На правах рукописи

Артемов Анатолий Анатольевич

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛОИДОВ

01.01.01 – Математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 1996 год

Работа выполнена на кафедре математического анализа Тамбовского государственного университета им. Г.Р.Державина

Научный руководитель
доктор физико-математических наук профессор В.Ф.МОЛЧАНОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,профессор Д.П.ЖЕЛОБЕНКО
доктор физико-математических наук, профессор В.-Б.К.РОГОВ

Ведущая организация:
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится "21" марта 1996 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 053.22.23 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117923 г.Москва, ул.Орджоникидзе, 3, ауд. 485.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу:117198 г.Москва, ул.Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан "13" февраля 1996 года

Ученый секретарь
диссертационного совета М.В.ДРАГНЕВ
кандидат физико-математических наук, доцент

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Изучение преобразования Пуассона – это одна из основных задач гармонического анализа на однородных пространствах.

Классическое преобразование Пуассона восстанавливает функцию, гармоническую в круге, по ее значениям на границе, т.е. дает решение задачи Дирихле для круга.

Это преобразование было обобщено сначала на классические ограниченные области (Хуа Ло-кен), затем на римановы симметрические пространства G/K, где G – некомпактная полупростая группа Ли, K – ее максимальная компактная подгруппа (Г.Фюрстенберг, А.Кораньи, С.Хелгасон и др.). При этом рассматривались не только гармонические функции, но и функции, которые являются собственными для алгебры всех инвариантных дифференциальных операторов.

Основные задачи гармонического анализа на однородном пространстве G/H, где G – группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа, могут быть сформулированы следующим образом (см.,например, [1]). Пусть $\mathbb{D}(G/H)$ – алгебра всех дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G. Тогда требуется:

а) разложить "любую" функцию на G/H по общим собственным функциям алгебры $\mathbb{D}(G/H)$;

б) описать подпространства, которые состоят из функций, собственных для каждого оператора из $\mathbb{D}(G/H)$;

в) для всякого собственного подпространства алгебры $\mathbb{D}(G/H)$ изучить естественное представление группы G в этом подпространстве, в частности, найти, когда оно неприводимо и какие представления группы G можно получить таким образом.

1.Helgason S.Groups and geometric analysis.–New York,etc.: Acad.Press.–1984. (Пер. на рус.яз.: Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. –М.: Мир, 1987.–735 с.).

Для *римановых* симметрических пространств G/K эта программа в основном выполнена, см., например, [1] и ссылки там. В частности, преобразование Пуассона было использовано М. Кашиварой и др. при ответе на вопрос б): ими было показано, что на римановом симметрическом пространстве G/K всякая функция класса C^∞ из собственного подпространства для $\mathbb{D}(G/K)$ есть преобразование Пуассона некоторой гиперфункции на границе пространства G/K.

В настоящее время актуальным является изучение преобразования Пуассона *для более широкого класса однородных пространств* G/H, а именно, для полупростых симметрических пространств G/H (в другой терминологии – аффинных (или псевдоримановых) симметрических пространств). Здесь подруппа H может быть уже *некомпактной и тогда пространство* G/H *– не римановым.* Переход к некомпактным H приводит к резкому увеличению трудностей.

Как показало развитие гармонического анализа на однородных пространствах, преобразование Пуассона оказывается одним из основных и естественных инструментов этой теории. Оно теснейшим образом связано с векторами (вообще говоря обобщенными) в пространствах представлений, инвариантными относительно H. Роль H-инвариантов в определении двух важнейших преобразований в гармоническом анализе – преобразования Фурье и преобразования Пуассона – была проявлена в работах В.Ф. Молчанова, см., например, [2], [3]. *К настоящему времени основным общим результатом,* относящимся к преобразованию Пуассона для полупростых симметрических пространств G/H, остается анонсированный в 1979 году результат Т.Осимы, который состоит в том, что для гомоморфизма $\chi : \mathbb{D}(G/H) \to \mathbb{C}$ *общего положения* пространство собственных гиперфункций на G/H (а, следовательно, и C^∞ – функций на G/H), отвечающих этому гомоморфизму, состоит из преобразований Пуассона гиперфункций на границе пространства G/H.

Вернемся к задаче Дирихле. В более общем случае риманова симметрического пространства G/K имеет место следующее соотношение: *если функция f на G/K есть преобразование Пуассона* функции φ на границе, то φ есть коэффициент в главном члене асимптотики f на бесконечности. Возникает естественная задача

2.Молчанов В.Ф. *Сферические функции на гиперболоидах*//Мат.сб.– 1976. -99,N2.-С.139–161.

3.Молчанов В.Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах// Итоги науки и техн. Сер.Совр.пробл.матем. Фундам.напр./ВИНИТИ.-1990.-59. -С.5–144.

для пространств G/H: найти связь с φ не только главного члена асимптотики, но и всех членов асимптотического разложения, стало быть, описать *всю* асимптотику (не только ее главный член) преобразования Пуассона на бесконечности. Для пространств G/K близкую задачу рассматривал Хариш-Чандра: он изучал асимптотическое разложение матричных элементов группы G в базисе из K-финитных векторов. Развивая методы Хариш-Чандры, Э.ван ден Бан и Г.Шлихткрулль [4], [5] изучали асимптотические разложения для произвольных собственных функций на G/K. В частности, их результат позволяет охарактеризовать пространство собственных функций из $C^\infty(G/K)$, которые получаются преобразованием Пуассона функций класса C^∞ на границе (надо наложить некоторое условие на рост на бесконечности).

Для полупростых симметрических пространств G/H асимптотическое разложение собственных функций изучалось в работах Э.ван ден Бана и Г.Шлихткрулля [6], [7]. Их разложение есть ряд по экспонентам $\exp\nu(X)$, где X располагается в открытой камере Вейля в картановском подпространстве $\mathfrak{a}$ пространства G/H, а ν пробегает некоторое дискретное бесконечное множество в дуальном пространстве $\mathfrak{a}_c^*$. Заметим, однако, что они ограничились только K-финитными функциями, что значительно упрощает дело.

Цель работы. В настоящей работе мы исследуем асимптотическое разложение преобразования Пуассона на бесконечности для одного важного подкласса класса полупростых симметрических пространств G/H с некомпактной H, а именно, для вещественных гиперболических пространств (гиперболоидов) $SO_0(p,q)/SO_0(p,q-1)$. Мы рассматриваем произвольные–не только K-финитные – функции и рассматриваем разложения в ряды не только по экспонентам, но и по степеням некоторых других функций.

4.Ban E.van den, Schlichtkrull H. Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces//J.reine angew.Math.–1987.–**380**.–P. 108–165.

5.Ban E.van den, Schlichtkrull H. Local boundary data of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space//Invert.math.–1989.–**98**. –P.639–657.

6.Ban E.van den, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces//Proc.Kon.Nederl.Akad.Wet.–1987.– **90**.–P.225–249.

7.Ban E.van den, H.Schlichtkrull H. Asymptotic expansions on symmetric spaces //Harmonic analysis on reductive groups. Progress in math.– Boston:Birkhäuser.–1991.–**101**.–P.79–87.

Методы исследования. Мы используем как достаточно традиционные методы (аппарат теории представлений, ограничение на максимальную компактную подгруппу, разложение в ряды Фурье, действие некоторых операторов Ли, инструментарий спецфункций, ...), так и некоторые новые методы, (барьерные функции, сферические функции, H-инварианты, метод сдвига по параметру, оценивание преобразования Пуассона базисных функций, спектральный анализ радиальной части оператора Лапласа-Бельтрами,...).

Научная новизна. В диссертации впервые:

а) для K-финитных функций $\varphi(s)$ на границе S гиперболоида X получены разложения преобразования Пуассона $(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(t,s)$ в виде абсолютно сходящихся степенных рядов по степеням трех функций: $1-\operatorname{th}t$, $(\operatorname{ch}t)^{-2}$, $-e^{-2t}$ (t,s – полярные координаты на X, см. ниже);

б) для *произвольных* функций $\varphi(s)$ на границе S гиперболоида X получены разложения преобразования Пуассона $(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(t,s)$ в виде асимптотических степенных рядов по степеням трех функций: $1-\operatorname{th}t, (\operatorname{ch}t)^{-2}$, $-e^{-2t}$;

в) получено явное описание операторов в функциях на границе S, которые дают коэффициенты в разложениях, указанных в пунктах а) и б);

г) для случая $p>1$ вычислены явно собственные числа операторов, указанных в пункте в);

д) для случая $p=1$ (для однополостного гиперболоида) дано полное исследование приводимости и неприводимости собственных для оператора Лапласа-Бельтрами подпространств функций на гиперболоиде (в частности, в приводимом случае дано описание структуры инвариантных подпространств);

е) для случая $p=1$ дано описание ядра и замыкания образа преобразования Пуассона

(Замечание: для случая $p>1$ результаты, соответствующие пунктам д) и е), были получены И.И. Шитиковым [8]);

ж) доказана непрерывность преобразования Пуассона (доказательство имеет весьма общий характер и справедливо в значительно более широкой ситуации).

8.Шитиков И.И. Инвариантные подпространства функций и преобразование Пуассона для гиперболоидов//Сиб.мат.ж.-1988.-**29**,N3. –С.175–182.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для построения преобразования Пуассона и исследования асимптотики на бесконечности этого преобразования на других однородных пространствах, в различных задачах гармонического анализа и теоретической физики. Метод сдвига по параметру, примененный в диссертации, может быть использован для доказательства разложений и различных оценок в значительно более широкой ситуации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на

– XVIII Международном коллоквиуме "Теоретико-групповые методы в физике", Москва, 1990;

– IV рабочем совещании "Рассеяние, реакции, переходы в квантовых системах и методы симметрии", Обнинск, 1990;

– республиканской школе молодых ученых "Математические методы в естествознании: теоретические и прикладные аспекты", Алушта, 1990;

– V рабочем совещании "Методы симметрии в физике", Обнинск, 1991;

– XVI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах, Н.Новгород, 1991;

– Европейской Школе по теории групп, Тренто (Италия), 1993;

– Международной конференции "Классическая и квантовая геометрия однородных пространств", Москва, 1994;

– Международной конференции "Группы в анализе и геометрии", Омск, 1995;

– Семинаре по функциональному анализу профессора В.Ф.Молчанова, ТГУ, г.Тамбов;

– Научных конференциях преподавателей и сотрудников Тамбовского государственного désинститута–университета;

– Научном семинаре по теории представлений групп профессора Д.П.Желобенко, РУДН, г.Москва.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приведен в конце реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 18 параграфов, объединенных в три главы: первая: случай $p = 1$, $q = 2$; вторая: случай $p = 1$, $q > 2$; третья: случай $p > 1$, $q > 1$.

Список литературы, включенной в диссертацию, содержит 48 наименований.

Полный объем диссертации (с оглавлением) 104 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Приведем общую конструкцию преобразования Пуассона, а также и преобразования Фурье, для однородного пространства G/H, см.[3]. Чтобы проявить алгебраическую сторону, будем для простоты считать, что группы (и их однородные пространства) конечны.

Пусть G – конечная группа, H – ее подгруппа, $X = G/H$ – однородное пространство правых классов смежности $x = Hg$, пусть $x^0 = He$ - базисная точка в X, пусть $L(X)$ – пространство комплекснозначных функций на X со скалярным произведением $(f_1, f_2) = \sum_x f_1(x)\,\overline{f_2(x)}$, пусть U – квазирегулярное представление группы G в $L(X)$: $\big(U(g)f\big)(x) = f(xg)$. Пусть T - неприводимое унитарное представление группы G в пространстве V со скалярным произведением (v_1, v_2). Пусть V^H – пространство неподвижных для H векторов в V. Предположим, что $V^H \neq 0$. По двойственности Фробениуса, это необходимо и достаточно для того, чтобы T входило в разложение U на неприводимые представления. Кратность вхождения равна $\mathrm{dim} V^H$. Возьмем какой-нибудь вектор $\theta \in V^H$, $\theta \neq 0$. Функция $g \mapsto T(g^{-1})\theta$ на G со значениями в V постоянна на правых классах смежности G по H, поэтому она определяет функцию $a(x)$ на X со значениями в V: $a(x) = T(g^{-1})\theta$, $x = x^0 g$. Сопоставим H-инварианту θ два отображения: преобразование Пуассона $P : V \to L(X)$ и преобразование Фурье $F : L(X) \to V$, определяемые следующим образом:

$$\big(Pv\big)(x) = \big(v, a(x)\big) = \big(v, T(g^{-1})\theta\big), \tag{1}$$

$$Ff = \sum_x f(x)\, a(x) = \sum_x f(x)\, T(g^{-1})\theta.$$

Они сопряжены друг другу: $\big(Pv, f\big) = \big(v, Ff\big)$, и коммутируют с действием группы G (сплетают представления U и T):

$$U(g)P = PT(g), \qquad FU(g) = T(g)F.$$

Преобразование Пуассона P дает эквивариантное вложение пространства V в пространство $L(X)$. Образ $\Phi = P\theta$ H-инварианта θ называется сферической функцией.

Перейдем теперь к содержанию диссертации. Группа G есть псевдоортогональная группа $SO_0(p,q)$, $p+q=n$, $p \geq 1$, $q \geq 2$, действующая естественным образом в $\mathbb{R}^n$ справа и сохраняющая билинейную форму $[x,y] = -x_1y_1 - ... - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + ... + x_ny_n$. Подгруппа H есть подгруппа, сохраняющая последнюю координату, она изоморфна $SO_0(p,q-1)$. Однородное пространство $X = G/H$ есть гиперболоид X : $[x,x] = 1$ в $\mathbb{R}^n$. Алгебра $\mathbb{D}(G/H)$ в этом случае порождается одним оператором – а именно, оператором Лапласа-Бельтрами Δ.

Сначала мы приводим описание представлений группы G, связанных с конусом, они реализуются в функциях на компактном многообразии S – границе гиперболоида X, а также приводим описание H-инвариантных векторов $\theta_{\sigma,\varepsilon}$ ($\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,1$) в этих представлениях. Они оказываются обобщенными функциями. Этот материал взят в основном из работ В.Ф. Молчанова [2], [9], [10]. Новыми являются формулы для собственных чисел операторов $A^{(r)}_{\sigma,\varepsilon}$ в случае $p > 1$:

$$\left(A^{(r)}_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(s) = \int_S \left(-[s,\widetilde{s}]\right)^{\sigma^*,\varepsilon} < u,\widetilde{u} >^r \varphi(\widetilde{s})\, d\widetilde{s},$$

где $<\ ,\ >$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^p$, связь между u и s см. ниже.

Затем мы даем описание пространств $\mathcal{H}_{\sigma,\varepsilon} \subset C^\infty(X)$, собственных для оператора Δ с собственным числом $\sigma\sigma^*$ ($\sigma^* = 2-n-\sigma$) и четности $\varepsilon = 0,1$. Мы выясняем, когда эти пространства неприводимы, и указываем структуру инвариантных подпространств в случае, когда они приводимы. Этот материал повторяет в основном работу И.И. Шитикова [8] для $p > 1$ и является новым для $p = 1$.

9.Молчанов В.Ф. Разложение тензорного квадрата представления дополнительной серии унимодулярной группы вещественных матриц второго порядка //Сиб. мат. ж.–1977.–**18**,N1.–С.174–188.

10.Молчанов В.Ф.Формула Планшереля для псевдоримановых симметрических пространств универсальной накрывающей группы $SL(2,\mathbb{R})$ //Сиб.мат.ж. –1984. –**25**,N6.–С.89–105.

Далее мы определяем преобразование Пуассона, отвечающее H-инварианту θ. Мы будем работать с преобразованием Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon}$, отвечающим H-инварианту $\theta_{\sigma,\varepsilon}$ общего положения ($\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$), поэтому мы слегка изменяем определение по сравнению с (1)– для того, чтобы получить аналитическую зависимость от σ. (Преобразование Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon}$ появилось впервые в работе В. Россманна [11], однако, роль H-инвариантов там не была замечена).

Введем на X полярные координаты t, s, где $t \in \mathbb{R}$, $s \in S$, – в соответствии с разложением Картана-Берже, $G = HAK$, где K – максимальная компактная подгруппа в G (она изоморфна $SO(p) \times SO(q)$), A – подгруппа гиперболических вращений a_t в плоскости x_1, x_n, так что паре (t, s), где $s = (u, v), u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$, $|u| = 1$, $|v| = 1$, отвечает точка $x = (\mathrm{sh}t \cdot u, \mathrm{ch}t \cdot v)$. Основной результат работы заключается в следующем. Пусть φ – функция на S класса C^∞ и четности ε. Обозначим через ψ одну из трех "базисных" функций

$$1 - \mathrm{th}t\ , \quad (\mathrm{ch}t)^{-2}\ , \quad -e^{-2t} \tag{2}$$

от t. Тогда для σ общего положения ($\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$) имеет место разложение

$$\Big(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi\Big)(t,s) = (\mathrm{ch}t)^{\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(C_{\sigma,\varepsilon,r}\varphi\Big)(s)\ \psi^r + $$

$$+(\mathrm{ch}t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(D_{\sigma,\varepsilon,r}\varphi\Big)(s)\ \psi^r, \tag{3}$$

где $C_{\sigma,\varepsilon,r}$ и $D_{\sigma,\varepsilon,r}$ – некоторые операторы в пространстве $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ функций φ класса C^∞ и четности ε. Все эти операторы явно вычислены для каждой из трех функций (2). Замечательным фактом оказывается то, что операторы $C_{\sigma,\varepsilon,r}$ – это *интегральные* операторы, а $D_{\sigma,\varepsilon,r}$ – это *дифференциальные* операторы. В частности, при $r = 0$ оператор C только множителем отличается от сплетающего оператора $A_{\sigma,\varepsilon}$, а оператор D – только множителем (обозначим его $y_0(\sigma, \varepsilon)$) от тождественного оператора.

В частности, мы можем написать решение "задачи Дирихле" на гиперболоиде X. Задача состоит в следующем:

$$\Delta f = \sigma\sigma^*\ f, \qquad \lim_{t\to+\infty} (\mathrm{ch}t)^{-\sigma}\ f(t,s) = \varphi(s),$$

11.Rossmann W. Analysis on real hyperbolic spaces//J.Funct.Anal. –1978.– 30,N3.–P.448–477.

где $\mathrm{Re}\sigma > \frac{2-n}{2}$, σ – общего положения, φ – функция четности ε. Ее решение дается при помощи преобразования Пуассона:

$$f(t,s) = \frac{1}{y_0(\sigma^*,\varepsilon)} \left(P_{\sigma^*,\varepsilon}\varphi\right)(t,s).$$

Ограничение $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$ для (3) можно убрать, если нормализовать преобразование Пуассона надлежащим образом.

Преобразование Пуассона можно представить в виде

$$\left(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(t,s) = (\mathrm{ch}t)^{\sigma} \left(P^{+}_{\sigma,\varepsilon}\ \varphi\right)(\xi,s) + (\mathrm{ch}t)^{\sigma^*} \left(P^{-}_{\sigma,\varepsilon}\ \varphi\right)(\xi,s),$$

где $\xi = \mathrm{th}t$ и $P^{\pm}_{\sigma,\varepsilon}$ некоторы операторы.

Для *K-финитных* функций φ разложение (3) есть разложение в абсолютно сходящиеся ряды. Для *произвольных* функций φ (не обязательно K-финитных) мы можем утверждать лишь только то, что разложение (3) является *асимптотическим* разложением.

Сформулируем соответствующую теорему в общем случае для первой из функций (2).

Теорема. *Пусть σ находится в общем положении: $\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}_\varepsilon(S)$ ее преобразование Пуассона $\left(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(t,s)$ допускает следующее асимптотическое разложение при $t \to +\infty$:*

$$\left(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(t,s) \sim (\mathrm{ch}t)^{\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma,\varepsilon)\left(A^{(r)}_{\sigma^*+r,\varepsilon+r}\varphi\right)(s)\ (1-\mathrm{th}t)^r +$$

$$+(\mathrm{ch}t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma,\varepsilon)\left(L_{\sigma,r}\varphi\right)(s)\ (1-\mathrm{th}t)^r. \tag{4}$$

Асимптотическое равенство (4) понимается как асимптотическое разложение функций $\left(P^{\pm}_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(\xi,s)$ при $\xi \to 1$:

$$\left(P^{+}_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(\xi,s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma,\varepsilon)\left(A^{(r)}_{\sigma^*+r,\varepsilon+r}\varphi\right)(s)\ (1-\xi)^r, \tag{5}$$

$$\left(P^{-}_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(\xi,s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma,\varepsilon)\left(L_{\sigma,r}\varphi\right)(s)\ (1-\xi)^r. \tag{6}$$

В свою очередь, разложения (5), (6) понимаются в следующем смысле – например, для (5): для всякого $N \in \mathbb{N}$ существует постоянная C такая, что

$$\left| \left(P^{+}_{\sigma,\varepsilon}\varphi\right)(\xi,s) - \sum_{r=0}^{N} x_r(\sigma,\varepsilon) \left(A^{(r)}_{\sigma^*+r,\varepsilon+r}\varphi\right)(s)\,(1-\xi)^r \right| \leq C\,(1-\xi)^{N+1},$$

для всех $\xi \in [0,\xi_0]$, $s \in S$, ξ_0 – некоторое число из отрезка $(0,1)$.

Главные трудности, которые приходится преодолевать при доказательстве разложений (3), связаны именно со случаем произвольной φ. Доказательство требует различного рода оценок и т.д. Одной из основных идей является рекуррентное соотношение для коэффициента $X(\sigma,l,m;\xi)$ в "большой" асимптотике преобразования Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon}$ базисных функций ψ_{lm} на S, связывающее значения для σ и $\sigma+1$, (сдвиг по параметру σ представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G в пространстве $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ бесконечно дифференцируемых функций на S четности ε):

$$X(\sigma;l,m;\xi) = X(\sigma;l,m-2;\xi) + \frac{2m+q-4}{\sigma+1}X(\sigma+1;l,m-1;\xi).$$

В случае $\sigma \in \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$ справедливо разложение, аналогичное (3), но в "малой" асимптотике (т.е. в слагаемом с $(\mathrm{ch}t)^{\sigma^*}$ при $\mathrm{Re}\sigma > \frac{2-n}{2}$ и $(\mathrm{ch}t)^{\sigma}$ при $\mathrm{Re}\sigma < \frac{2-n}{2}$) появляется множитель $\ln\mathrm{ch}t$. Явные выражения операторов C и D сильно усложняются.

Случаи $p = 1$ и $p > 1$, не отличаясь друг от друга принципиально, все-таки имеют некоторые различия – в формулах, в результатах и т.д. Поэтому случай $p = 1$ (в этом случае гиперболоид X называется однополостным гиперболоидом) мы выделили в отдельную главу. Кроме того, мы сочли полезным выделить в отдельную главу еще и простейший случай $p=1$, $q=2$ – ввиду возможных обобщений в разных направлениях. В самом деле, в этом случае гиперболоид X – как однородное пространство – можно записать в разных видах: $SO_0(1,2)/SO_0(1,1)$, $SL(2,\mathbb{R})/GL(1,\mathbb{R})$, $SU(1,1)/SO_0(1,1)$.

Основные результаты опубликованы в работах:

1. Артемов А.А. Асимптотическое поведение преобразования Пуассона для гиперболоидов // Тезисы докладов XVI Всесоюзной

школы по теории *операторов в функциональных* пространствах.– Н.Новгород, 1991.–С.13.

2. Артемов А.А. Асимптотическое поведение преобразования Пуассона на вещественном гиперболоиде // Тезисы докладов к научной конференции преподавателей.–Тамбов, 1994.–С.3–4.

3. Артемов А.А. Преобразование Пуассона на однополостном гиперболоиде//Тезисы докладов международной конференции "Группы в анализе и геометрии".–Омск: Омск.гос.ун-т, 1995.–С.8–10.

4. Артемов А.А. Преобразование Пуассона на однополостном гиперболоиде в трехмерном пространстве. Омск:Омск.гос.ун-т, Препринт 95–09.–1995.–20 с.

5. Артемов А.А. Преобразование Пуассона на однополостном гиперболоиде // Материалы научной конференции, Тамбов, 1995, С.28-29.

6. Artemov A.A. Asymptotic behaviour of Poisson transformation on hyperboloid of one sheet // Proceedings of the Forth Workshop "Scattering, reactions, transitions in quantum systems and symmetry methods."-Obninsk, 1991.–P.101–102.

7. Artemov A.A. Asymptotic behaviour of Poisson transformation for hyperboloids // Proceedings of the Fifth Workshop "Symmetry methods in physics." -Obninsk, 1992.–P.227.

8. Artemov A.A. Asymptotic behaviour of Poisson transformation for hyperboloids // Abstracts of conference "Classical and Quantum Geomerty of Homogeneous Spaces."–Moscow, 1994.–P.4.

АРТЕМОВ АНАТОЛИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛОИДОВ

Данная работа посвящена изучению преобразования Пуассона и нахождению полной асимптотики (не только главного члена) этого преобразования на бесконечности для одного важного подкласса класса полупростых симметрических пространств G/H с некомпактной H, а именно, для вещественных гиперболических пространств (гиперболоидов) $SO_0(p,q)/SO_0(p,q-1)$. Разложения получены для *произвольных* (не только K-финитных) функций и не только по экспонентам, но и по степеням некоторых других функций. Дано описание тех операторов, действующих в функциях на границе, которые участвуют в коэффициентах разложений.

ARTEMOV ANATOLI ANATOLIEVICH

ASIMPTOTIC BEHAVIOUR OF POISSON TRANSFORM FOR HYPERBOLOIDS

This work examines the Poisson transform and search the full asimptotics (not only the main term) of this transform at the infinity for one importent subclass of class semisimple simmetric spaces G/H with non-compact H, namely, for real hyperbolic spaces (hyperboloids) $SO_0(p,q)/SO_0(p,q-1)$. The decompositions have been obtained for *arbitrary* (not only K-finite) functions and not only on exponents, but on degrees of some other functions. We give the description of operators, acting on functions on the boundary, which are the coefficients of the decompositions.