На правах рукописи

Неверова Дарья Андреевна

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2020

Работа выполнена в Математическом институте им. С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:

Скубачевский Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, директор Математического института им. С.М. Никольского Российского университета дружбы народов.

Официальные оппоненты:

Солдатов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук.

Тихомиров Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, доцент факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.

Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 15 декабря 2020 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.003 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан 13 ноября 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.

Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящей работе изучаются вопросы гладкости обобщенных решений краевых задач для линейных эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Рассматриваются уравнения второго порядка, содержащие, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига. В одномерном случае исследуются уравнения вида

$$-(R_{2Q}u)''(x) + (R_{1Q}u)'(x) + R_{0Q}u(x) = f(x) \qquad (x \in (0,d)). \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(x)\Big|_{x=0} = 0, \qquad u(x)\Big|_{x=d} = 0, \tag{2}$$

$$(-(R_{2Q}u)'(x) + \sigma_1 u(x))\Big|_{x=0} = 0, \;\; ((R_{2Q}u)'(x) + \sigma_2 u(x))\Big|_{x=d} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0$. Здесь через R_{iQ} обозначены линейные операторы $R_{iQ} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ действующие по формуле $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$ $(i = 0,1,2)$, где $I_Q : L_2(0,d) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения функций нулем вне интервала $(0,d)$; оператор $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,d)$ — оператор сужения функций на интервал $(0,d)$; ограниченные линейные операторы $R_i : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ $(i = 0,1,2)$ определены по формулам

$$R_i u(x) = \sum_{j=-m}^{m} b_{ij}(x) u(x+j) \qquad (i = 0,1,2),$$

где m — натуральное число, $b_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R})$— комплекснозначные функции.

Также рассматриваются эллиптические дифференциально-разностные уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \qquad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$u(x)\Big|_{\partial Q} = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijQ} u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) u = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{6}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q, $\sigma \in C^k(\partial Q)$ — неотрицательная вещественнозначная функция; операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$ $(i, j - 1, \dots, n)$; оператор $I_Q \colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ является оператором продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; оператор $P_Q \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q; R_{ij} — разностные операторы, определенные по формуле

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}(x) u(x+h) \qquad (i,j = 1,\dots,n). \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{M}$ — конечное множество векторов h из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, коэффициенты разностных операторов $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Подобные задачи принадлежат к классу нелокальных задач, изучение которых было начато в классических работах М. Пиконе[1], Я.Д. Тамаркина[2], Т. Карлемана[3].

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений началась с работ А.Д. Мышкиса.[4] Развитием этой теории занимались также такие математики, как Л.Э. Эльсгольц[5], Н.Н. Красовский[6], Ю.С. Осипов[7], Г.А. Каменский,[8] Р. Беллман и К. Кук[9], Дж. Хейл[10] и др. В указанных выше работах, помимо изложения качественной теории, рассматривались приложения дифференциально-разностных уравнений к исследованию вариационных задач и задач оптимального управления системами с последействием.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальные уравнения могут обладать рядом новых свойств. Одним из них является нарушение гладкости обобщенных решений даже для случая бесконечно дифференцируемой правой части[11], при этом гладкость решения может сохраняться на некоторых подынтервалах. В работах[12,13] были получены достаточные условия на правые части дифференциально-разностного уравнения, при которых обобщенное решение будет непрерывно дифференцируемым на ограниченном интервале. Однако вопрос существования классического решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений при любой непрерывной функции правой части на ограниченном интервале ранее не рассматривался.

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах многих математиков: Ф. Хартмана и Г. Стампакья[14], А.Б. Антоневича[15], В.С. Рабиновича[16] и др. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сдвигами по пространственным переменным в ограниченных областях рассматрива-

[1] Picone M. I teoremi d'esistenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni, *Rend. Accad. Lincei.*, 1908.— *17*.— P. 340–347.

[2] Тамаркин Я. Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917.

[3] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zurich*, 1932.— №1.— P. 138–151.

[4] Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН*, 1949.— *4*, №5 (33).— С. 99–141.

[5] Зверкин А М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, *Успехи математических наук*, 1962— *17*, №2.— С. 77–164.

[6] Красовский Н.Н. *Теория управления движения.* —М.:Наука,1968.

[7] Osipov Yu.S,. Stabilization of control systems with delays, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1965.— *1*.— P. 605–618.

[8] Каменский Г.А., Хвилон Е.А., Необходимое условие оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, *Автоматика и телемеханика*, 1969.— №3.— С. 20–32.

[9] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[10] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[11] Каменский Г.А., Мышкис А.Д. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах. *Дифференциальные уравнения*, 1974.— *10*.— С. 409–418.

[12] Каменский Г.А., Мышкис А.Д., Скубачевский А.Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа, *Укр. матем. ж-л*, 1985.— *37*, №5.— С. 581-585.

[13] Skubachevskii A.L. *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

[14] Hartman F., Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential-functional equations, *Acta Math.*, 1966.— *115*.— P. 271–310.

[15] Антоневич А.Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе, *Дифф. уравн.*, 1972. — *8*, №2. — С. 309–317.

[16] Рабинович В.С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на Rn и в полупространстве, *Докл. АН СССР*, 1978.— *243*, №5.— С. 1134–1137.

лись А. Л. Скубачевским[13,17,18,19,20,21,22,23,24,25] и др. Им были созданы основы теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений: в частности, были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева, показано, что наличие сдвигов аргументов в старших производных, отображающих точки границы внутрь области, приводит к появлению решений, гладкость которых может нарушаться внутри области, а также ряду других принципиально новых свойств. В дальнейшем развитие теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений продолжилось в работах его учеников[26,27,28,29,30], изучавших спектральную асимптотику сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, дифференциально-разностные уравнения с вырождением, вторую и третью краевые задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений, краевые задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами и пр.

Изучаемые задачи имеют также приложения в теории эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными условиями[31], связывающими значения искомой функции и ее производных в точках границы со значениями в некоторых внутренних точках области, в теории упругости [32, 33], теории многомерных диффузионных процессов[34], в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи [21, 35].

---

[17] Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач", *Матем. сб.*, 1982.— *117*, №4.— С. 548–558.

[18] Скубачевский А. Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах, *Дифф. уравн.*, 1982.— *18*, №9.— С. 1590–1599.

[19] Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations, *J. Differential Equations*, 1986.— *63*, №3.— P. 332–361.

[20] Кук К., Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом, *Дифференц. уравнения*, 1995. — *31*,№8.— С. 1348–1352.

[21] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics, *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 1998.— *32*, №2.— P. 261–278.

[22] Скубачевский А. Л. Эллиптические диффренциально-разностные уравнения с вырождением, *Труды ММО*, 1998.— *59*.— С. 240–285.

[23] Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциальноразностных уравнений, *Тр. Санкт-Петербург. мат. об-ва.*,1998. — *5*. — С. 223–288

[24] Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения, *Усп. мат. наук*, 2016.— *71*, №5.— С. 3–112.

[25] Skubachevskii A. L. Elliptic differential-difference opera-tors with degeneration and the Kato square root problem, *J. Mathematische Nachrichten.*, 2018. — *291*.—P. 2660–2692.

[26] Цветков Е. Л. О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения,*Укр. мат. ж.*, 1993.— *45*, №8.— С. 1140–1150.

[27] Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, *Дифф. уравн.*, 1999. — *35*.— С. 793–800.

[28] Попов В. А., Скубачевский А. Л. Априорные оценки для эллиптических дифференциально разностных операторов с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2010.— *36*.— С. 125–142.

[29] Попов В. А., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально разностных уравнений с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2011.— *39*.— С. 130–140.

[30] Иванова Е. П. О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов *Математические заметки*, 2019. — *105*, №1.— С. 145–148.

[31] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Докл. АН СССР*, 1969. — *185*, №4. — С. 739-740.

[32] Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела, *Прикл. мех.*, 1979.— *15*, №5.— С. 39–47.

[33] Onanov G. G., Cvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory, *Russian J. Math. Phys.*, 1996.— *3*, №4.— P. 491–500.

[34] Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов,*Доклады АН СССР*, 1989.— *307*, №2.— С. 287–291

[35] Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2007. — *21*. — С. 5–36

В диссертации основное место уделяется изучению гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений в шкалах пространств непрерывно-дифференцируемых функций и пространств Гельдера.

Цель работы. Целью работы является исследование гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на интервале и в ограниченной области. Одним из наиболее важных и принципиальных моментов, отличающих упомянутые постановки, является наличие негладких решений. Типично нарушение гладкости обобщенных решений вдоль сдвигов границы внутрь области, а также появление множества «особых» точек $\mathcal{K}$ (как на границе, так и внутри области), вблизи которого обобщенные решения могут иметь степенные сингулярности. В то же время, в некоторых подобластях обобщенные решения по-прежнему обладают естественной для подобных задач гладкостью. Предмет диссертационного исследования составляет получение условий на коэффициенты разностных операторов, гарантирующих гладкость решений на всем интервале (в одномерном случае) или в некоторых подобластях, а также на границе этих подобластей (в эллиптическом случае).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены условия существования классических решений задач Дирихле, Неймана, а также третьей краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на конечном интервале.

Для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений с краевыми условиями первого, второго и третьего рода сформулированы условия сохранения в пространстве Гельдера гладкости обобщенных решений внутри некоторых подобластей и на границе соседних подобластей. Подобласти здесь определяются как связные компоненты множества, полученного из Q выбрасыванием всевозможных сдвигов границы ∂Q на векторы некоторой группы, порожденной сдвигами, входящими в разностные операторы.

Теоретическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер и оказывает влияние на развитие общей теории нелокальных краевых задач, а ее результаты могут быть использованы для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач и найти продолжение в дальнейших исследованиях.

Апробация. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались в Российском университете дружбы народов на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А.Л. Скубачевского; на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве и их приложения» под руководством профессора В.В. Власова и доцента Н.А. Раутиан; на научно-исследовательском семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» под руководством Е.И. Моисеева и И.С. Ломова; на научном семинаре факультета математики и компьютерных наук СПбГУ «Индустриальная математика» под руководством С.Б. Тихомирова; в Свободном университете Берлина на семинаре по нелинейной динамике под руководством Б. Фидлера; на XXI Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2010); на XLVI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии

(Москва, 2010); на XXII Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2011); на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110 годовщине И.Г. Петровского (XXIII совместное Заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского) (Москва, 2011); на Шестой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2011); на Международной студенческой конференции «Science and progress» (Санкт-Петербург, 2011); на Воронежской зимней школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2012); на Международной конференции «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2012); на XXIII Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2012); на Четвертой Международной конференции молодых математиков по дифференциальным уравнениям и приложениям, посвященной Я.Б. Лопатинскому (Донецк, 2012); на Международной студенческой конференции «Science and progress» (Санкт-Петербург, 2012); на Четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2013); на Всероссийской научно-практической конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация» (Москва, 2013); на Международной студенческой конференции «Science and progress» (Санкт-Петербург, 2013); на Седьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2014); на Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы»(Москва, 2014); на XXVI Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2015); на XXXI Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на Международной конференции «Frontier in mathematics and computer science» (Ташкент, 2020).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 печатных изданиях, 7 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–7], 7 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций [8–14].

Личный вклад автора. Все результаты диссертации, содержащиеся в совместных работах, принадлежат лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 137 страниц с 6 рисунками. Список литературы содержит 80 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор работ, посвященных исследованию функционально-дифференциальных уравнений, формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1 состоит из 3 разделов и посвящена теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, когда искомая функция зависит от одной переменной. В **параграфе 1.1** описана постановка задачи, классификация краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, а также вводятся используемые функциональные пространства и определения решений. Кроме того, в этом разделе рассматриваются свойства разностных операторов, которые будут использованы в дальнейшем для формулировки результатов о разрешимости и исследования гладкости обобщенных решений краевых задач для линейных дифференциально-разностных уравнений. Основные результаты этой главы сформулированы и доказаны в **параграфах 1.2** и **1.3** — это **Теорема 1.5**, **Теорема 1.6**, **Теорема 1.9**–**Теорема 1.12**.

Задачей Дирихле (или *первой краевой задачей*) будем называть краевую задачу (1), (2). Краевую задачу (1), (3) будем называть *задачей Неймана* (или *второй краевой задачей*) для дифференциально-разностного уравнения, если $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, и *третьей краевой задачей*, если $\sigma_1 \neq 0$ или $\sigma_2 \neq 0$.

Задачи (1), (2) и (1), (3) рассматриваются на ограниченном интервале $(0, d)$. Пусть $d = N + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$, N — натуральное число. В случае нецелой длины интервала $d = N + \theta$, т.е. $0 < \theta < 1$, обозначим $Q_{1l} = (l-1, l-1+\theta)$ $(l = 1, \dots, N+1)$ и $Q_{2l} = (l-1+\theta, l)$ $(l = 1, \dots, N)$. Если $\theta = 1$, обозначим $Q_{1l} = (l-1, l)$ $(l = 1, \dots, N+1)$. Таким образом, мы получим два класса непересекающихся интервалов $\{Q_{1l}\}$ и $\{Q_{2l}\}$ в случае $0 < \theta < 1$, и один класс $\{Q_{1l}\}$, если $\theta = 1$. Очевидно, любые два интервала из одного класса могут быть получены друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что в определении разностного оператора $m = N$. Действительно, если $m < N$, можно считать, что $b_{ij}(x) \equiv 0$ при $|j| > m$. В случае, если $m > N$, оператор R_{iQ} с краевым условием (2) не зависит от коэффициентов $b_{ij}(x)$ при $|j| > N$.

Обозначим через $R_{i1} = R_{i1}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ матрицы порядка $(N+1)\times(N+1)$ с элементами

$$r^i_{jl}(x) = b_{i,l-j}(x + j - 1) \qquad (i = 0, 1, 2;\ j, l = 1, \dots, N+1).$$

Обозначим через $R_{i2} = R_{i2}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ матрицы порядка $N \times N$, полученные из R_{i1} вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Мы будем рассматривать матрицы $R_{i1}(x)$ при $x \in [0, \theta]$, а матрицы $R_{i2}(x)$ при $x \in [\theta, 1]$, если $\theta < 1$. В случае целой длины интервала при $\theta = 1$ матрицы $R_{i1}(x)$ и $R_{i2}(x)$ рассматриваются при $x \in [0, 1]$.

Через $W_2^k(0, d)$ обозначим пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, которые абсолютно непрерывны вместе со всеми своими производными вплоть до $(k-1)$-го порядка и имеют k-ую производную из $L_2(0, d)$. В пространстве $W_2^k(0, d)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(0,d)} = \sum_{j=0}^{k} \int\limits_0^d u^{(j)}(x)\bar{v}^{(j)}(x)dx.$$

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(0, d)$ замыкание пространства $\dot{C}^\infty(0, d)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в пространстве $W_2^k(0, d)$. Будем считать, что в уравнении (1) функция правой части $f \in L_2(0, d)$.

Функция $u \in \mathring{W}_2^1(0, d)$ называется *обобщенным решением* задачи Дирихле для дифференциально-разностного уравнения (1) с правой частью $f \in L_2(0, d)$, если для всех $w \in \mathring{W}_2^1(0, d)$ выполняется следующее интегральное тождество

$$\int\limits_0^d \{(R_{2Q}u)'(x)\bar{w}'(x) + (R_{1Q}u)'(x)\bar{w}(x) + (R_{0Q}u)(x)\bar{w}(x)\}dx = \int\limits_0^d f(x)\bar{w}(x)dx.$$

Функцию $u \in \{v \in W_2^1(0,d) : R_{2Q}v \in W_2^2(0,d), (-(R_{2Q}v)' + \sigma_1 v)\big|_{x=0} = ((R_{2Q}v)' + \sigma_2 v)\big|_{x=d} = 0\}$ назовем *обобщенным решением* задачи (1), (3) с правой частью $f \in L_2(0,d)$, если для всех $w \in W_2^1(0,d)$ выполняется интегральное тождество вида

$$\int\limits_0^d (R_{2Q}u)'(x)\bar{w}'(x)dx + \int\limits_0^d ((R_{1Q}u')(x) + (R_{0Q}u)(x))\,\bar{w}(x)dx = \\ = \int\limits_0^d f(x)\bar{w}(x)dx - \sigma_1(u\bar{w})(0) - \sigma_2(u\bar{w})(d).$$

Обозначим через $C[a,b]$ пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,$$

а через $\mathring{C}[a,b]$ — подпространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, обращающихся в нуль на концах отрезка.

Введем также пространство $C^k[a,b]$, как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|f(x)\|_{C^k[a,b]} = \max_{0\leqslant q\leqslant k}\sup_{x\in[a,b]}|f^{(q)}(x)|.$$

Функцию $u \in C^2[0,d] \cap \mathring{C}[0,d]$ назовем *классическим решением* первой краевой задачи (1), (2), если $R_{2Q}u \in C^2[0,d]$, $R_{1Q}u \in C^1[0,d]$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) для всех $x \in (0,d)$.

Функцию $u \in C^2[0,d]$ назовем *классическим решением* краевой задачи (1), (3) с правой частью $f \in C[0,d]$, если $R_{2Q}u \in C^2[0,d]$, $R_{1Q}u \in C^1[0,d]$ и функция u удовлетворяет уравнению (1) для всех $x \in (0,d)$ и краевым условиям (3) на границе.

Гладкость обобщенных решений первой, второй и третьей краевых задач для дифференциально-разностных уравнений может нарушаться даже для бесконечно гладких правых частей уравнения. Однако, следующий результат демонстрирует, что гладкость сохраняется на подынтервалах Q_{sl}.

Теорема 1.4. *Пусть* $\det R_{2s}(x) \neq 0$ *для* $x \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1,2$, *если* $\theta < 1$; $s = 1$, *если* $\theta = 1$). *Пусть* $f \in C[0,d]$, *а* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *или* (1), (3). *Тогда* $u \in C^2(\overline{Q}_{sl})$ ($l = 1,\dots,N(s)$; $s = 1,2$, *если* $\theta < 1$; $s = 1$, *если* $\theta = 1$).

В **параграфе 1.2** исследован вопрос о том, при каких условиях задача Дирихле для дифференциально-разностного уравнения (1), (2) будет иметь классическое решение при любой непрерывной функции правой части для целой и нецелой длины интервала $(0,d)$.

Теорема 1.5. *Пусть* $\theta < 1$. *Пусть* $\det R_{2s}(x) \neq 0$ $x \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1,2$). *В этом случае для любой* $f \in C[0,d]$ *каждое обобщенное решение задачи* (1), (2) *является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда* $b_{i,-l}(l) = 0$, $b_{i,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, $b'_{2,-l}(l) = 0$, $b'_{2,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$ ($i = 1,2;\ l = 1,\dots,N$).

Теорема 1.6. *Пусть* $\theta = 1$. *Пусть* $\det R_{21}(x) \neq 0$ *для* $x \in [0,1]$, $\det R_{22}(1) \neq 0$. *В этом случае для любой* $f \in C[0,d]$ *каждое обобщенное решение задачи* (1), (2) *является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда* $b_{i,-l}(l) = 0$, $b_{i,N+1-l}(l) = 0$, $b'_{2,-l}(l) = 0$, $b'_{2,N+1-l}(l) = 0$ $(i = 1,2; l = 1,\dots,N)$.

Параграф 1.2.1 посвящен постановке первой краевой задачи в дивергентном виде, сформулирована теорема о существовании классического решения данной задачи, указана взаимосвязь с постановкой в недивергентном виде.

Параграф 1.3 содержит условия существования классического решения в предположении, что рассматриваемая вторая (третья) краевая задача для дифференциально-разностного уравнения имеет обобщенное решение при непрерывной правой части. Кроме того, показано, что, в отличие от первой краевой задачи, необходимое условие (**Теорема 1.10** для целой длины интервала и **Теорема 1.12** для нецелой длины интервала) существования классического решения не совпадает с достаточным (**Теорема 1.9** и **Теорема 1.11** для целой и нецелой длины интервала, соответственно). Отдельно рассмотрены случаи целой и нецелой длины интервала (см. **параграф 1.3.1** и **параграф 1.3.2**).

Теорема 1.9. *Пусть* $\theta = 1$. *Пусть* $\det R_{21}(x) \neq 0$ *для всех* $x \in [0,1]$ *и* $\det R_{22}(1) \neq 0$. *Пусть* $u(x)$ *— обобщенное решение задачи* (1), (3) *и выполняются соотношения* $b^{(i)}_{2,-l}(l) = 0$, $b^{(i)}_{2,N+1-l}(l) = 0$, $b^{(k)}_{1,-l}(l) = 0$, $b^{(k)}_{1,N+1-l}(l) = 0$, $b_{0,-l}(l) = 0$, $b_{0,N+1-l}(l) = 0$ $(i = 0,1,2;\ k = 0,1;\ l = 1,\dots,N)$. *Тогда для любой* $f \in C[0,d]$ *функция* $u(x)$ *— классическое решение задачи* (1), (3).

Теорема 1.10. *Пусть* $\theta = 1$. *Пусть* $\det R_{21}(x) \neq 0$ *для всех* $x \in [0,1]$ *и* $\det R_{22}(1) \neq 0$. *Пусть одно из условий* $b_{2,-l}(l) = 0$, $b_{2,N+1-l}(l) = 0$, $b'_{2,-l}(l) = 0$, $b'_{2,N+1-l}(l) = 0$ $(l = 1,\dots,N)$ *не выполнено. Тогда существует такая правая часть* $f \in C[0,d]$, *что можно найти обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1), (3), *которое не является классическим.*

Теорема 1.11. *Пусть* $\theta < 1$. *Пусть* $\det R_{2s}(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \overline{Q}_{s1}$ $(s = 1,2)$. *Пусть* $u(x)$ *— обобщенное решение задачи* (1), (3) *и выполняются соотношения* $b^{(i)}_{2,-l}(l) = 0$, $b^{(i)}_{2,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, $b^{(k)}_{1,-l}(l) = 0$, $b^{(k)}_{1,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, $b_{0,-l}(l) = 0$, $b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$ $(i = 0,1,2; k = 0,1;\ l = 1,\dots,N)$. *Тогда для любой* $f \in C[0,d]$ *функция* $u(x)$ *является классическим решением задачи* (1), (3).

Теорема 1.12. *Пусть* $\theta < 1$. *Пусть* $\det R_{2s}(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \overline{Q}_{s1}$ $(s = 1,2)$. *Пусть одно из условий* $b^{(i)}_{2,-l}(l) = 0$, $b^{(i)}_{2,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$ $(i = 0,1;\ l = 1,\dots,N)$ *не выполнено. Тогда существует такая правая часть* $f \in C[0,d]$, *что можно найти обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (1), (3), *которое не является классическим.*

Глава 2 посвящена исследованию гладкости обобщенных решений первой краевой задачи (4), (5) для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в пространствах Гельдера. Глава состоит из 4 параграфов. В **параграфе 2.1** приводятся некоторые геометрические построения, дается способ разбиения области на подобласти Q_{sl}, а также вводится множество $\mathcal{K}$ «особых» точек, которое будет использоваться при доказательстве теорем о гладкости обобщенных решений. Рассматриваются свойства разностных операторов в пространстве $L_2(Q)$ в терминах конечного числа матриц, элементами которых являются коэффициенты разностных операторов и нули. Вводятся определения сильно эллиптического дифференциально-разностного оператора, обобщенного и классического решений, приведены теоремы о разрешимости задачи Дирихле. Основные результаты этой главы сформулированы и доказаны в **параграфах 2.2** и **2.3** — это **Теорема 2.5** и **Теорема 2.7.**

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что для области Q, в которой рассматривается задача (4), (5), выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область с кусочно-гладкой границей* $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, N_1)$, *где* X_i — *открытые связные в топологии* ∂Q $(n-1)$-*мерные многообразия класса* C^∞, $n \geqslant 2$. *При этом в окрестности каждой точки* $x^0 \in K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$ *область* Q *диффеоморфна* n-*мерному двугранному углу, если* $n \geqslant 3$, *или плоскому углу, если* $n = 2$.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)$.

Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1, 2, \ldots)$ назовем *разбиением области* Q.

Свойства разностных операторов R_{ij}, определенных формулой (7), тесно связаны с геометрической структурой разбиения $\mathcal{R}$.

Заметим, что множество $\mathcal{R}$ не более, чем счетно.

Лемма 2.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \left(\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h) \right) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 2.2.

1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых* Q_{r_1} *и* $h \in M$ *либо найдется такое* Q_{r_2}, *что* $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, *либо* $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \ldots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Введем множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}.$$

Будем считать, что выполнено

Условие 2.2.

$$\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0, \quad K \subset \mathcal{K}.$$

где $\mu_{n-1}(\cdot)$ — *мера Лебега на* $(n-1)$-*мерной поверхности* ∂Q.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q)$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q)$. В пространстве $W_2^k(Q)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u,v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Обозначим $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в Q функций $C_0^\infty(Q)$ в пространстве $W_2^k(Q)$. В случае выполнения Условия 2.1 $\mathring{W}_2^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u|_{\partial Q \setminus K} = 0\}$, где $K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$.

Обозначим $W_{2,loc}^k(Q)$ $(k > 0)$ пространство комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q')$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q')$, где Q' — произвольная внутренняя подобласть области Q, т. е. $Q' \Subset Q$.

Пусть $\alpha = k + \sigma$, где $k \geqslant 0$ целое, $0 < \sigma < 1$. Обозначим через $C^\alpha(\overline{Q})$ пространство Гельдера непрерывных функций в $\overline{Q}$, имеющих непрерывные производные в $\overline{Q}$ вплоть до k-го порядка, с конечной нормой

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{Q})} = \|u\|_{C^k(\overline{Q})} + \max_{|\gamma|=k} \sup_{x\neq y} |x-y|^{-\sigma} |D^\gamma u(x) - D^\gamma u(y)|.$$

Дифференциально-разностное уравнение (4) называется *сильно эллиптическим* в $\overline{Q}$, если для любой $u \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$\operatorname{Re}\left(-\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i}, u \right)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}, \tag{8}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ не зависят от u.

Всюду далее мы будем считать, что дифференциально-разностное уравнение (4) является сильно эллиптическим. Краевую задачу (4), (5) будем называть *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения. Краевую задачу (4),(6) будем называть *второй краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, если $\sigma(x) \equiv 0$ $(x \in \partial Q)$, и *третьей краевой задачей*, если $\sigma(x) \not\equiv 0$ $(x \in \partial Q)$.

Функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи (4), (5), если для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}.$$

В **параграфе 2.2** рассмотрен частный случай краевой задачи (4), (5), когда дифференциально-разностный оператор равен произведению разностного оператора и сильно эллиптического дифференциального оператора второго порядка

$$\mathcal{L} R_Q u = f(x) \quad (x \in Q), \tag{9}$$

где $\mathcal{L} = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ — дифференциальный оператор, $b_{ij} = b_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции $(i,j = 1,\dots,n)$, $b_{ij}(x) = b_{ij}(x+h)$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $h \in M$, а разностный оператор имеет вид $Ru(x) = \sum\limits_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h)$, $a_h \in \mathbb{C}$.

Для задачи (9), (5) в пространствах Гелдера доказана теорема о гладкости решений в подобластях за исключением окрестности точек $\mathcal{K}$.

Теорема 2.5. *Пусть уравнение* (9) *сильно эллиптическое. Пусть, кроме того, функция правой части $f \in C^\sigma(\overline{Q})$, а $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи* (9), (5). *Тогда $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q}_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$* $(s = 1,2,\dots; l = 1,\dots,N(s))$.

В **параграфе 2.3** установлены необходимые и достаточные условия гладкости обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений на границе соседних подобластей в пространстве Гельдера.

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s)\times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x+h_{sk}), & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

Обозначим через J_0 число связных компонентов открытого множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$, попавших внутрь области Q под действием сдвигов h. Введем матрицы порядка $J_0 \times J_0$, полученные из матриц $R_{ijs}(x)$ $(s = p,q)$ вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов равны. Обозначим эту матрицу порядка $J_0 \times J_0$ через A'_{ijp}, а через A''_{ijs} обозначим матрицы порядка $J_0 \times (N(s) - J_0)$, полученные из матрицы $R_{ijs}(x)$ вычеркиванием первых J_0 столбцов и последних $N(s) - J_0$ строк $(s = p,q)$.

Обозначим через $\mathbf{A}_{pl}(x)$ матрицу порядка $J_0 \times (J_0 - 1)$, полученную из $A'_{nnp}(x)$ вычеркиванием l-го столбца и введем матрицы S_{js} $(j = 0,...,n)$ по формулам

$$S_{0s}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)} [(A'_{inp})_{x_i} (A'_{nnp})^{-1} A''_{nns} - (A''_{ins})_{x_i}] + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} [A'_{nip}((A'_{nnp})^{-1} A''_{nns})_{x_i} + A'_{inp}((A'_{nnp})^{-1} A''_{nns})_{x_i}],$$

$$S_{js}(x) = (-1)^{\mu(s)} [A'_{njp}(A'_{nnp})^{-1} A''_{nns} + A'_{jnp}(A'_{nnp})^{-1} A''_{nns} - \\ - A''_{njs} - A''_{jns}] \quad (j = 1,\dots,n-1),$$

$$S_{ns}(x) = (-1)^{\mu(s)+1} A''_{nns},$$

где $\mu(p) = 2$, $\mu(q) = 1$.

Условие 2.3. *Пусть $f \in C^\sigma(\overline{Q})$, и пусть $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ — обобщенное решение задачи* (4), (5). *Тогда $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q}_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$* $(s = 1,2,\dots; l = 1,\dots,N(s))$.

Теорема 2.6. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая Условию* 2.1. *Предположим также, что дифференциально-разностное уравнение* (4) *сильно эллиптическое, и при этом выполняются Условия* 2.2 *и* 2.3.

Тогда для заданного l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ обобщенное решение $u(x)$ краевой задачи (4), (5) *принадлежит $C^{2+\sigma}(\overline{B_a(y^l)})$ для любого $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \gamma$ любой столбец матриц $S_{js}(x)$ $(s = p, q; j = 0, \dots, n)$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\boldsymbol{A}_{pl}(x)$.*

В конце **параграфа 2.3** дается пример уравнения, иллюстрирующий полученные результаты.

Параграф 2.4 посвящен частному случаю дифференциально-разностного уравнения, для которого установлена разрешимость задачи Дирихле в пространстве Гельдера.

Глава 3 состоит из 3 параграфов. В этой главе исследуется гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения второго порядка. В **параграфе 3.1** приведена постановка задачи, рассмотрены определения и вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем о гладкости. Решение задачи вводится посредством определенной на пространстве $W_2^1(Q)$ полуторалинейной формы. Относительно структуры оператора делается предположение, обеспечивающее коэрцитивность этой формы.

Введем полуторалинейную форму $a_R[u, v]$ в $L_2(Q)$ с областью определения $D(a_R) = W_2^1(Q)$ по формуле

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma u, v)_{L_2(\partial Q)}.$$

Функцию $u(x)$ будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (4),(6), если $u \in W_2^1(Q)$ и для всех $v \in W_2^1(Q)$ справедливо равенство

$$a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(Q)}.$$

Для второй (третьей) краевой задачи в **параграфе 3.2** доказана принадлежность обобщенного решения пространствам $W_2^{k+2}(Q_{sl} \backslash \mathcal{K}^\varepsilon)$ в предположении, что правая часть уравнения $f \in W_2^k(Q)$ $(k \geqslant 0)$. Используя теоремы вложения, можно получить принадлежность обобщенного решения краевой задачи (4),(6) пространству Гельдера с соответствующим показателем гладкости.

Теорема 3.5. *Пусть уравнения* (4) *сильно эллиптическое. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи* (4),(6), *$\sigma \in C^{k+1}(\partial Q)$ и $f \in W_2^k(Q)$ $(k \geqslant 0)$. Тогда обобщенное решение $u \in W_2^{k+2}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2 \dots; l = 1, \dots, N(s))$.*

В **параграфе 3.3** показано, что нормальная производная обобщенного решения может иметь разрывы на границе соседних подобластей, ввиду чего для сохранения гладкости решения требуются дополнительные условия на коэффициенты разностных операторов. Получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости решений на границе подобластей в пространстве Гельдера в терминах равенства нулю определителей некотрых матриц, элементами которых являются коэффициенты разностных операторов и нули. Используемые матрицы имеют довольно громоздкий вид. Подробный вывод приведен в диссертации: соотношения (3.36)–(3.60).

Условие 3.2. *Пусть $f \in C^\alpha(\overline{Q})$. Пусть $u(x) \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение краевой задачи* (4),(6). *Тогда $u \in C^{2+\alpha}(\overline{Q}_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2, ...; l = 1, ..., N(s))$.*

Теорема 3.6. *Пусть уравнение* (4) *сильно эллиптическое и выполнено Условие 3.2. Тогда для заданного* l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (4), (6) *принадлежит* $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ *для любой* $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ *в том и только в том случае, когда*

$$\det \Lambda^j_{lk} = 0 \quad (j = 1, ..., n; k = 1, ..., m(j)), \tag{10}$$

$$\det \mathcal{R}_{lk} = 0 \quad (k = 1, ..., N(p) + N(q) - 2J_0), \tag{11}$$

$$\det \alpha^{ij}_{lk} = 0 \quad (i = 1, ..., n-1; j = 1, ..., n; k = 1, ..., m(j)), \tag{12}$$

$$\det \beta^i_{lk} = 0 \quad (i = 1, ..., n-1; k = 1, ..., N(p) + N(q) - 2J_0), \tag{13}$$

$$\det \psi_{lk} = 0 \quad (k = 1, ..., N(q)), \tag{14}$$

$$\det \theta^i_{lk} = 0 \quad (i = 1, ..., n-1; k = J_0 + 1, ..., N(p)), \tag{15}$$

где $m(n) = J_0$, $m(j) = N(p) + N(q) - J_0$ $(j = 1, ..., n-1)$.

В конце **параграфа 3.3** приведены примеры, в одном из которых условия гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей в шкале пространств Гельдера выполняются, если решение сохраняет гладкость на этой границе в пространстве Соболева. В другом примере рассмотрен случай, когда выполнения условий, гарантирующих гладкость в пространствах Соболева, недостаточно для гладкости обобщенного решения в $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Неверова Д.А., Скубачевский А.Л. Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, *Доклады академии наук. Серия "Математика"*, 2012.— *447*, №2.— С. 143–146.

[2] Неверова Д.А., Скубачевский А.Л. Классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, *Дифференциальные уравнения*, 2013.— *49*, №3.— С. 300–309.

[3] Неверова Д.А., Скубачевский А.Л. О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, *Математические заметки*, 2013.— *94*, №5.— С. 702–719.

[4] Neverova D. A. Generalized and classical solutions to the Second and third boundary value problem for difference-differential equations, *Funct. Differ. Equ.*, 2014.— *21*.— P. 47–65.

[5] Neverova D. A., Skubachevskii A. L. On the smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains, *Russ. J. Math. Phys.*, 2015.— *22*, №4.— P. 504–517.

[6] Неверова Д. А. Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2019.— *65*, №4.— С. 655–671.

[7] Неверова Д. А. Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей.// *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2020.— *66*, №2.— С.272–291.

[8] Neverova D.A. On solvability of some class of boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations// Abstracts of the 6th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, August 14-21, 2011, p. 48-49.

[9] Неверова Д.А. Разрешимость в пространствах Гельдера некоторого класса краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, *Воронежская зимняя школа С.Г. Крейна - 2012: материалы международной конференции*, 2012.— с. 158–161.

[10] Д.А. Неверова, Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений // Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум (КРОМШ-2012). Двадцать третья ежегодная международная конференция. Тезисы докладов, Изд-во КНЦ НАНУ, Симферополь, 2012, с.44-45.

[11] Neverova D.A. "Generalized and classical solutions of boundary value problem for differential-difference equation (variable coefficients) "Conference abstracts . International student conference "Science and Progress". Издательство SOLO, Санкт-Петербург, 2012, с. 61.

[12] Неверова Д.А. «Классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений в недивергентном виде». Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: труды Всероссийской научно-практической конференции. Москва, РУДН, 23-26 апреля 2013 г. - М.: РУДН, 2013. С. 6-7.

[13] D. Neverova "Regularity of Solutions to the Second (Third) Boundary-Value Problem for Differential-Difference Equations" //Abstracts of the 7th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, August 22-29 and International Workshop "Spatio-temporal dynamical systems" Moscow, Russia, August 26–28, 2014, p. 88.

[14] Неверова Д.А. «Гладкость обобщенных решений краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений» // Международная конференция «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2015). Сборник тезисов, Изд-во ООО Форма, Симферополь, 2015, с.55.

Д. А. Неверова

Гладкость решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений

Аннотация

В диссертации рассматриваются уравнения второго порядка, содержащие, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига. Основное место уделяется изучению гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений в шкалах пространств непрерывно-дифференцируемых функций и пространств Гельдера. Для случая, когда искомая функция зависит от одной переменной, исследован вопрос о том, при каких условиях задача Дирихле, задача Неймана или третья краевая задача для дифференциально-разностного уравнения будет иметь классическое решение для любых непрерывных правых частей. Кроме того, изучена гладкость обобщенных решений первой, второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в пространствах Гельдера. Получены условия на коэффициенты разностных операторов, гарантирующие гладкость решений в некоторых подобластях, а также на границе этих подобластей.

D. A. Neverova

Smoothness of solutions to boundary value problem of functional-differential equations

Abstract

In this thesis differential-difference equations of the second order are studied. The main focus is on the studying of smoothness of solutions to boundary-value problems for differential-difference equations in the spaces of continuously differentiable functions and Hölder spaces. In the one-dimensional case, conditions, for which the Dirichlet problem, the Neumann problem, or the third boundary value-problem for a differential-difference equation will have a classical solution for any continuous right-hand side, were obtained. Moreover, the smoothness of generalized solutions of the first, second, and third boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations in Hölder spaces is studied. Conditions on the coefficients of difference operators that guarantee the smoothness of solutions in some subdomains, as well as on the boundary of these subdomains were obtained.