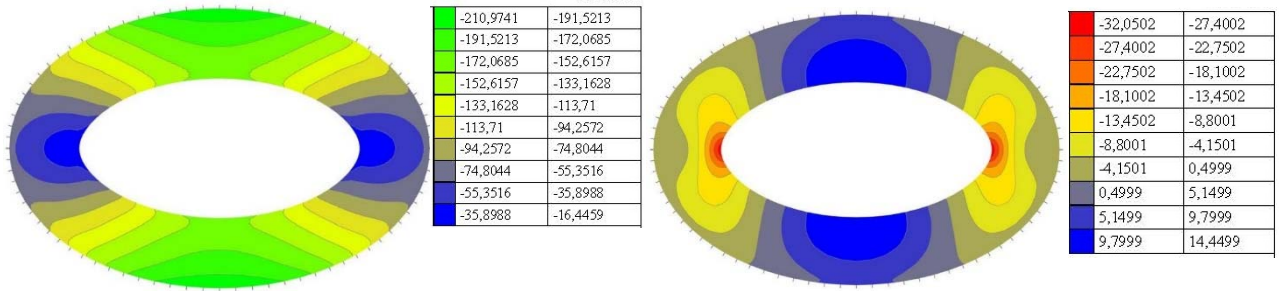


Рисунок 14 – Напряжение $\sigma(N_v)$ (кН/м²) (МКЭ) Рисунок 15 – Изгибающий момент M_v (Н·м/м)

Максимальное соотношение напряжений $\sigma(M_u)$ к $\sigma(N_u)$ МКЭ и ВРМ составляет в сечениях 100 % и более. Изгибные напряжения $\sigma(M_v)$ оказывают еще большее влияние на изгибное состояние торса.

Максимальные отклонения N_v по БТ от МКЭ и ВРМ в сечениях 1-1 – 5-5 составляют 35 %, в остальных сечениях до 10 %; отклонения S по БТ от МКЭ и ВРМ в сечении 2-2 составляют 112 %, в сечении 3-3 63 %, в сечении 4-4 23 %, остальных сечениях до 9 %; отклонения N_u по БТ от МКЭ и ВРМ составляют 59 % в сечении 1-1, в остальных сечениях менее 38 %.

Общий анализ полученных значений изгибающих напряжений в рассмотренных задачах показывает, что они оказывают большое влияние на напряженное состояние изучаемого класса торсовых оболочек.

В диссертации предложена новая конструкция (рисунок 16) из бетона класса В20 толщиной $\delta = 5$ см в форме торса одинакового ската с направляющим эллипсом. Геометрические параметры эллипса $a = 2$ м, $b = 1$ м и угол наклона прямолинейных образующих $\alpha = 60^\circ$. Консольный вылет козырька 2 м. Расчет выполняется в вычислительном комплексе SCAD Office. Закрепление по направляющему эллипсу – жесткое. Конструкция рассчитывается на восприятие статического равномерно-распределенного собственного веса. Распределение нормальных напряжений $\sigma(N_v)$ (рисунок 17) и $\sigma(N_u)$ (рисунок 18) показывает, что конструкция работает в основном на сжатие.

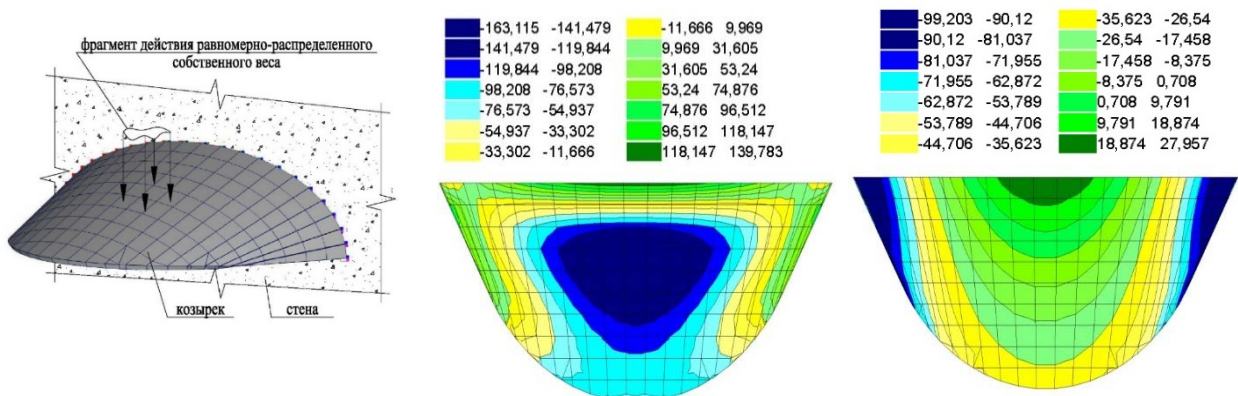


Рисунок 16 – Конструкция. Общий вид

Рисунок 17 – Напряжение $\sigma(N_v)$ (кН/м²)

Рисунок 18 – Напряжение $\sigma(N_u)$ (кН/м²)

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В диссертации на основании выполненных исследований сделаны выводы:

1. В области изучения геометрии торсовых оболочек одинакового ската с эллипсом в основании получены общие формулы для определения координат основных точек торса при различных геометрических параметрах оболочки. Определен закон задания плоской пространственной кривой самопересечения прямолинейных образующих.

2. Аналитическим методом расчета получены системы дифференциальных уравнений восьмого порядка в перемещениях для определения параметров НДС торсов, в том числе, пологих торсов. Показано, что данные системы имеют сложное аналитическое решение.

3. Получены аналитические решения дифференциальных уравнений равновесия по безмоментной теории для четырех типов нагрузок, определены числовые значения параметров напряженного состояния торсов.

4. По методике А.Л. Гольденвейзера по безмоментной теории получены числовые результаты перемещений u_u , u_v и u_z в криволинейной системе координат торсовой оболочки при действии линейно-распределенной нагрузки q направленной по касательной к поверхности на торце $u = \text{const}$.

5. Благодаря полученным численным результатам МКЭ и ВРМ показано, что безмоментное состояние торсов одинакового ската с эллипсом в основании практически не реализуемо.

6. Предложена новая конструкция козырька над входом в здание в форме торсовой поверхности с направляющим эллипсом.

Публикации по теме диссертации*Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень РУДН*

1. Alyoshina O.O., Cajamarca Zuniga D. Stress-strain state investigation of the “YASUNI” shell by bionic architecture methods based on numerical modeling (Исследование напряженно-деформированного состояния оболочки “YASUNI” методами бионической архитектуры на основе численного моделирования). Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2018, Том 14, №4, с. 273-277.

2. Алёшина О.О. Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската. Строительная механика и расчет сооружений, №3, 2019, с.63-70.

3. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, №5, 2019, с. 374-383.

Статьи в ведущих журналах, рецензированных из перечня Scopus/Wos

4. Olga Aleshina, Alhatem Ali and Elena Grinko. Features of the Developable Shells' Geometry for the Space Industry. Volume 174 of the Advances in the Astronautical Sciences Series. IAA/AAS SciTech Forum 2019 on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials. 25–27 June 2019, Moscow, Russia. Pp. 731-740. (IAA-AAS-SciTech2019-045 - AAS 19-1016)

5. Olga Aleshina, David Cajamarca and Juan Barbecho. Numerical Comparative Analysis of a Thin-Shell Spatial Structure for the Candela's Cosmic Rays Pavilion. Volume 174 of the Advances in the Astronautical Sciences Series. IAA/AAS SciTech Forum 2019 on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials. 25–27 June 2019, Moscow, Russia. Pp. 741-751. (IAA-AAS-SciTech2019-064 - AAS 19-1017)

АННОТАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Алёшина Ольга Олеговна

«Расчёт тонких упругих торсовых оболочек одинакового ската с эллипсом в основании»

Тонкостенные конструкции типа оболочек составляют обширный класс в архитектуре, строительстве, судостроении, авиастроении, машиностроении и в других отраслях промышленности. Каждый вид поверхностей имеет определенные преимущества перед другими. Торсы (развертывающиеся невырожденные поверхности) могут быть развернуты на плоскость всеми ее точками без разрывов и складок, при этом углы между любыми кривыми, принадлежащими поверхности, и длины этих кривых не изменяются. Коэффициенты квадратичных форм торсовых поверхностей одинакового ската с плоской кривой в основании $A = 1, F = L = M = 0$. Таким образом, уравнение поверхности задается в линиях кривизн. Одно семейство линий кривизны на торсовой поверхности – прямые линии.

Диссертационная работа посвящена исследованию геометрии и напряженно-деформированному состоянию торсов одинакового ската с направляющим эллипсом. Впервые напряженно-деформированное состояние оболочек одинакового ската с эллипсом в основании изучали С.Н. Кривошапко, М.А. Тимошин, Тхома А., однако исследования не были доведены до числовых результатов.

Торс одинакового ската с направляющим эллипсом является линейчатой поверхностью, имеющей постоянный угол α между прямолинейными образующими и соответствующими главными нормальными эллипса.

В диссертации в области изучения геометрии торсов одинакового ската с эллипсом в основании получены обобщенные формулы для вычисления координат основных точек срединной поверхности с любыми геометрическими параметрами эллипса и углом наклона α прямолинейных образующих. Также определен закон задания кривой самопересечения поверхности.

Получены системы трех дифференциальных уравнений восьмого порядка в частных производных в перемещениях u_x, u_y, u_z для срединной поверхности торса одинакового ската с направляющим эллипсом и такого же пологого торса, показана сложность получения аналитического решения данных систем по общей теории оболочек.

Ввиду сложности нахождения решения далее рассматривается безмоментная теория оболочек. В кандидатской диссертации решены задачи с различными типами нагрузок, обусловленных возможностями безмоментной теории, и получены числовые результаты. Установлена взаимосвязь между рассмотренными видами нагрузок.

В диссертации найдены перемещения торса одинакового ската с направляющим эллипсом при действии линейной нагрузки q на торце $u = \text{const}$ по методике, предложенной А.Л. Гольденвейзером, т.е. определение перемещений по безмоментной теории оболочек.

Выполнено численное исследование о возможности возникновения изгибных напряжений в торсах одинакового ската с направляющим эллипсом путем математического моделирования задач в вычислительном комплексе SCAD Office, основанного на методе конечных элементов, и в программе «SHELLVRM» на базе вариационно-разностного метода, разработанной д.т.н., профессором В.Н. Ивановым в департаменте строительства Российского университета дружбы народов.

Общий анализ полученных значений изгибающих напряжений в рассмотренных задачах показывает, что они оказывают большое влияние на напряженное состояние изучаемого класса торсовых оболочек. Благодаря полученным численным результатам показано, что безмоментное состояние торсов одинакового ската с эллипсом в основании практически не реализуемо.

В кандидатской диссертации предложена новая конструкция в форме торса одинакового ската с направляющим эллипсом, определено напряженно-деформированное состояние данной конструкции.

DISSERTATION ABSTRACT

Aleshina Olga Olegovna

«Analysis of thin elastic torse shells of equal slope with ellipse at the base»

Thin-walled shell-type structures form an extensive class in architecture, construction, shipbuilding, aircraft construction, mechanical engineering and other industries. Each type of surface has certain advantages over others. Torses (unfolding non-degenerate surfaces) can be unfolded onto a plane by all its points without discontinuities or folds, and the angles between any curves belonging to the surface and the lengths of those curves do not change. The coefficients of the quadratic forms of torse surfaces of equal slope with a flat curve at the base are $A = 1$, $F = L = M = 0$. Thus, the equation of the surface is given in curvature lines. The straight lines are one family of curvature lines on the torse surface.

The dissertation work is devoted to the study of the geometry and stress-strain state of torses of equal slope with a directrix ellipse. For the first time, the stress-strain state of shells of equal slope with an ellipse at the base was studied by S.N. Krivoshapko, M.A. Timoshin, Thoma A., however, the studies were not led to numerical results.

The torse shell of equal slope with a directrix ellipse is a ruled surface with a constant angle α between the straight generatrices and the corresponding principal normals of the ellipse.

In the PhD thesis, in the study of geometry of torses of equal slope with an ellipse at the base, generalized formulas for calculating the coordinates of main points of the middle surface with any geometric parameters of the ellipse and the slope angle α of straight generatrices were obtained. The law of self-intersection curve of the surface was also determined.

The systems of three eighth-order partial differential equations in displacements u_x , u_y , u_z are obtained for the middle surface of the torse of equal slope with a directrix ellipse and the same flat torse. The complexity of obtaining an analytical solution of these systems according to the general theory of shells is shown.

Due to the complexity of finding a solution, the momentless theory of shells is further considered. In this PhD thesis, problems with different types of loads due to the capabilities of the momentless theory were solved, and numerical results were obtained. The correlation between the considered types of loads is established.

In the thesis, the displacements of the torse of equal slope with a directrix ellipse were found under the action of a linear load q at the edge $u = \text{const}$ according to the method proposed by A.L. Goldenweiser, i.e., the determination of displacements according to the momentless theory of shells.

A numerical analysis was carried out on the possibility of flexural stresses in torses of the equal slope with a directrix ellipse by mathematical modeling of problems in the SCAD Office computing complex based on the finite element method and in the "SHELLVRM" program based on the variational-difference method developed by Doctor of Technical Sciences, Professor V.N. Ivanov in the Department of Civil Engineering of the Peoples' Friendship University of Russia.

A general analysis of the obtained values of bending stresses in the considered problems shows that they have a great influence on the stress state of the studied class of torse shells. Thanks to the numerical results obtained, it is shown that the momentless state of torses of the equal slope with an ellipse at the base is practically not feasible.

In the PhD thesis a new design in the form of a torse of equal slope with a directrix ellipse is proposed, the stress-strain state of this structure is determined.