РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи
УДК 517.95

Лощенова Дарья Александровна

СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПАКТНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОБОЛЕВА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2016

Работа выполнена на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:	Стернин Борис Юрьевич д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики РУДН
Научный консультант:	Савин Антон Юрьевич д.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики РУДН
Официальные оппоненты:	Мануйлов Владимир Маркович д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры высшей геометрии и топологии МГУ им. М. В. Ломоносова
	Назайкинский Владимир Евгеньевич д.ф.-м.н., старший научный сотрудник ИПМех РАН
Ведущая организация:	Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится 11 октября в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо–Маклая, д. 6. и на сайте "Диссертационные советы РУДН"в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан .... 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению следов G-операторов на подмногообразии в терминах действия группы. А именно следов операторов вида:

$$B = B_0 + \int\limits_G B_g T_g dg : H^s(M) \to H^{s-b}(M), \qquad (*)$$

где G — компактная группа Ли, действующая на многообразии M, B_0 — псевдодифференциальный оператор порядка b, B_g — семейство псевдодифференциальных операторов порядка b, гладко зависящее от $g \in G$, T_g — оператор сдвига, индуцированный действием группы G:

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x).$$

Более точно, дается определение символа для следов таких операторов, устанавливается теорема конечности и находится формула индекса, т.е. выражение для индекса эллиптического оператора в терминах топологических инвариантов символа оператора и многообразия, на котором он задан. Кроме того, полученные результаты о следах G-операторов применяются к задачам Соболева, ассоциированным с действием группы Ли. Также даются условия эллиптичности и формула индекса задач Соболева в этой ситуации.

1. Задача о построении и анализе новых классов операторов на многообразиях является безусловно актуальной. В этой связи метод следов, который рассматривается в данной работе, позволяет построить относительную теорию эллиптических операторов, ассоциированных с действием группы Ли, и поэтому также является актуальным и интересным. Отметим, что операторы, ассоциированные с действиями групп Ли, представляют интерес с точки зрения эллиптической теории нелокальных задач, так как они содержат операторы сдвига, т.е. являются существенно нелокальными. Также эти задачи интересны с точки зрения некоммутативной геометрии Алана Конна: символы G-операторов являются элементами фундаментальных для некоммутативной геометрии алгебр — скрещенных произведений, отвечающих действию группы Ли на многообразии.

2. Впервые следы появились в работах С. П. Новикова и Б. Ю. Стернина[1,2] и применялись для изучения задач Соболева[3,4,5,6] (т.е. псевдодифференциальных задач с условиями, задаваемыми на подмногообразии произвольной размерности). Также была изучена не только связь с задачами Соболева, но и некоторые самостоятельные свойства новой конструкции. Далее были изучены эффекты, которые эта конструкция доставляет для случая, когда основное многообразие имеет особенности[7,8,9]. По-видимому, наиболее интересным наблюдением, которое обнаруживается при изучении следов, является тот факт, что след *может доставлять новые классы операторов*, а именно, оказывается, что если дан некоторый оператор, то его след может представлять оператор *совершенно новой природы*, отличной от первоначального оператора. Это обстоятельство представляет собой основной интерес данной работы. Мы возьмем на многообразии т.н. *G-оператор* (оператор, ассоциированный с действием компактной группы Ли на многообразии[10]), т.е., по сути, оператор, отвечающей некоторой дополнительной структуре, и увидим, что след этого оператора будет представлять собой некоторый *новый класс операторов*, не встречавшийся в литературе ранее. Такие операторы мы назовем *операторами Фурье–Меллина* и получим для них условия фредгольмовости и формулу индекса.

[1]Новиков С. П., Стернин Б. Ю. Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория. *Докл. АН СССР*, 170(6), 1966, 1265-1268

[2]Новиков С. П., Стернин Б. Ю. Эллиптические операторы и подмногообразия. *Докл. АН СССР* , 171(3), 1966, 525-528

[3]Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности. *Труды Моск. Мат. общ-ва*, 1966, 15:346–382

[4]Стернин Б. Ю. Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева. *Докл. АН СССР* , 230(2), 1976, 287–290

[5]Стернин Б. Ю. и Шаталов В. Е. Относительная эллиптическая теория и задача Соболева. *Матем. сборник* , 187(11), 1996, 115–144

[6]V.E. Nazaikinskii, B.Yu. Sternin. Relative elliptic theory. *Aspects of boundary problems in analysis and geometry*, Operator Theory: Advances and Applications, 151, eds. Gil, Juan (ed.) et al., Birkhauser, Basel, 2004, 495–560

[7]Савин А.Ю. и Стернин Б. Ю. Эллиптические трансляторы на многообразиях с точечными особенностями. *Дифф. уравн.*, № 12, 2012, 1612–1620

[8]Савин А.Ю. и Стернин Б.Ю. Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями. *Дифф. уравн.*, №4, 2013, 513–527

[9]Савин А.Ю. и Стернин Б.Ю. Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями.*Дифф. уравн.*, № 2, 2014, 229–241

[10]B.Yu. Sternin. On a class of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups. Uniformization and finiteness theorem. *Cent. Eur. J. Math*, 9:4 (2011), 814-832

Цель работы. Целью работы является изучение следующих взаимосвязанных вопросов:

1. Исследование природы следов G-операторов на подмногообразиях.

2. Проведение локализации следов (указание множеств в подмногообразии, на которых эти операторы сосредоточены).

3. Предъявление условий фредгольмовости таких операторов и формулы индекса.

4. Установление теоремы конечности и формулы индекса в относительной эллиптической теории, ассоциированной с действием группы Ли на многообразии.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод следов для эллиптических уравнений, ассоциированных с группой Ли. Это метод построения принципиально новых классов операторов в теории псевдодифференциальных уравнений, который, в частности, содержит в себе все классические операторы: дифференциальные, псевдодифференциальные и др. А именно, пусть M — замкнутое многообразие, X — подмногообразие в M. Тогда для любого оператора на M определен его след — некоторый оператор на подмногообразии X. Мы применяем указанную конструкцию в ситуации, когда на основном многообразии M действует группа Ли G и на M рассматриваются операторы, ассоциированные с действием группы. Более точно, рассматриваются операторы, порожденные псевдодифференциальными операторами и операторами сдвига вдоль орбит действия группы. Такие операторы называются G-операторами. Оказывается, что следы таких G-операторов на подмногообразиях являются операторами совершенно новой природы. Например, эти следы (в отличие от псевдодифференциальных операторов) могут быть сосредоточены на некотором подмножестве (например, в точке) подмногообразия X.

Основные результаты. Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Изучены следы G-операторов на подмногообразии X. Оказывается, они являются операторами Фурье-Меллина.

2. Установлена теорема фредгольмовости, т. е. предъявлены условия, называемые условиями эллиптичности, при выполнении которых рассматриваемые операторы — операторы Фурье-Меллина,

являются фредгольмовыми в подходящих функциональных пространствах.

3. Получена теорема об индексе оператора Фурье-Меллина. Здесь дано определение символа таких операторов, который зависит от порядка пространств Соболева, в которых действует данный оператор.

4. Рассмотрена задача Соболева, ассоциированная с действием компактной группы Ли. Также предъявлены ее свойства фредгольмовости и формула индекса.

Теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории уравнений с частными производными, алгебраической топологии и некоммутативной геометрии. Результаты диссертации могут быть использованы в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности "математика".

Содержание работы

Глава 1. След G-оператора. Общая конструкция

Глава посвящена изучению следа G-оператора, который представляется в виде композиции псевдодифференциального оператора и некоторого сосредоточенного оператора, который называется *оператором Фурье-Меллина.*

В параграфе 1.1 говорится о следе оператора на подмногообразии X. Более точно, если $i : X \hookrightarrow M$ — вложение подмногообразия X в многообразие M и B — оператор на многообразии M, то его след на подмногообразии X — это оператор вида

$$i^!(B) = i^* B i_*, \tag{1}$$

где i^* и i_* — операторы *ограничения* и *коограничения*, индуцированные вложением i. Наиболее интересным наблюдением, которое обнаруживается при изучении следов, является тот факт, что след *может доставлять новые классы операторов*, а именно, оказывается, что если дан некоторый оператор, то его след может представлять оператор *совершенно новой природы*, отличной от первоначального оператора. Это обстоятельство представляет собой основной интерес данной работы.

В параграфе 1.2 даются определения *граничного оператора*, *кограничного оператора*, а также *следа*.

В параграфе 1.3 в качестве примера рассматривается след псевдодифференциального оператора.

Теорема 1. *(Б.Ю. Стернин) Пусть*

$$D : H^s(M) \to H^{s-m}(M)$$

— псевдодифференциальный оператор на многообразии M. Тогда при $s + \nu/2 < 0$ и $s - m - \nu/2 > 0$ оператор

$$i^!(D) : H^{s+\frac{\nu}{2}}(X) \longrightarrow H^{s-m-\frac{\nu}{2}}(X)$$

корректно определен и является псевдодифференциальным оператором на подмногообразии X .

В параграфе 1.4 рассматриваются G-операторы вида [см.(*)], т.е.:

$$B = B_0 + \int_G B_g T_g dg : H^s(M) \to H^{s-b}(M) \tag{2}$$

На действия группы G накладываются специальные условия трансверсальности по отношению к подмногообразию X. Именно, множество неподвижных точек на X

$$X^G = \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$$

и множество элементов группы G, которые оставляют внутри X другие точки, кроме неподвижных

$$G_X = \{g \in G \mid \exists x \in X \setminus X^G : gx \in X\}$$

состоят из конечного числа элементов, а орбита Gx любой точки $x \in X \setminus X^G$ трансверсальна подмногообразию X.

Параграф 1.5 является центральным в настоящей главе. В этом параграфе подробным образом изучается след G-оператора. Показывается, что, если группа G удовлетворяет условию допустимости, то след G-оператора, обладает особыми локальными свойствами, а именно является *оператором сосредоточенным* в неподвижных точках действия группы G.

Предложение 2. *Пусть B — G-оператор вида* (2)*, действие группы G удовлетворяет условиям допустимости и оператор $i^!(B_0)$ является эллиптическим как псевдодифференциальный оператор. Тогда след оператора B с точностью до компактных операторов представим в виде*

$$i^!(B) = \mathcal{D}(1+A) : H^{s+\frac{\nu}{2}}(X) \to H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X), \tag{3}$$

где $\mathcal{D}$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, A — оператор, сосредоточенный на множестве X^G неподвижных точек подмногообразия X.

Далее, оператор $1+A$ исследуется в произвольно малой окрестности выделенной точки с помощью метода замораживания коэффициентов. Оператор $1+A$ с замороженными коэффициентами имеет вид

$$\begin{aligned}(1+A)u(x) &= \\ &= u(x)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\mathcal{D}^{-1}(\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^{n/2}_\eta} d\eta \int\limits_G B_g(\xi,\eta)\widetilde{T}_g\,\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x)](x,y,\xi,\eta)dg\right],\end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathcal{D}^{-1}(\xi)$, $B_g(\xi,\eta)$ — символы операторов $\mathcal{D}^{-1}$, B_g в точке x_0, $\widetilde{T}_g$ — оператор на функциях в координатах Фурье, индуцированный оператором сдвига T_g, $\mathcal{F}_{x\to\xi}$, $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}$ — прямое и обратное преобразования Фурье.

Далее показывается, что при переходе сначала к координатам Фурье и затем к сферическим координатам (ω, r_ξ), где $\xi = r_\xi\omega$, оператор (4) можно представить как свертку Меллина с функцией, которая получается из внутреннего интеграла (по G) в формуле (4). Таким образом, наш оператор представляется в виде *оператора Фурье–Меллина*, т.е. оператора $1+\mathcal{A}$, который равен:

$$1+\mathcal{A} = 1+\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\psi(\xi)\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}\widehat{K}(p)\mathcal{M}_{r_\xi\to p}\psi(\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — срезающая функция, равная 0 вне окрестности особой точки и равная 1 внутри меньшей окрестности, $\psi(\xi)$ — гладкая функция, равная 1 на бесконечности и 0 в окрестности нуля, $\mathcal{M}_{r_\xi\to p}$ и $\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}$ —

прямое и обратное преобразования Меллина по радиальной переменной,

$$\widehat{K}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^p K(t) \frac{dt}{t} \tag{6}$$

— функция комплексной переменной p со значениями в интегральных операторах на сфере.

Предложение 3. *Операторы $1 + \mathcal{A}$ и $1 + A$ отличаются на компактный оператор.*

Итак, оператор (4) сводится к умножению на операторно-значную функцию $1 + \widehat{K}(p)$.

Предложение 4. *Пусть $b + n/2 < 1 \leq \dim G$. Тогда функция*

$$\widehat{K}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^p K(t) \frac{dt}{t} \tag{7}$$

— преобразование Меллина функции $K(t)$ — корректно определена и обладает следующими свойствами:

1) *она является аналитической в вертикальной полосе*

$$b + n/2 < Re(p) < n/2; \tag{8}$$

2) *для любого фиксированного p из указанной полосы оператор $\widehat{K}(p)$ является компактным;*

3) *имеем $\left\|\widehat{K}(p)\right\| \to 0$ при $|p| \to \infty$ внутри полосы (8).*

Глава 2. Операторы Фурье - Меллина.

Глава посвящена построению эллиптической теории для операторов Фурье-Меллина.

В параграфе 2.1 приводятся основные мотивировки изучения операторов Фурье-Меллина.

В параграфе 2.2 определяются (общие) операторы Фурье-Меллина:

$$1 + \mathcal{A} = 1 + \varphi(x)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\psi(\xi)\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}K(p)\mathcal{M}_{r_\xi\to p}\psi(\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi(x), \tag{9}$$

где $\psi(\xi)$ и $\varphi(x)$ — такие же как в (5), $K(p)$ — операторно-значная функция комплексной переменной p, принимающая значения в интегральных операторах на сфере и удовлетворяющая условиям:

1) $K(p)$ аналитична на прямой

$$\Gamma_\gamma = \{p \in \mathbb{C} \mid Re(p) = \gamma\}, \tag{10}$$

где γ — некоторое число.

2) для любого фиксированного p на прямой Γ_γ оператор $K(p)$ является компактным;

3) $\|K(p)\| \to 0$ при $|p| \to \infty$ для всех p на прямой Γ_γ.

Прямая Γ_γ называется *весовой прямой.* Также отметим, что определение (9) легко модифицируется, когда особых точек несколько (конечное число). В этом случае оператор Фурье–Меллина можно представить как сумму выражений вида (9), параметризованную всеми особыми точками.

В параграфе 2.3 показывается, что операторы Фурье–Меллина действуют непрерывно в пространствах Соболева $H^s(X) \to H^s(X)$ при надлежащих условиях на область аналитичности функции $K(p)$.

Предложение 5. *Пусть $1+\mathcal{A}$ — оператор Фурье–Меллина на многообразии X, действующий по формуле* (9) *и пусть функция $K(p)$ обладает свойствами, перечисленными выше, для прямой*

$$\Gamma_{s+\frac{\dim X}{2}} = \{p \in \mathbb{C} \mid Re(p) = s + \frac{\dim X}{2}\}. \tag{11}$$

Тогда оператор $1+\mathcal{A}$ является непрерывным в пространствах Соболева

$$1+\mathcal{A} : H^s(X) \to H^s(X),$$

Параграфы 2.4 и 2.5 являются центральными в данной главе. Здесь дается определение символа оператора Фурье-Меллина. Это есть операторно-значная функция $1 + K(p)$, которая обозначается как $\sigma(1+\mathcal{A})$:

$$\sigma(1+\mathcal{A})(p) = 1 + K(p).$$

Также определяется эллиптичность оператора Фурье-Меллина. Оператор Фурье- Меллина эллиптичен, если его символ $\sigma(1+\mathcal{A})$ обратим на прямой $Re(p) = s + (\dim X)/2$.

Теорема 6. *Пусть оператор Фурье-Меллина $1+\mathcal{A}$ эллиптичен. Тогда он фредгольмов.*

Приводится также формула индекса оператора Фурье-Меллина. Как уже известно, символ этого оператора есть функция, определенная на весовой прямой, а весовая прямая, в свою очередь, зависит от порядка пространств Соболева, в которых действует данный оператор. Индекс оператора Фурье–Меллина, вообще говоря, зависит от порядка пространств Соболева, в которых действует оператор.

Теорема 7. *Индекс оператора $1+\mathcal{A}$, действующего в пространстве Соболева $H^s(X)$, равен числу вращения функции $\sigma(1+\mathcal{A})(p)$ на весовой прямой $Re(p) = s + \dim X/2$:*

$$\operatorname{ind}_s(1+\mathcal{A}) = w_{s+\dim X/2}[\sigma(1+\mathcal{A})]. \tag{12}$$

Глава 3. Задача Соболева, ассоциированная с действием группы Ли.

Глава посвящена изучению задачи Соболева, ассоциированной с действием группы Ли, установлению теоремы конечности и формулы индекса для такой задачи. Также здесь рассматривается наглядный пример.

В параграфе 3.1 рассказывается о классической задаче Соболева, которая подробно изучалась в работах Б. Ю. Стернина. Такая задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} Du \equiv f \pmod{X}, & u \in H^s(M),\ f \in H^{s-m}(M) \\ i^*Bu = \varphi, & \varphi \in H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X), \end{cases} \tag{13}$$

где D, B — псевдодифференциальные операторы на M порядков m и b соответственно, $i^* : H^{s-b}(M) \to H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X)$ — оператор ограничения, индуцированный вложением $i : X \hookrightarrow M$, а сравнение $Du \equiv f \pmod{X}$ понимается в том смысле, что Du совпадает с функцией f на множестве $M \setminus X$, т.е. вне подмногообразия X. Уравнением $i^*Bu = \varphi$ на функцию u накладывается граничное условие на подмногообразии X. Общая схема решения сводится к следующему.

Обратным образом, соответствующим задаче (13), называется оператор

$$i^*BD^{-1}i_* : H^{s-m+\frac{\nu}{2}}(X) \to H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X), \tag{14}$$

т.е. след оператора BD^{-1}. Поскольку для классической задачи Соболева (13) (в которой операторы D и B — псевдодифференциальные) обратный образ $i^*BD^{-1}i_*$ является псевдодифференциальным оператором на многообразии X, то фредгольмовость классической задачи Соболева эквивалента эллиптичности псевдодифференциальных операторов D и $i^*BD^{-1}i_*$, а ее индекс — есть сумма индексов этих операторов.

В параграфе 3.2 дается постановка задачи Соболева, ассоциированной с действием компактной группы Ли на M. Отметим, что задача Соболева для дискретной группы рассматривалась в работах А. Ю. Савина и Б. Ю. Стернина[11] и Л. Л. Нгуена[12].

Здесь задача Соболева ставится следующим образом:

$$\begin{cases} Du \equiv f \pmod{X}, & u \in H^s(M),\ f \in H^{s-m}(M) \\ i^*Bu = \varphi, & \varphi \in H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X), \end{cases} \tag{15}$$

где оператор D — псевдодифференциальный, а оператор B — это G-оператор порядка b, ассоциированный с действием группы G, т.е. B имеет вид:

$$B = B_0 + \int\limits_G B_g T_g dg, \tag{16}$$

где B_0 — псевдодифференциальный оператор порядка b, B_g — семейство псевдодифференциальных операторов порядка b, гладко зависящее от g. Требуется выяснить условия фредгольмовости задачи (15) и получить ее формулу индекса.

В параграфах 3.3 и 3.4 рассматривается обратный образ задачи (15) $i^*BD^{-1}i_*$. Оказывается, этот оператор представляет собой след G - оператора, т.е. является оператором Фурье-Меллина, который отвечает за его фредгольмовость и индекс и равен

$$i^*BD^{-1}i_* = i^!(BD^{-1}) = \mathcal{D}(1+A), \tag{17}$$

где $\mathcal{D} = i^!(B_0D^{-1})$ — псевдодифференциальный оператор, а A — некоторый оператор, сосредоточенный в точке x_0. Очевидно, оператор $i^*BD^{-1}i_*$ фредгольмов, когда фредгольмов псевдодифференциальный оператор $\mathcal{D}$ и фредгольмов оператор $1 + A$, а индекс его равен

[11]Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. О нелокальных задачах Соболева. *Доклады академии наук*, 451(3): 2013, 259-263

[12]Нгуен Л. Л. Задачи Соболева для действий конечных групп. *Труды МФТИ*, Т.4, №4, 2012, 125-133

сумме индексов операторов $\mathcal{D}$ и $1+A$. Так же, как это делалось в главе 1, при помощи метода замораживания коэффициентов оператору $1+A$ ставится в соответствие оператор Фурье–Меллина $1+\mathcal{A}$:

$$1+\mathcal{A} = 1+\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\psi(\xi)\mathcal{M}^{-1}_{p\to r_\xi}\widehat{K}(p)\mathcal{M}_{r_\xi\to p}\psi(\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi(x), \qquad (18)$$

символ которого представлен функцией $\sigma(1+\mathcal{A}) = 1+\widehat{K}(p)$.

Функция $\widehat{K}(p)$ корректно определена и обладает свойствами:

1. Она является аналитической в вертикальной полосе
$$n/2-m+b < Re(p) < n/2; \qquad (19)$$
2. Для любого фиксированного p из указанной полосы оператор $\widehat{K}(p)$ является компактным;
3. Имеем $\left\|\widehat{K}(p)\right\| \to 0$ при $|p|\to\infty$ внутри полосы (19).

В параграфе 3.5 сформулированы условия фредгольмовости и формула индекса для задачи Соболева (15).

Следствие 8. *Задача Соболева* (15)*, ассоциированная с действием группы G, удовлетворяющим условию допустимости, фредгольмова, когда эллиптичны псевдодифференциальные операторы D и $i^*B_0D^{-1}i_*$, а также эллиптичен оператор Фурье-Меллина* (18)*.*

Следствие 9. *Индекс задачи Соболева* (15) *S, ассоциированной с действием группы G, удовлетворяющим условию допустимости, равен*
$$\operatorname{ind} S = \operatorname{ind}_{s-m+n/4}(1+\mathcal{A}) + \operatorname{ind}\mathcal{D} + \operatorname{ind} D,$$
где индекс оператора Фурье–Меллина $\operatorname{ind}_{s-m+n/4}(1+\mathcal{A})$ вычисляется по теореме 7, а индексы псевдодифференциальных операторов $\mathcal{D}$ и D вычисляются по формуле Атьи–Зингера.

В параграфе 3.6 рассматривается пример, где в качестве M берется двумерная сфера $\mathbb{S}^2$, подмногообразие $X=\mathbb{S}^1$ — это меридиан.

Изучается следующая задача Соболева:

$$\begin{cases} \Delta u \equiv f \pmod X, & u\in H^s(\mathbb{S}^2), \quad \frac{1}{2}<s<\frac{3}{2}, \\ i^*\left(1+\alpha\int\limits_0^{2\pi} T_\varphi d\varphi\right)u = h, & h\in H^{s-1/2}(\mathbb{S}^1), \end{cases} \qquad (20)$$

где α — константа, а оператор T_φ действует на функцию u на M по формуле:

$$T_\varphi u(x) = u(R_\varphi^{-1} x).$$

Здесь R_φ — поворот сферы на угол φ вокруг полюсов. Изучается обратный образ этой задачи, который можно представить в виде

$$\mathcal{D}\left[1 + \mathcal{D}^{-1} i^* \left(\alpha \int\limits_0^{2\pi} T_\varphi \Delta^{-1} d\varphi\right) i_*\right]. \tag{21}$$

Поскольку оператор $\mathcal{D}$ — эллиптический, интерес представляет оператор, записанный в формуле(21) в квадратных скобках.

Мы обозначим этот оператор как $1 + A$:

$$1 + A = 1 + \mathcal{D}^{-1} i^* \left(\alpha \int\limits_0^{2\pi} T_\varphi \Delta^{-1} d\varphi\right). \tag{22}$$

Далее, изучается оператор $1+A$ в окрестности одного из полюсов сферы.

Для этого оператора вычисляется символ, и он имеет вид:

$$\sigma_{s-3/2}(1 + A)(p) = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Re(p) = s - 1. \tag{23}$$

Основным результатом этого параграфа является предъявление условий фредгольмовости данной задачи и ее индекс.

Предложение 10. *Задача* (20) *фредгольмова при всех s и α, удовлетворяющих условиям:*

1.
$$\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}, \quad s \neq 1$$

2.
$$\alpha \neq \alpha_0(s) = -\frac{s-1}{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)},$$

а также при $s = 1$, если $\alpha > \alpha_0(1) = -1/(2\pi)$.

Предложение 11. *Индекс задачи* (20) S *равен*

$$\operatorname{ind} S = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0(s),\ 1/2 < s < 3/2, \\ -2, & \alpha < \alpha_0(s),\ 1/2 < s < 1, \\ 2, & \alpha < \alpha_0(s),\ 1 < s < 3/2. \end{cases}$$

Апробация диссертационной работы. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

1. Межкафедральный семинар “Динамические системы и дифференциальные уравнения” МГУ. Руководители А. М. Степин и А. А. Давыдов. Доклад 13.04.2015.

2. Семинар кафедры прикладной математики РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского. Доклад 28.04.2015.

3. Научный семинар по дифференциальным уравнениям под руководством профессора Б. Ю. Стернина и доцента А. Ю. Савина. Доклад 11.02.2016.

4. Научно-исследовательский семинар "Асимптотические методы в математической физике"ИПМех РАН под руководством профессора С. Ю. Доброхотова. Доклад 12. 04. 2016.

Также результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях.

1. Международная научная конференция “Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы”, 15–18 декабря 2014. Москва.

2. XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов - 2015”, 13–17 апреля 2015. Москва.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих статьях:

1. Лощенова Д. А. Задачи Соболева, ассоциированные с действиями групп Ли. *Дифференциальные уравнения*, **51**, № 8, 2015, 1056–1069.

2. Лощенова Д. А. О задачах Соболева, ассоциированных с действиями групп Ли. *Известия вузов. Математика*, № 9, 2015, 69–73.

3. Лощенова Д. А. Индекс задач Соболева, ассоциированных с действием групп Ли. *Вестник РУДН*, № 2, 2015, 11–18.

Тезисы конференций:

1. Лощенова Д. А. О задаче Соболева, ассоциированной с компактной группой Ли. // Материалы международной научной конференции “Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы” РУДН, 15-18 декабря 2014 г.
2. Лощенова Д. А. О задаче Соболева, ассоциированной с компактной группой Ли. // Материалы международного молодежного научного форума “Ломоносов - 2015” МГУ им. М. В. Ломоносова, 13 -17 апреля 2015 г.

Лощенова Д.А.

Следы операторов, ассоциированных с компактными группами Ли и их приложения к задаче Соболева

Аннотация

Диссертация посвящена изучению следов G - операторов на подмногообразиях в терминах действия группы. Получены условия, называемые условиями эллиптичности, при выполнении которых рассматриваемые операторы называются операторами Фурье-Меллина, являются фредгольмовыми в подходящих функциональных пространствах. Получена теорема об индексе для операторов Фурье-Меллина. Рассмотрена задача Соболева, ассоциированная с действием компактной группы Ли. Также предъявлены ее свойства фредгольмовости и формула индекса.

Loshhenova D.A.

Traces of operators, associated with compact Lie groups and their application to Sobolev problem

Abstract

The thesis is devoted to the study of the traces of G - operators on the submanifolds in terms of group actions. We obtain conditions, called the ellipticity conditions, under which considered the operators - operators of Fourier-Mellin, are Fredholm in appropriate function spaces. We obtain an index theorem for operators of Fourier - Mellin. We study the Sobolev problem, associated with compact Lie group. Besides, obtain Fredholm properties and index formula in this situation.