На правах рукописи

Малых Михаил Дмитриевич

Разработка методов численного анализа закрытых электромагнитных волноводов

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

Научный консультант:	профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», доктор физико-математических наук, профессор **Севастьянов Леонид Антонович**
Официальные оппоненты:	**Мележик Владимир Степанович,** доктор физико-математических наук, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, ведущий научный сотрудник
	Егоров Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук», ведущий научный сотрудник
	Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»

Защита состоится 5 апреля 2019 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 при РУДН по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 110.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН или на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.203.28.

Автореферат разослан «   » декабря 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.203.28,
канд. физ.-мат. наук, доцент Васильев С. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование систем, в которых волна может распространяться в некотором выделенном направлении, именуемых волноводами имеет давнюю историю, однако наибольшее значение эти исследования приобрели в связи с развитием радиофизики и оптоэлектроники. Однако предметная область теории волноводов не ограничивается радиофизикой, к волноводным задачам можно отнести и ряд задач о рассеянии частиц из квантовой механики, например, недавние исследования В.С. Мележика о рассеивании частицы центрами, закрепленными на продольной оси гармонической волноводообразной ловушки (Мележик В.С. и др., 2018), и задачи из механики деформируемых тел, например, моделирование волн в соосных упругих оболочках, заполненных вязкой жидкостью (Блинков Ю.А. и др., 2016-8 гг.). По всей видимости, в будущем может возникнуть математическая теория волноводов, отвлеченная от предметной области и понятая как теория бесконечномерных систем дифференциальных уравнений (А. С. Зильберглейт и Ю. И. Копилевич, 1983). Характерная особенность механических задач — нелинейность дифференциальных уравнений, используемых для описания математической модели. В электродинамике и квантовой механике значение линейных моделей много выше, поскольку уравнения Максвелла и уравнение Шредингера — линейные. Нелинейность в электродинамических задачах появляется в том случае, когда принимают во внимание зависимость диэлектрической и магнитной проницаемостей от поля. Настоящая диссертация посвящена распространению электромагнитных волн по волноводам с идеально проводящими стенками, рассматриваются линейные модели, основная сложность в исследовании которых — необходимость решать задачи на собственные значения несамосопряженного операторного пучка с бесконечномерным ядром.

Изначально моделирование распространения волноводных мод по закрытым волноводам выполнялось для нужд проектирования каналов передачи СВЧ излучения. Однако область применения модели закрытого волновода много шире классических задач о распространении радиоволн, поскольку модель закрытого волновода используется и при моделировании открытых волноведущих систем (Боголюбов А.Н. и Едакина Т. В., 1991-92; Диваков Д.В. и др., 2017). При моделировании распространения направляемых мод по открытому волноводу в оптическом диапазоне естественно принять, что поле на расстоянии нескольких длин волн от границы такого волновода равно нулю. Поэтому, поместив открытый волновод в ящик с идеально проводящими стенками, мы получим приближенную модель открытого волновода, на что впервые указал А.Г. Свешников. Модель «открытый оптический волновод в ящике» является корректной математической моделью, описывающей распространение волноводных мод, и на данный момент является корректной моделью, описывающей волноводную дифракцию в открытых оптических системах (Диваков Д.В. и др., 2017). Границы применимости этой модели можно описать количественно, сравнив результаты, получающиеся при разном удалении стенок ящика от границы волновода. Безусловным недостатком модели «волновод в ящике» является чрезмерная канализация энергии, вытекающей из волноводов, в направлении оси волновода. Это не существенно для моделирования распространения волноводных мод, но важно, например, для задач о вытекании энергии из такого волновода через открытый торец.

Укажем на одно из многих приложений этой модели, связанное с приоритетным научным направлением Института прикладной математики и телекоммуникаций РУДН «Опережающие исследования беспроводных 5G сетей и Интернета вещей» (Диваков Д.В. и др., 2018). Увеличение скорости передачи данных по беспроводным сетям должно быть обеспечено повышением пропускной способности оптоволокона, соединяющего вышки беспроводной связи. Однако уже переход к 4G подвел к пределу пропускной способности существующих оптоволокон. Поэтому интернациональные телекоммуникационные компании уделяют большое внимание разработкам новых оптоволокон с большой пропускной способностью и именно в этом направлении были достигнуты существенные технологические успехи за последние пять лет (Extance, 2017). Наиболее перспективным приемом повышения пропускной способности оптоволокна является использование многожильных (multicore) волноводов, представляющих собой пучок из десятков и даже сотен диэлектрических жил (Coffey, 2013). Можно ожидать, что при правильном подборе частоты по многожильным волноводам распространяется столько же мод, сколько в системе жил, и каждую из этих мод можно использовать для передачи информации. Проблема, однако, состоит в том, что жилы расположены близко друг к другу и поэтому модель, в рамках которой каждая жила рассматривается как закрытый волновод, — слишком грубая, чтобы использовать ее на практике. Подводя итог всему сказанному можно утверждать, что опережающие исследования беспроводных 5G сетей требует исследования математической модели закрытого волновода, диэлектрическая проницаемость внутри которого не только не является постоянной, но и даже медленно меняющейся функцией.

Степень разработанности темы. Рассмотрим теперь основные методы моделирования распространения излучения в закрытых волноводах.

Простейший путь для моделировния явлений классической электродинаики — использование уравнений Максвелла для описания электромагнитного поля и их последующая дискретизация по методу конечных разностей. Развитие компьютерной техники в настоящее время позволяет применять метод конечных разностей непосредственно для дискретизации уравнений Максвелла и проводить численные исследования прикладных электродинамических задач, рассматриваемых в ограниченных областях пространства, например, в резонаторе, призме, дифракционной решетке и т.д. Одним из наиболее широко применяемых методов такого рода является метод FDTD (Finite-Difference

Time-Domain), подробно описанный в ряде учебников по современной вычислительной электродинамике (Григорьев А.Д., 2013; Taflove A. and Hagness S.C., 2000). Специфика волноводных задач, например, задачи о волноводной дифракции, состоит в том, что в них проводится расчет электромагнитных полей на значительном расстоянии от исследуемого объекта, рассевающего электромагнитное поле, что приводит в рамках метода FDTD и его модификаций к необходимости огромных объемов вычислений. Следует также добавить, что этот метод вносит в задачу «численную дисперсию», приводящую к ошибкам в определении фазовой скорости, и «численную анизотропию», при которой волновые числа волн, распространяющихся в различных направлениях в изотропной среде, различаются (Хардиков В.В. и др., 2008; Егоров А.А. и Ставцев, А.В., 2010–2012).

По этой причине при решении прикладных задач теории волноводов часто прибегают к скалярному приближению, то есть для моделирования распространения монохроматических волн используют не уравнения Максвелла, а уравнение Гельмгольца. Модель, в которой вместо электромагнитного поля используется скалярная функция, а вместо уравнений Максвелла — уравнения Гельмгольца, мы будем называть скалярной и противопоставлять ее векторной модели, основанной непосредственно на уравнениях Максвелла.

В некоторых случаях, например, в случае планарного волновода, можно строго доказать, что компоненты электромагнитного поля порознь удовлетворяют уравнению Гельмгольца и не зацепляются через граничные условия. Поэтому эти случаи можно исследовать в рамках скалярной модели. В принципиально трехмерных задачах, в которых диэлектрическая проницаемость меняется плавно, такой переход требует удаления из уравнений Максвелла членов, представляющих собой произведение градиента ε на поле; например, такое выражение получается при исследовании характеристик лазерного излучения, рассеянного в интегрально-оптическом волноводе с трехмерными неоднородностями (Егоров А.А. и Ставцев А.В., 2012). В случае изогнутых волноводов переход к скалярной модели требует удаления члена, пропорционального кривизне, как, например, в случае тороидального волновода (Ступаков Г.В. и др., 2003). По этой причине использование приближенной скалярной модели волноводов допустимо только для слабо направляющих структур и не всегда подходит для исследования и проектирования целого ряда интегрально-оптических устройств, в том числе для устройств, волноводных линз и датчиков, которые исследовались в работах сотрудников и выпускников кафедры радиофизики РУДН (Шевченко В.В., Чехлова Т.К., Тимакин А.Г., Егоров А.А.).

Исследование волноводных задач в полной электромагнитной постановке было начато работами А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, П.Е. Краснушкина и А.Г. Свешникова, написанными во второй половине прошлого века. А.Н. Тихонов и А.А. Самарский рассмотрели распространение электромагнитных волн по цилиндру постоянного односвязного сечения, имеющему идеально проводящие стенки и заполненному однородным веществом. В этой работе было доказано несколько фундаментальных теорем, характеризующих произвольное электромагнитное поле в таком волноводе — теорема о разложении поля на поля трансверсально электрического и трансверсально магнитного типов (ТЕ- и ТМ-типов) и теорема о разложении поля на нормальные моды. Эти результаты позволили П.Е. Краснушкину ввести понятие нормальной волноводной волны или моды, а А.Г. Свешникову ввести парциальные условия излучения и строго математически поставить задачу о дифракции нормальных волн в волноводе.

По существу в этих работах были предложены две классические модели теории волноводов — модель регулярного полого волновода и модель локально нерегулярного волновода.

В рамках первой модели была рассмотрена спектральная задача об отыскании нормальных мод. Эта задача была сведена к задаче на собственные значения для оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле и Неймана, численные методы решения которой хорошо разработаны. В редких случаях, когда сечение волновода — круг или прямоугольник, эта задача допускает решения в символьном виде. В общем же случае эти задачи без труда решаются численно, например, в компьютерных реализациях метода конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время МКЭ стал стандартным подходом к решению краевых задач математической физики и, более общо, к дискретизации непрерывных моделей. На наш взгляд важным этапом на пути распространения и стандартизации МКЭ стал переход от написания программного обеспечения, ориентированного на решение задач того или иного класса, к созданию языка для работы с конструкциями МКЭ. Такой новый язык программирования, по существу являющийся диалектом C++, разрабатывается в лаборатории Лионса и получил название FreeFem++ (Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions). В дальнейшем, говоря о стандартной реализации МКЭ, мы будем понимать реализацию, которая может быть записана на этом языке.

В рамках второй модели была рассмотрена задача об отыскании амплитуд нормальных волн, рассеянных диэлектрическим телом, помещенным внутрь регулярного волновода, при падении на него той или иной суперпозиции нормальных волн. Волновод, который вне некоторого компакта совпадает с регулярным, называют локально нерегулярным, а названные амплитуды — коэффициентами отражения и прохождения. Эта задача может быть записана как краевая задача для бесконечномерной системы линейных дифференциальных уравнений на отрезке с условиями третьего рода. Эта задача не допускает решения в символьном виде, естественным же способом ее приближенного решения состоит из двух шагов:

1. усечение, то есть замена бесконечномерного пространства, в котором ставится задача, на то или иное конечномерное пространство,
2. решение конечномерной системы линейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями третьего рода.

В данном случае метод усечения сводит уравнение в частных производных к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и поэтому его можно считать частным случаем метода Канторовича (Виницкий С.И. и др., 2005-2018). В качестве первого шага в оригинальных работах А.Г. Свешникова выбиралось пространство, натянутое на первые базисные функции оператора Лапласа на сечении волновода, этот метод дискретизации задачи получил название неполного метода Галеркина (Свешников А.Г., 1977). В современных работах (например, в работах А.Н. Боголюбова, А.Л. Делицына, А.В. Лавреновой, Н.Е. Шапкиной, Д.А. Коняева и А.А. Петухова) заменяют исходное пространство на пространство конечных элементов. Усечение и вычисление матриц конечномерной системы линейных дифференциальных уравнений в рамках неполного метода Галеркина естественно выполнять символьно, используя системы компьютерной алгебры (что было предложено в работах Л.А. Севастьянова, Д.В. Дивакова и А.А. Тютюнник, 2014-17 гг.), а в рамках МКЭ — стандартными средствами FreeFem++ (Малых М.Д., 2018).

В качестве второго шага необходимо решить систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями третьего рода методом конечных разностей или одномерным МКЭ. К сожалению, FreeFem++ не имеет встроенного модуля для решения краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Подходящие специализированное программное обеспечение было разработано С.И. Виницким, А.А. Гусевым и О. Чулуунбаатаром (Дубна, 2000-2018 гг.) для нужд квантовомеханических задач рассеяния на основе МКЭ с элементами высокого порядка. Несмотря на классичность этой задачи для теории волноводов, вопросы сопряжения программного обеспечения в полной мере не автоматизированы.

Обоснованию метода усечения в литературе не было уделено должного внимания. Для случая сред с затуханием неполный метод Галеркина был обоснован в упомянутых выше работах А.Г. Свешникова, однако предположение о наличии затухания принципиально для указанного метода. В реальных средах, конечно, затухание всегда присутствует, однако постановка парциальных условий излучения подразумевает пренебрежение этим эффектом. Для простейшего случая планарного волновода вопросы обоснования в средах без затухания рассматривались в работе А.Л. Делицына (2010 г.). Было показано, что лемма Сеа, играющая ключевую роль при строгом обосновании применения МКЭ для эллиптических уравнений (Ж. Деклу, 1976), переносится на случай задачи о волноводной дифракции; там же была отмечена характерная для этого класса волноводных задач трудность — погрешность вычисления билинейных форм, заданных в виде бесконечных рядов. Эта проблема не характерна для эллиптических задач, но возникает естественным образом при применении МКЭ в краевых задачах с дробным оператором Лапласа, теория которых сейчас активно разрабатывается (например, в этом году этой теме был посвящена секция на конференции «Numerical Methods and Applications’2018»).

Еще в середине прошлого веке на практике активно использовались волноводы с сердечниками, то есть цилиндры, заполнение которых меняется вдоль сечения и остается постоянным вдоль оси, такую конструкцию мы будем дальше называть регулярным волноводом, заполненным оптически неоднородным веществом. Современные технологии в области создания новых материалов и метаматериалов дают в руки практиков волноводы с практически любым распределением диэлектрической проницаемости. При этом все чаще пытаются использовать фрактальные вставки (Петухов А.А. и др., 2011), а это означает, что скалярная модель с ее предположением о малости и медленности изменения диэлектрической проницаемости становится все менее и менее адекватной. Этот же вывод можно сделать применительно и к исследованию упомянутых выше многожильных волноводов, исследование которых ориентировано на обеспечение 5g сетей.

К сожалению, метод, восходящий к работам А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, был основан на возможности введения для полого волновода двух потенциалов, которые теперь интерпретируют как электрическую и магнитную функции Боргниса (А.Г. Свешников и др., 2002). Это обстоятельство принципиально отличает вычислительную сложность спектральных задачи для полых волноводов и для волноводов, заполненных оптически неоднородным веществом. В первом случае задачи получаются скалярными и к ним применимы хорошо разработанные методы, пригодные в равной мере и для задач акустики, и для задач квантовой механики. В случае же волновода, заполненного оптическим неоднородным веществом, приходится численно решать задачи в полной векторной постановке. Это означает, что аналоги двух разобранных выше задач — спектральной и задачи дифракции — для волноводов с переменными проницаемостями оказываются значительно более сложными и до сих пор неисследованными в полной мере.

Переходя к обсуждению результатов, полученных при исследовании спектральных характеристик волноводов, заполненных неоднородным веществом, условимся работать в декартовой системе координат, ось Oz которой совпадает с осью волновода. Задача об отыскании нормальных мод регулярного волновода, заполненного оптически неоднородным веществом, состоит в следующем. Даны:

- сечение волновода S,
- распределение ε и μ по сечению S, здесь и далее предполагается, что эти функции принимают только положительные значения,
- частота ω, а следовательно, и волновое число $k = \omega/c$.

Требуется найти все значения параметра $\beta \in \mathbb{C}$, при которых уравнения Максвелла допускают нетривиальное решение вида

$$\vec{E}(x,y)e^{ik\beta z-i\omega t}, \quad \vec{H}(x,y)e^{ik\beta z-i\omega t},$$

удовлетворяющее условиям идеальной проводимости стенок волновода и условиям сопряжения на границах разрывов диэлектрической и магнитной проницаемостей. Параметр β называют коэффициентом фазового замедления. Традиционно эта задача записывается как задача на собственные значения относительно трех компонент поля. Выбор трех компонент поля из шести компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может быть выполнен различными способами, что ведет к различным постановкам задачи. В работах А.Н. Боголюбова и Т.В. Едакиной (1991-92 гг.) и работах Франка Шмидта (2001, 2008 г.) использовалась запись относительно компонент вектора $\vec{H}$, в работах Е. Лезара и Д. Девидсона (Lezar E. and Davidson D. B., 2011 г.), выполненных в рамках The FEniCS Project, — относительно вектора $\vec{E}$, в работах А.Л. Делицына (1999-2011 гг.) относительно H_x, H_y, E_z. Нормальные моды осесимметричного волновода с диэлектрическим сердечником рассматривались в работах Н.А. Новоселовой, С.Б. Раевского и А.А. Титаренко (2010 г.), а также в работах А.Л. Делицына и С.И. Круглова (2011-2012 гг.).

Теоретическое исследование и численное решение задачи на собственные значения представляют значительные трудности.

Во-первых, при любом из названных подходов получаются спектральные задачи для несамосопряженных операторов в функциональных пространствах, которые строятся по аналогии с пространствами Соболева, но заметно менее изучены. Это значительно усложняет доказательство теоремы о разложении монохроматической волны в волноводе по нормальным модам, без доказательства которой невозможно перейти к постановке парциальных условий излучения в задаче о волноводной дифракции (Делицын А.Л., 1999-2007 гг.). В случае полого волновода эта теорема была доказана А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским как следствие теоремы Стеклова, в случае же волновода, заполненного неоднородным веществом, приходится пользоваться общей теоремой Келдыша о полноте системы собственных и присоединенных векторов (Краснушкин П.Е. и Моисеев Е.И., 1982 г., Смирнов Ю.Г., 1987-1991 гг., Делицын А.Л., 1999-2011 гг.). В настоящее время полнота системы корневых векторов волновода доказана, однако уже вопрос о базисности этой системы был решен в утвердительном смысле только для случая волновода круглого сечения, заполнение которого зависит только от радиуса (дипл. работа М.Д. Малых, науч. рук. А.Л. Делицын, 2001).

Многочисленные вопросы о распределении собственных значений, условиях существования кратных собственных значений остались не исследованными ввиду трудности спектральной теории для несамосопряженных операторов. Бывают ли случаи, в которых коэффициенты фазового замедления β нормальных мод имеют и вещественную, и мнимую часть? Бывают ли случаи, в которых возникают присоединенные нормальные моды? Каков их физический смысл? Численные эксперименты не дают однозначного ответа на эти вопросы. например, в наших экспериментах, выполненных при помощи комплекса программ, представленного на ежегодной конференции Saratov Fall Meeting ’2017, у старших мод появлялись моды, имеющие комплексный коэффициент фазового замедления. Однако численные методы всегда вычисляют старшие моды хуже младших, поэтому в рамках тех экспериментов осталось не ясным, выявили ли мы новый физический эффект, или столкнулись с вычислительным артефактом.

Во-вторых, спектральная задача имеет нулевое собственное значение бесконечной кратности, из-за которого при численном решении задачи на собственные значения возникают фиктивные моды, «духи». В конце своего обзора текущих успехов решения спектральной задачи теории волноводов А.Н. Боголюбов и Т.В. Едакина отметили:

> ... Появление ложных мод — едва ли не самая трудная проблема в решении волноводных задач с помощью конечных элементов или конечных разностей в вариационной постановке, и, по нашему мнению, к ней еще не раз обратятся исследователи в поисках наиболее простых и экономичных способов выявления реально распространяющихся в волноводе волн.

К настоящему моменту известно два способа борьбы с духами: использование штрафов (А.Н. Боголюбов и Т.В. Едакина, 1991-92 гг.) или использование смешанных конечных элементов (Lezar E. and Davidson D. B., 2011 г.; Делицын А.Л., 2011-12 гг.). Главный недостаток метода штрафов состоит в том, что хотя увеличение параметра, характеризующего размер штрафа и приводит к уменьшению количества фиктивных решений, однако точность расчета характеристик истинных мод при этом уменьшается. Метод смешанных конечных элементов требует существенной доработки базиса МКЭ. Вероятно, именно по этой причине в тестовых примерах Е. Лезар и Д. Девидсон рассматривают прямоугольные волноводы с прямоугольными вставками. В настоящее время разработка программного обеспечения для удобного применения метода смешанных конечных элементов весьма активно ведется китайскими авторами (Jun Hu, Peking university) и нужно думать, что через несколько лет мы получим весьма эффективный инструмент.

Следует также заметить, что применение штрафов при анализе мод открытых волноводов допускает строгое обоснование, поэтому спектральную задачу можно рассматривать в пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, на что впервые обратили внимание А. Бамбергер и А. Бонне (A. Bamberger, A.S. Bonnet, 1990 г.). Поэтому, с точки зрения применения метода штрафов, спектральная задача для открытых волноводов проще спектральной задачи для волноводов закрытых. В работах Р.З. Даутова, Е.М. Карчевского и Г.П. Корнилова (2002, 2005 гг.) было предложено свести исходную спектральную задачу в $\mathbb{R}^2$ к удобной для численного решения линейной параметрической задаче на собственные значения в круге с нелокальными граничными условиями.

В-третьих, условия на стенках волновода

$$\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0}, \quad \vec{H} \cdot \vec{n} = 0$$

не являются классическими, FEA Softwares не имеют встроенных элементов для таких условий. Не вполне ясно, насколько точно эти условия аппроксимируются в опубликованных работах. В работах, посвященных оптическим волноводам

(А.Н. Боголюбов и Т.В. Едакина, 1991-92 гг., Франк Шмидт и др., 2001, 2008 г.) предполагают, что на стенках поле равно нулю. С физической точки зрения это предположение очень разумно, но к сожалению оно ведет к конфликту с теоремой Мюллера о поле, равном нулю на элементе аналитической поверхности (Cl. Müller, 1957, Satz 34). Этот конфликт снимается дальше, на стадии введения штрафов, и поэтому в итоге получается корректная математическая задача.

В-четвертых, в наиболее интересных для приложений примерах диэлектрическая проницаемость имеет разрывы на границе раздела различных веществ, заполняющих волновод. На этих границах электромагнитные поля терпят разрывы, из-за чего приходится выполнять аппроксимацию по МКЭ для разрывных функций. Результаты численных экспериментов убедительно свидетельствуют в пользу законности этой операции, однако для данной ситуации теоретически влияние разрывов на сходимость исследована не была. Исследование этого вопроса существенно осложнено и тем, что аппроксимация ведется в нестандартных, мало исследованных функциональных пространствах. например, в упомянутых выше работах А.Л. Делицына доказывались теоремы вложения, которые для пространств Соболева были установлены еще в начале прошлого века.

Наконец, в-пятых, достигнутая точность вычислений не велика. Е. Лезар и Д. Девидсон сравнили свои результаты с результатами, полученными ранее Джином (Jin, 2002) тем же путем, для одного и того же волновода — прямоугольного волновода, заполненного наполовину. На дисперсионной кривой лишь первая ветвь совпала с графической точностью, следующие три ветви у Джина слились в две.

Обращаясь к задачам о дифракции волн на теле, помещенном в регулярный волновод со сложным заполнением, или к более простой задаче о дифракции на стыке двух таких волноводов, следует заметить, что полноты системы нормальных мод достаточно для постановки парциальных условий излучения, однако отсутствие базисности делает их формулировку весьма непрозрачной, а дальнейшую работу с ними — весьма нетривиальным делом. К этому следует добавить, что использование многомодовых моделей подразумевает возможность вычисления младших мод, а не только первой, с высокой точностью. Поэтому на практике исследование волноводной дифракции проводят в рамках скалярного приближения. Однако это не снимает ни вопроса об исследовании задачи дифракции в полной электромагнитной постановке, ни вопроса о соответствии между этими моделями.

Подводя итог всему сказанному, можно утверждать следующее:

– исследование закрытых волноводов, заполненных неоднородным веществом, является актуальной, практически важной задачей, находящей разнообразные приложения в широком спектре задач, от проектирования каналов передачи СВЧ излучения до проектирования многожильных оптических волокон, необходимых для построения 5G сетей.

– исследование векторной модели волновода, заполненного неоднородным веществом, встречает значительные трудности как теоретического, так и вычислительного плана, зато эта модель основана на уравнениях Максвелла и ее адекватность не вызывает никаких сомнений,
– исследование скалярной модели волновода, заполненного неоднородным веществом, напротив, не представляет принципиальных трудностей, однако в нашем распоряжении нет числового параметра, характеризующего адекватность этой модели для данного волновода с тем или иным профилем диэлектрической проницаемости.

Настоящее диссертационное исследование выполнено в группе проф. Л.А. Севастьянова (РУДН), конечной целью этих исследований является создание численных методов решения основных задач теории волноводов и их реализация в виде комплексов программ, ориентированных на широкий круг практических проблем от классических вопросов передачи СВЧ излучения до проектирования оптических волноводов и датчиков. При этом крайне важна простота реализации разрабатываемых методов в системах компьютерной алгебры (Maple, Sage) или в программном обеспечении, ориентированном на метод конечных элементов (FreeFem++).

В работах автора диссертации было предложено неизвестное ранее представление электромагнитных полей в волноводе при помощи четырех потенциалов. Эти потенциалы не уменьшают число искомых функций, то есть не «интегрируют» уравнения Максвелла. Но даже в том случае, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости описываются разрывными функциями, они оказываются достаточно гладкими функциями. Строго говоря, удалось заменить условия сопряжения электромагнитных полей на границах разрыва проницаемостей условиями принадлежности потенциалов стандартным пространствам Соболева. Это означает, что переход от непрерывной к конечномодовой модели волновода может быть выполнен хорошо разработанным для скалярной модели способом и позволяет при разработке программного обеспечения использовать стандартные конструкции языка FreeFem++.

Спектральная задача, записанная относительно четырех потенциалов, не имеет бесконечномерного ядра, поэтому представление поля при помощи четырех потенциалов дает в наше распоряжение метод вычисления нормальных мод волновода, свободный от появления духов. Тем самым, из общих соображений очевидно, что этот подход должен устранить и вторую, вероятно ключевую проблему спектральной теории волноводов. Состоятельность этого метода была убедительно продемонстрирована в серии численных экспериментов, выполненных в рамках диссертационного исследования А.А. Тютюнник (2018 г., науч. рук. проф. Л.А. Севастьянов).

Как было отмечено выше, существующие методы вычисления спектральных характеристик волноводов используют смешанные конечные элементы для борьбы с духами и аппроксимацию разрывных компонент электромагнитного поля. Поэтому численные методы, основанные на представлении поля при помощи четырех потенциалов, выгодно отличаются от уже существующих простотой реализации.

В случае, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости волновода являются постоянными величинами, система уравнений Максвелла, записанная относительно четырех потенциалов, распадается на две подсистемы, одна описывает TE-поля, вторая TM-поля, причем обе системы дают самосопряженные спектральные задачи для нормальных мод. Это автоматически приводит к тому, что нормальные моды имеют структуру TE- или TM- мод, а квадраты показателя фазового замедления мод всегда оказываются вещественными.

В случае, когда проницаемости волновода являются кусочно гладкими функциями, эти подсистемы связаны перекрестными членами, что приводит к гибридизации мод. Из-за этих членов спектральная задача, по крайней мере в той форме, в которой ее пока удалось получить, становится несамосопряженной. Для ее численного решения приходится использовать решатели, ориентированные на отыскание комплексных собственных значений, что приводит к появлению малых комплексных возмущений к квадрату показателя фазавого замедления нормальных мод. В рамках численных экспериментов мнимые добавки к квадрату показателя фазового замедления были обнаружены впервые при исследовании цилидрического волновода, обладающего осевой симметрией (С.Б. Раевский, 1988). В наших численных экспериментах мнимые добавки малы и наблюдаются на модах большого порядка или возле перехода через нулевое значение, поэтому не всегда понятно, отражает ли появление этой комплексной добавки реальное явление или она является численным артефактом. Следует также заметить, что при численных расчетах не всегда удается заметить, что та или иная компонента поля равна нулю. например, при расчетах осесимметричного волновода не сразу было отмечено, что появляется именно TE-мода (С.Б. Раевский, 2010). Эти обстоятельства существенно затрудняют исследование и главное классификацию нормальных мод в полной векторной постановке.

Если в уравнениях Максвелла, записанных относительно потенциалов, пренебречь перекрестными членами, то получится новая самосопряженная модель распространения излучения по волноводу. В иерархии моделей она занимает место между скалярной и полной векторной моделями. Эта модель, очевидно, точнее скалярной, поскольку совпадает с векторной для случая полого волновода, но хуже векторной, поскольку принципиально не может описать процесс гибридизации. Ее самосопряженный вид заставляет предположить, что все или почти все известные качественные свойства скалярной модели можно перенести на нее. Эта модель, естественным образом возникающая при записи уравнений Максвелла в четырех потенциалах, ранее исследована не была. Пополнение иерархии моделей новыми промежуточными звеньями крайне полезно, как само по себе, так и для сравнения простейших моделей и наиболее полных.

Цель данной диссертационной работы — разработка методов качественного и количественного анализа распространения электромагнитного излучения в волноводах, основанных на представлении электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов, в том числе исследование самосопряженной векторной модели, занимающей промежуточное положение между скалярной и полной векторной моделями волновода.

Для достижения поставленной цели необходимо было провести значительные подготовительные теоретические исследования и решить следующие **задачи**:

1. разработать новое представление электромагнитных полей в закрытых волноводах, заполненных оптически неоднородным веществом, при помощи потенциалов, подобрав их таким образом, чтобы условия сопряжения полей на границах разрыва диэлектрической и магнитной проницаемостей и условия идеальной проводимости стенок волновода можно было заменить на условия принадлежности потенциалов тем или иным классическим пространствам Соболева,
2. обосновать применимость этого представления, доказав, что
   а) всякое электромагнитное поле в волноводе, удовлетворяющее в классическом смысле уравнениям Максвелла, условиям сопряжения на границах разрыва диэлектрической и магнитной проницаемостей и условиям идеальной проводимости стенок волновода, представимо при помощи этих потенциалов,
   б) всякое решение уравнений для потенциалов, которые получаются формально из уравнений Максвелла, определяет обобщенное решение уравнений Максвелла.
3. описать самосопряженную векторную модель распространения излучения по волноводу на языке четырех потенциалов и перенести на нее известные качественные свойства скалярной модели, в том числе:
   а) базисность системы нормальных мод волновода,
   б) разделение нормальных мод на трансверсально электрические и трансверсально магнитные,
   в) конечность числа мод с вещественным коэффициентом фазового замедления,
   г) отсутствие мод с коэффициентом фазового замедления, имеющим одновременно ненулевую и вещественную, и мнимую часть,
4. в рамках самосопряженной модели на основе метода конечных элементов разработать новый численный метод решения спектральной задачи теории волноводов, свободный от фиктивных мод («духов»)
5. исследовать состоятельность этого метода путем проведения серии численных экспериментов, с этой целью:
   а) разработать алгоритм построения дисперсионной кривой волновода и реализовать его в виде программы, написанной на языке FreeFem++,

б) разработать алгоритм вычисления младших нормальных мод заданного волновода при заданной частоте и реализовать его в виде программы, написанной на языке FreeFem++,

6. исследовать состоятельность разработанного метода решения спектральной задачи теории волноводов как составной части метода решения задачи волноводной дифракции,
7. провести сравнение самосопряженной модели со скалярной и полной векторной моделями.

Научная новизна:

1. Представление электромагнитного поля в волноводе при помощи четырех потенциалов, лежащее в основе разрабатываемого метода, было предложено впервые, окончательная форма представления была опубликована в «Ветнике РУДН» в этом году (Малых М.Д., 2018).
2. Самосопряженная векторная модель волновода с кусочно гладкими проницаемостями ε и μ описана и исследована впервые.
3. Выполнено оригинальное исследование нормальных мод регулярного двухжильного волновода в рамках самосопряженной векторной модели.
4. Выполнено оригинальное исследование задачи дифракции ТМ-волны на стыке двух регулярных двухжильных волноводов в рамках самосопряженной векторной модели.

Предложенное представление поля в волноводе при помощи четырех потенциалов можно рассматривать как двумерный аналог декомпозиции Гельмгольца, хорошо известной в теории упругости (Ляв, 1939), приспособленный к исследованию электромагнитного поля в задачах с выделенной осью. В электродинамике для поля $\vec{H}$ такие потенциалы возникали при доказательстве полноты системы нормальных мод в качестве вспомогательной конструкции в работах А.Л. Делицына (А.Л. Делицын, 1999, 2000 г.). Все четыре потенциала были введены в наших работах 2017 г.

Практическая значимость обусловлена в первую очередь возможностью применения разрабатываемых методов к исследованию спектральных свойств многожильных оптических волокон и вообще волноводов с быстро меняющимся по сечению заполнением, а также для исследования дифракции волноводных мод открытых волноводов на протяженных возмущениях, например, на волноводных линзах. Особо следует подчеркнуть, что разрабатываемые методы ориентированы на реализацию стандартными средствами численного анализа краевых задач, что существенно упростит их реализацию на ЭВМ.

В настоящей диссертации предлагается новый подход к векторной задаче, который существенно упрощает ее исследование, по целому ряду параметров приближает сложность этой задачи к сложности скалярной задачи. Однако, не следует думать, что расчеты в рамках векторной модели станут более экономичеными в сравнении с аналогичными расчетами, выполняемыми в рамках модели скалярной, равно как полагать, что модель многомодовая станет проще маломодовой. Важно, что эти модели можно выстроить в иерархию математических моделей распространения волноводных мод (Самарский А.А., Михайлов А.П., 2002). Имея возможность исследовать численно задачу при помощи различных моделей, в конкретной ситуации можно найти оптимум.

Методология и методы исследования. В диссертации используется техника пространств Соболева, ставшая стандартным языком описания краевых задач математической физики. На основе этого языка в диссертации описываются основные модели теории волноводов, в частности используется обобщенная запись уравнений Максвелла. Для дискретизации непрерывных моделей используется неполный метод Галеркина и МКЭ, тоже ставшие стандартом для приближенного решения краевых задач. Задача об отыскании нормальных мод регулярного волновода сводится к задаче на собственные значения для самосопряженного операторного пучка, исследование свойств которого основано на спектральном разложении вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. При анализе задачи дифракции исследованы вопросы сходимости и консервативности разрабатываемых методов, в частности используются разностные схемы, сохраняющие квадратичные интегралы; такие схемы обсуждались недавно в нашем докладе на конференции NMA' 2018.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложено представление электромагнитного поля в волноводе, заполненным оптически неоднородным веществом, при помощи четырех потенциалов, это представление позволяет исследовать спектральные свойства таких волноводов, оставаясь в классе стандартных пространств Соболева.
2. Исследовано место самосопряженной векторной модели в иерархии моделей распространения излучения в волноводе.
3. Задача об отыскании нормальных мод регулярных волноводов в рамках самосопряженной модели записана как задача на собственные значения самосопряженного операторного пучка.
4. Предложен численный метод отыскания нормальных волн волновода в рамках самосопряженной модели, использующий линейные конечные элементы и стандартные методы отыскания собственных значений разреженных матриц.
5. На основе этого метода и метода решения скалярной задачи о волноводной дифракции разработан метод решения задачи дифракции волны на стыке двух волноводов в векторной постановке.

Обоснованность и достоверность результатов Обоснованность результатов диссертации опирается на теоретические исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в ЖВМ и МФ, Вестнике МГУ и Вестнике РУДН. Достоверность результатов вычислений по предложенным алгоритмам подтверждается совпадением результатов вычислений в тестовых примерах с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. научном семинаре «Математические методы в естественных науках» (физический ф-т МГУ, рук. – проф. Боголюбов А.Н.) в 2017 и 2018 гг.
2. научном семинаре «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН (рук. – проф. Абрамов С.А.), 27 декабря 2017 г.
3. научном семинаре по вычислительной и прикладной математике ЛИТ ОИЯИ, Дубна, 2018 г.
4. научном семинаре «Математическое моделирование» РУДН, 2018 г.
5. международной конференции Numerical methods and applications. August 20-24, 2018, Borovets, Bulgaria.
6. международной конференции Distributed Computer and Communication Networks, 17–21 сентября 2018 г.
7. 7-ой международной конференции «Проблемы математической физики и математическое моделирование», 25-27 июня 2018 года, НИЯУ МИФИ, Москва.
8. международной конференции «Mathematical Modeling and Computational Physics», 2017 (MMCP2017), Дубна, ОИЯИ, Россия, 3-7 июля 2017
9. 6-ой международной конференции «The problems of mathematical physics and mathematical modelling», НИЯУ МИФИ, Россия, 25-27 мая 2017
10. международной конференции Saratov Fall Meeting – SFM’16 (Saratov, 2016), Саратов, Россия, 27-30 сентября 2016
11. международной конференции «Ломоносовские чтения», 2009, МГУ, Россия, 2009
12. международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Памяти академика А.А. Самарского. К 90-летию со дня рождения, 2009
13. международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ акад. В.А. Садовничего, Москва, механико-математический ф-т МГУ, Россия, 1-5 мая 2009
14. 5-ой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, Россия, Россия, 2008
15. международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая памяти И. Г. Петровского, Москва, Россия, 2007
16. международной конференции «Ломоносовские чтения», 2007, Москва, МГУ, Россия, 2007
17. международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящённая 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа, Новосибирск, 2007
18. международной конференции «Ломоносовские чтения», 2006, МГУ, Россия, 18-27 апреля 2006

Личный вклад. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, самостоятельно предложил представление поля при помощи четырех потенциалов, разработал на основе этого представления и метода конечных элементов методы решения основных задач теории волноводов. Лично автором были разработаны алгоритмы и ряд программ на языке FreeFem++, проведена серия численных экспериментов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 56 печатных изданиях, 44 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в тезисах докладов.

В рамках диссертационного исследования проводились работы в соответствии с темой 200500-0-000 «Компьютерное моделирование и численно-аналитические методы исследования сложных физико-технических систем и инфокоммуникационных технологий», а также проводились работы по гранту РФФИ № 18-07-00567 «Разработка символьно-численных методов и проблемно-ориентированных комплексов программ для волноведущих структур на базе систем компьютерной алгебры и высокопроизводительных вычислительных систем».

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 214 страниц, включая 24 рисунка и 4 таблицы. Список литературы содержит 160 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и задачи работы.

Первая глава посвящена простейшей математической модели, которая описывает распространение волн в одном направлении, а именно скалярной модели волновода. В рамках этой модели заполнение волновода $S \times Z$ веществом описывается кусочно-непрерывной функцией q переменных x,y,z, принимающей только положительные значения, а под полем u в таком волноводе понимают функцию u, удовлетворяющую волновому уравнению и краевому условию Дирихле на боковой поверхности волновода.

Сама симметрия волноводных задач подсказывает разделить переменные на две группы — $(x,y) \in S$ и $(z,t) \in Z \times T$ и рассматривать поля как функции на $Z \times T$ со значением в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$. Такой подход к волноводным задачам был предложен впервые в 2003 г. в нашем исследовании, выполненном совместно с А.Н. Боголюбовым и Ю.В. Мухартовой; этот подход развивает концепцию теории волноводов, предложенную А.С. Зильберглейтом и Ю.И. Копилевичем в 1983 г. В случае монохроматических полей, этот подход позволяет свести волновое уравнение к бесконечномерной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида с операторными коэффициентами.

Ключевой момент при численном решении задач теории волноводов — переход от непрерывных моделей к конечномодовым — описан в диссертации в общем виде как переход от бесконечномерных пространств Соболева к их конечномерным подпространствам. Этот общий взгляд позволил изложить различные подходы к численному решению волноводных задач как переход от непрерывных моделей к дискретным, а метод конечных элементов (МКЭ) и неполный метод Галеркина (МГ) — как методы дискретизации самой модели.

Первая задача теории волноводов — спектральная. Волновод $S \times Z$, заполнение которого q не зависит от z, но может зависит от x,y, называют регулярным. Нетривиальные поля вида

$$\tilde{u}(x,y)e^{ik\beta z - ikct},$$

принято называть *нормальными модами* регулярного волновода. Здесь β — некоторая постоянная из $\mathbb{C}$, коэффициент фазового замедления. Задача об отыскании нормальных мод сводится к задаче на собственные значения для операторного пучка $-k^2\beta^2 A + k^2 Q - E$. В диссертации отмечены основные свойства нормальных мод, их деление на распространяющиеся волны и запертые моды.

Вторая задача теории волноводов — задача о волноводной дифракции. Простейший пример такой задачи — задача о дифракции волны на стыке двух волноводов — подробно рассмотрена в конце первой главе диссертации. Эта задача сформулирована как задача об отыскании по заданной падающей волне коэффициентов прохождения и отражения. Обсуждено доказательство корректности этой задачи, а также вопросы сходимости и консервативности численных методов решения этой задачи. Отмечена связь между этой задачей и задачами линейной алгебры с выделенными переменными.

Вторая глава посвящена исследованию векторной модели волновода. Под электромагнитным полем в закрытом волноводе $S \times Z$, диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ которого являются кусочно гладкими функциями переменных x,y, будем понимать кусочно гладкие векторные поля $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющие 1.) уравнениям Максвелла внутри волновода, 2.) условиям идеальной проводимости стенок волновода и 3.) условиями сопряжения на разрыве проницаемостей.

Примем для краткости, что

$$\vec{A}_\perp = (A_x, A_y, 0)^T \quad \text{и} \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x, 0)^T.$$

Решение первой задачи диссертации дает следующее представление поля через потенциалы:

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \frac{1}{\varepsilon}\nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \frac{1}{\mu}\nabla' u_h. \tag{1}$$

Прежде всего в работе доказано, что условия сопряжения полей на границах разрыва диэлектрической и магнитной проницаемостей и условия идеальной проводимости стенок волновода следуют из условий принадлежности потенциалов u_e, u_h пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$, а потенциалов v_e,v_h — пространству Соболева $W_2^1(S)$. Тем самым был сделан первый шаг к достижению цели диссертации — работать в классических пространствах Соболева.

Затем, в качестве второй задачи, показано, что при переходе к потенциалам мы не теряем решения уравнений Максвелла и не приобретаем новых.

Во-первых, мы действительно не теряем решения, поскольку всякое электромагнитное поле в волноводе, удовлетворяющее в классическом смысле уравнениям Максвелла, условиям сопряжения на границах разрыва диэлектрической и магнитной проницаемостей и условиям идеальной проводимости стенок волновода, представимо при помощи этих потенциалов.

Теорема 1 (Малых М.Д., 2018)**.** Для любого электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$ в волноводе найдутся такие функции $u_e, u_h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$ и $v_e, v_h \in W_2^1(S)$, что равенство (1) оказывается верным тождеством.

Во-вторых, если переписать уравнения Максвелла относительно потенциалов, получается система уравнений, всякое решение которой позволяет восстановить поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла хотя бы в обобщенном смысле. Уравнения Максвелла, записанные относительно потенциалов удобно разбить на две тройки уравнений:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S \varepsilon(\nabla u, \nabla u_e) dxdy = \partial_z \iint\limits_S \varepsilon u E_z dxdy, \\
&\iint\limits_S \frac{1}{\mu}(\nabla u, \nabla u_h) dxdy = -\partial_t \iint\limits_S \varepsilon u E_z dxdy, \\
&\iint\limits_S (\nabla u, \nabla(-E_z + \partial_z u_e + \partial_t u_h)) dxdy = -\partial_t \iint\limits_S \varepsilon\mu \frac{\partial u v_h}{\partial xy} dxdy
\end{aligned} \tag{2}$$

для любой u из $C_0^\infty(S)$ и

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S \frac{1}{\varepsilon}(\nabla v, \nabla v_e) dxdy = \partial_t \iint\limits_S \mu v H_z dxdy, \\
&\iint\limits_S \mu(\nabla v, \nabla v_h) dxdy = \partial_z \iint\limits_S \mu v H_z dxdy, \\
&\iint\limits_S (\nabla v, \nabla(-H_z + \partial_z v_h - \partial_t v_e)) dxdy = \partial_t \iint\limits_S \varepsilon\mu \frac{\partial v u_e}{\partial xy} dxdy.
\end{aligned} \tag{3}$$

для любой v из $C^\infty(S)$. Для обоснования этого утверждения уравнения Максвелла переписаны в обобщенной форме по аналогии с тем, как это делается в краевых задач в резонаторах, но с учетом особенностей геометрии волноводных задач. В том случае, когда потенциалы оказываются достаточно гладкими функциями, по ним восстанавливается поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и условиям сопряжения в классическом смысле.

В конце главы общая теория приложена к задаче об отыскании нормальных мод волновода. Если проницаемости ε, μ изменяются на сечении таким образом, что их произведение $\varepsilon\mu$ остается постоянным, то система уравнений Максвелла, записанных относительно потенциалов, расщепляется на две независимые системы. Первая система содержит только u_e, u_h и E_z, а вторая — только v_e,v_h и H_z.

Теорема 2 (Малых М.Д., 2018)**.** Если проницаемости ε, μ изменяются на сечении таким образом, что их произведение $\varepsilon\mu$ остается постоянным, то нормальные моды такого волновода можно разделить на моды ТМ- и ТЕ- типа.

В частном случае, когда проницаемости постоянны, эта теорема дает хорошо известный результат, принадлежащий А.Н. Тихонову и А.А. Самарскому.

В случае, когда произведение $\varepsilon\mu$ меняется вдоль сечения волновода, происходит, вообще говоря, гибридизация мод, примеры указаны, например, в лекциях Чу (W. C. Chew, 2012). Расщеплению системы уравнений Максвелла (2)-(3) мешают два однотипных члена, которые, следовательно, и описывают процесс гибридизации мод. Удалив их, мы получим для нормальных мод задачи на собственные значения, собственными векторами которых служат ТМ- и ТЕ- моды соответственно. Однако не всякий собственный вектор этих задач соответствует нормальной моде волновода. В диссертации сформулированы достаточные критерии для существования ТМ- и ТЕ- мод.

Пренебрегая гибридными членами, мы получили новую самосопряженную математическую модель, описывающую распространение излучения в волноводе.

Третья глава диссертации посвящена исследованию этой модели и ее места в иерархии моделей распространения излучения по волноводу. Эта модель по построению не учитывает гибридизацию мод, поэтому получающиеся в рамках этой модели моды все еще можно разделить на моды ТЕ- и ТМ-типов. Для определенности численные эксперименты, результаты которых представлены в этой главе, касались ТМ-мод.

В начале третьей главы проведено качественное исследование модели. Всякая нормальная ТМ-волна описывается потенциалами вида

$$u_e = \tilde{u}_e e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad u_h = \tilde{u}_h e^{i\gamma z - i\omega t},$$

где $\tilde{u}_e$ и $\tilde{u}_h \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$ удовлетворяют уравнениям

$$\iint\limits_S \varepsilon(\nabla u, \nabla u_e) dxdy = ik\beta \iint\limits_S \varepsilon u E_z dxdy \tag{4}$$

и

$$\iint\limits_S \frac{1}{\mu}(\nabla u, \nabla u_h)dxdy = ik \iint\limits_S \varepsilon u E_z dxdy, \tag{5}$$

для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$, где $E_z = ik\beta u_e - iku_h$.

Симметричная билинейная форма

$$\iint\limits_S (\nabla u, \nabla \tilde{u})q(x,y)dxdy$$

при любой кусочно гладкой функции q является ограниченной в норме W^1_2, поэтому найдется такой ограниченный самосопряженный оператор A_q, что

$$\iint\limits_S (\nabla u, \nabla \tilde{u})q(x,y)dxdy = (u, A_q\tilde{u}).$$

Симметричная билинейная форма

$$\iint\limits_S u\tilde{u}q(x,y)dxdy$$

при любой кусочно гладкой q является вполне непрерывной в норме W^1_2, поэтому найдется такое ограниченный самосопряженный оператор B_q, что

$$\iint\limits_S u\tilde{u}k(x,y)dxdy = (u, B_k\tilde{u}).$$

Используя стандартную для теории пространств Соболева технику, эту систему уравнений (4) и (5) можно записать в блочном виде

$$\begin{cases} A_\varepsilon \tilde{u}_e = -k^2\beta^2 B_\varepsilon \tilde{u}_e + k^2\beta B_\varepsilon \tilde{u}_h, \\ A_{\frac{1}{\mu}} \tilde{u}_h = -k^2\beta B_\varepsilon \tilde{u}_e + k^2 B_\varepsilon \tilde{u}_h, \end{cases} \tag{6}$$

где $A_\varepsilon, A_{\frac{1}{\mu}}, B_\varepsilon$ — ограниченные самосопряженные операторы, а B_ε — к тому же еще и вполне непрерывный. Это позволило перенести большую часть качественных свойств скалярной модели на самосопряженную векторную модель и доказать:

1. базисность системы нормальных мод волновода,
2. конечность числа мод с вещественным коэффициентом фазового замедления и отсутствие мод с коэффициентом фазового замедления, имеющим одновременно и вещественную, и мнимую часть.

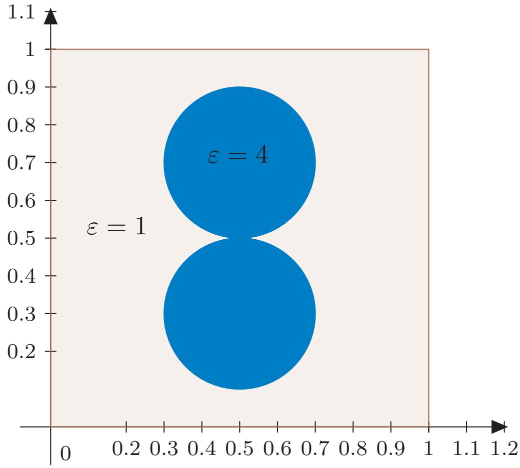

Рис. 1 — Поперечное сечение двухжильного волновода.

Тем самым была решена третья задача настоящей диссертации — описать самосопряженную векторную модель распространения излучения по волноводу на языке четырех потенциалов и перенести на нее известные качественные свойства скалярной модели.

Вторая половина главы посвящена разработке алгоритмов вычисления нормальных мод регулярного волновода в рамках самосопряженной векторной модели. У спектральной задачи (6) в предложенной записи отсутствует бесконечномерное ядро, поэтому любой метод ее численного решения свободен от фиктивных мод («духов»). В частности усечение задачи по МКЭ дает новый численный метод решения спектральной задачи теории волноводов. На основе этого метода разработан

1. алгоритм построения дисперсионной кривой волновода,
2. алгоритм вычисления младших нормальных мод заданного волновода при заданной частоте.

Алгоритмы реализованы в виде программ, написанных на языке FreeFem++, листинги приложены к диссертации. Гибкость языка FreeFem++ позволяет использовать эти программы для исследования волноводов, границы которых можно разбить на дуги, допускающие аналитическую параметризацию.

С целью апробации предложенного метода было проведено исследование спектральных свойств двухжильного волновода, полученных в рамках скалярной и векторной моделей, а также проверено, что эти результаты позволяют исследовать дифракцию ТМ-волны на стыке двух двухжильных волноводов. Вычисления проводились на сервере на базе материнской платы Supermicro X8DTU с двумя процессорами Intel(R) Xeon(R) CPU E5620 (8 ядер, 16 потоков) при 32 ГБ памяти. Постобработка результатов выполнялась в системе компьютерной алгебры Sage.

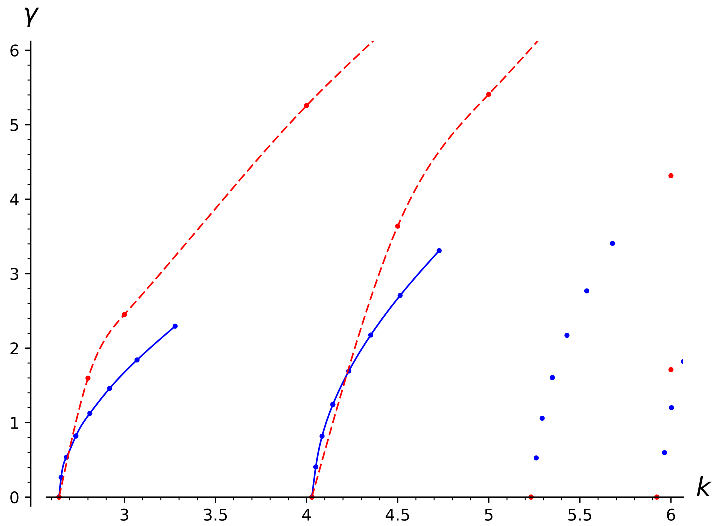

Рис. 2 — Первые две ветви дисперсионной кривой для двухжильного волновода, вычисленные в рамках самосопряженной векторной модели (сплошная линия) и в рамках скалярной модели (пунктир).

Пусть две жилы с $\varepsilon = 4$ вставлены в волновод с $\varepsilon = 1, \mu = 1$, сечением которому служит квадрат, длины сторон которого приняты за единицу длины, см. рис. 1. Дисперсионная кривая представлена на рис. 2. Качественно дисперсионные кривые, полученные в рамках скалярной и самосопряженной векторной моделей, весьма схожи. Они выходят из точек отсечки, совпадающих в рамках обеих моделей, и далее монотонно возрастают способом, напоминающим гиперболу. Только возле точки отсечки дисперсионная кривая скалярной модели растет заметно быстрее чем кривая векторной модели. При больших k ветви выходят на асимптоты, имеющие примерно равный наклон в обеих моделях, то есть примерно $\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} = 2$ для первых двух мод.

В процессе этого исследования оказалось, что качественно ТМ-моды волновода в рамках векторной модели, совпадают с модами, найденными в рамках скалярной модели. Также оказалось, что числа отсечки в обеих моделях совпадают точно. При этом количественно значения коэффициента фазового замедления различаются весьма заметно.

В скалярной модели собственная функция u, отвечающая первой ветви дисперсионной кривой, имела два горба, направленные в одну сторону. В самосопряженной векторном случае обе компоненты собственной функции $\vec{u} = (\tilde{u}_e, \tilde{u}_h)^T$ для первой ветви тоже положительные и сосредоточены в жилах, однако два горба сливаются в один, имеющий максимум в центре. При очень больших k эти горбы все-таки расходятся, в диссертации специально рассмотрен высокочастотный предел. В скалярной модели собственная функция u, отвечающая второй ветви дисперсионной кривой, имела два горба, направленные в разные

$$\boxed{u_e := \frac{u_e}{(u_e, A_\varepsilon u_e)}}$$

$$\boxed{\Delta_{\frac{1}{\mu}} u_h + \varepsilon k^2 (u_h - u_e) = 0, \quad u_h|_{\partial S} = 0, \quad \Rightarrow u_h \in V_h}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{(u_e, A_{\frac{1}{\mu}} u_h)},}$$

$$\boxed{\Delta_\varepsilon u_e + \lambda \varepsilon (u_e - u_h) = 0, \quad u_e|_{\partial S} = 0 \quad \Rightarrow u_e \in V_h}$$

Рис. 3 — Схема цикла, испольуемого в алгоритме 1 ТМ- моды волновода.

стороны. В самосопряженной векторном случае обе компоненты собственной функции $\vec{u} = (\tilde{u}_e, \tilde{u}_h)^T$ имеют ту же форму.

В практических задачах частота ω обычно известна, а коэффициент фазового замедления подлежит вычислению. С этой целью был разработан алгоритм решения спектральной задачи (6) относительно спектрального параметра β при фиксированном значении $k = \omega/c$. Стандартные решатели, встроенные в FreeFem++, не справились с отысканием собственных значений этой задачи в силу своеобразия реализации условий Дирихле во FreeFem++. Поэтому, на основе классического метода степеней, был разработан оригинальный алгоритм отыскания собственных значений, учитывающий специфику задачи (6).

Алгоритм 1 (отыскания нормальной ТМ- моды волновода)**.** Дано:
– волновое число k,
– дуги $C_1, C_2, \ldots,$ из которых состоит граница волновода (задаются в параметрической форме при помощи элементарных функций параметра),
– диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ как кусочно постоянные функции на S,
– вспомогательные параметры: относительная точность δ вычисления собственного значения, максимальное число итераций и число точек сети на каждой из дуг границы.
– начальное приближение для u_e.

Задав пространство конечных элементов V_h, аппроксимирующее $\overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$, в цикле выполнить следующие шаги:
1. нормировать вектор u_e, заменив u_e на $u_e/(u_e, A_\varepsilon u_e)$,
2. вычислить следующее приближение для u_h, равной

$$u_h = -\left(\frac{1}{k^2} A_{\frac{1}{\mu}} - B_\varepsilon\right)^{-1} B_\varepsilon u_e,$$

решив краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{1}{\mu}} u_h + \varepsilon k^2 (u_h - u_e) = 0, \\ u_h|_{\partial S} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

3. вычислить следующее приближение к собственному значению пучка $A - \lambda B$ по формуле
$$\lambda = \frac{1}{(u_e, A_{\frac{1}{\mu}} u_h)},$$
4. вычислить следующее приближение для u_e как
$$A_\varepsilon u_e = -k^2 \lambda (u_e - u_h),$$
решив краевую задачу для уравнения Пуассона
$$\begin{cases} \Delta_\varepsilon u_e + \lambda_n \varepsilon (u_e - u_h) = 0, \\ u_e|_{\partial S} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Условие выхода из цикла: успех при
$$\frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|} < \delta$$
или неудача, если сделано максимальное число шагов итерации.

Для наглядности описанный цикл схематически изображен на рис. 3. Алгоритм не требует вычисления каких-либо матриц и сводится к многократно повторению решения краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона. При этом отмеченное выше своеобразие реализации условий Дирихле во FreeFem++ нисколько не портит свойства задачи.

На основе метода вычисления нормальных мод волновода и метода решения скалярной задачи о волноводной дифракции, описанного в первой главе диссертации, разработан метод решения задачи дифракции волны на стыке двух волноводов в полной векторной постановке. Показана состоятельность разработанного метода решения спектральной задачи теории волноводов как составной части метода решения задачи волноводной дифракции.

В конце главы описано место самосопряженной векторной модели в иерархии моделей распространения излучения по волноводу. Показано, что она занимает промежуточное положение между скалярной моделью и полной векторной. Она, очевидно, много лучше скалярной модели, поскольку совпадает с полной векторной моделью для полого волновода и даже волновода, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого меняются таким образом, что их произведение $\varepsilon\mu$ остается постоянным. Полная векторная модель получается из самосопряженной вполне непрерывным возмущением.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1. Предложено представление (1) электромагнитных полей в волноводе при помощи четырех потенциалов, подобранных таким образом, который позволяет заменить условия сопряжения электромагнитных полей на границах разрыва проницаемостей условиями принадлежности потенциалов стандартным пространствам Соболева.

2. Обосновано применение этого представления при решении основных задач теории волноводов. С этой целью доказано, что:
   а) всякое электромагнитное поле в волноводе, удовлетворяющее в классическом смысле уравнениям Максвелла, условиям сопряжения на границах разрыва диэлектрической и магнитной проницаемостей и условиям идеальной проводимости стенок волновода, представимо при помощи этих потенциалов,
   б) всякое решение уравнений для потенциалов, которые получается формально из уравнений Максвелла, доставляет обобщенное решение уравнений Максвелла.
3. Описана математическая модель распространения излучения в волноводе (самосопряженная векторная модель), занимающая в иерархии моделей промежуточное положение между хорошо изученной скалярной моделью и полной векторной моделью, основанной на уравнениях Максвелла.
4. Проведено теоретическое исследование качественных спектральных свойств этой модели, а именно, доказаны:
   а) базисность системы нормальных мод волновода,
   б) разделение нормальных мод на трансверсально электрические и трансверсально магнитные,
   в) конечность числа мод с вещественным коэффициентом фазового замедления,
   г) отсутствие мод с коэффициентом фазового замедления, имеющим одновременно ненулевую и вещественную, и мнимую часть,
5. На основе метода конечных элементов предложен метод вычисления нормальных мод в рамках самосопряженной векторной модели, показано, что этот метод не приводит к появлению ложных мод («духов»).
6. Показано, как методы анализа скалярной модели дифракции на стыке волноводов переносятся на самосопряженную векторную модель.
7. В рамках самосопряженной векторной модели предложены и реализованы в виде программ на языке FreeFem++
   а) алгоритм построения дисперсионных кривых волноводов,
   б) алгоритм вычисления нормальных мод,
   в) алгоритм решения задачи о дифракции электромагнитного излучения на стыке волноводов.
8. Состоятельность метода вычисления нормальных мод продемонстрирована в серии численных экспериментов с двухжильным волноводом.
9. Состоятельность метода вычисления нормальных мод, как составной части метода решения задачи о волноводной дифракции, продемонстрирована в серии численных экспериментов со стыком двух двухжильных волноводов.

10. Исследовано место самосопряженной векторной модели в иерархии моделей распространения излучения в волноводе:
    а) показано, что самосопряженная векторная модель качественно схожа со скалярной, но количественно от нее отличается весьма заметно. Количественное сравнение проведено на примере двухжильного волновода;
    б) показано, что самосопряженная векторная модель совпадает с полной векторной моделью в том случае, когда заполняющее вещество имеет постоянный показатель преломления;
    в) показано, что в случае переменного показателя преломления векторная модель, непосредственное исследование которой затруднено гибридизацией нормальных мод, представляет собой вполне непрерывное возмущение предложенной модели.

В настоящей диссертации разработаны теоретические положения, совокупность которых позволяет переносить численные методы, разработанные для скалярной модели, на векторную, а также количественно охарактеризовать применимость скалярной модели в той или иной конкретной ситуации. Сознательно использовались самые стандартные численные методы и в первую очередь линейные конечные элементы, поскольку было важно убедиться в том, что даже без специфических ухищрений предложенный метод дает приемлемые результаты за разумное время. Оптимизация созданных на его основе алгоритмов не входила в цели настоящего диссертационного исследования. Рассмотренные в настоящей работе примеры носят иллюстративный характер.

Подводя итог всему представленному исследованию, можно утверждать, что цель данной работы — разработка методов анализа распространения электромагнитного излучения в волноводах, основанное на представлении электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов, достигнута. При этом выделена и исследована самосопряженная векторная модель, занимающая промежуточное положение между скалярной и полной векторной моделями волновода. Однако исследованием этой модели не исчерпывается область применения представления поля при помощи четырех потенциалов, а открывает новое направление в исследовании задач теории волноводов.

Следует заметить, что качественные свойства спектральной задачи теории волноводов в полной векторной постановке пока не удалось исследовать в полной мере, поскольку эта задача не является самосопряженной. В канд. дисс. А.А. Тютюнник (2018 г., науч. рук. Л.А. Севастьянов) на основе этого представления и метода Галеркина был предложен символьно-численный алгоритм для расчета нормальным мод регулярных закрытых волноводов произвольного поперечного сечения с произвольной кусочно-постоянной быстро меняющейся функцией диэлектрической проницаемости. Численные эксперименты, проведенные на его основе, свидетельствуют о появлении разного рода аномалий на дисперсионных кривых волноводов с диэлектрическими вставками, в том числе появление мнимых добавок к квадратам коэффициентов фазового замедления нормальных мод. Поэтому в рамках этой модели невозможно разделить моды на бегущие по волноводу и эванесцентные (запертые), а гибридизация не дает возможности поделить моды на моды TE- и TM- типов. Это приводит к очевидным трудностям при интерпретации результатов численных экспериментов.

Несмотря на это, полную векторную модель можно рассматривать как вполне непрерывное возмущение самосопряженной модели, по порядку величины равное амплитуде изменения произведения $\varepsilon\mu$ в волноводе. Даже если это возмущение не мало, естественный способ решения спектральной задачи в полной векторной постановке — метод последовательных итераций. При этом гибридные члены, которые удаляются из уравнений Максвелла в рамках самосопряженной модели, дают естественную меру применимости самосопряженной модели. Такой подход дает возможность распространить классификацию мод, данную в рамках самосопряженной модели, на моды возмущенной задачи.

Самосопряженная векторная модель и модели, получающиеся путем ее возмущения, могут быть употреблены для создания комплексов программ для моделирования распространения волноводных мод широко круга устройств СВЧ и оптического диапазона, а также для их проектирования. Векторная модель никогда не станет проще скалярной, но ее однократное использование, например, в задачах проектирования позволит оценить величину ошибки скалярной модели.

В качестве очевидных задач на ближайшее будущее можно указать исследование спектральных свойств волноводов, содержащих десятки и сотни жил, и проведение широкого сравнения результатов, получающихся по МКЭ в рамках алгоритма, описанного в настоящей диссертации, и по методу Галеркина в рамках алгоритма, предложенного в канд. дисс. А.А. Тютюнник (2018 г., науч. рук. Л.А. Севастьянов). Решение этих задач требует заметно больших вычислительных возможностей, в том числе привлечения вычислений на кластере, оптимизации и в особенности распараллеливания предложенных алгоритмов.

Предложенный в диссертации метод решения задачи о дифракции электромагнитного излучения на стыке двух волноводов допускает прямое обобщение на задачи дифракции на протяженных телах. Исследование таких задач, в особенности, дифракции на волноводных линзах представляет большой практический и теоретический интерес, в особенности в связи с тем, что развитый метод описывает решение не только в дальней зоне, но и возле тех точек, которые геометрическая оптика рассматривает как фокусы линз.

Публикации автора по теме диссертации

1. О базисности системы корневых векторов радиоволновода / А. Н. Боголюбов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2000. — № 6. — С. 17—20.
2. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126—129.

3. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2001. — № 5. — С. 23—25.
4. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О ловушечных модах волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2001. — № 6. — С. 69—70.
5. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Свешников А. Г.* О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 385, № 3. — С. 744—746.
6. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода // Журнал радиоэлектроники. — 2002. — № 2. — С. 1—25.
7. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Спектральные свойства волноводов с неоднородным заполнением // Журнал радиоэлектроники. — 2002. — № 5. — С. 1—28.
8. *Малых М. Д.* Спектральные свойства волноведущих систем // «Прикладная математика и программирование». Труды факультета вычислительной математики и кибернетики. — 2002. — № 12. — С. 43—49.
9. *Малых М. Д.* О поведении вложенных в непрерывный спектр собственных значений при изменении заполнения волновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2002. — № 1. — С. 61—62.
10. *Малых М. Д.* Поведение вложенных собственных значений при малых возмущениях // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2002. — № 3. — С. 13—15.
11. *Малых М. Д.* Замечание о неустойчивости собственных значений уравнения Гельмгольца // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2002. — № 6. — С. 29—31.
12. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* Об одном примере ловушечных мод в нерегулярном волноводе // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 1. — С. 147—152.
13. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Замечание об условиях излучения для нерегулярного волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 4. — С. 585—588.
14. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* К теории возмущений спектральных характеристик волноведущих // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 7. — С. 1049—1061.
15. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* О ловушечных модах нерегулярного волновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2003. — № 3. — С. 43—44.

16. О ловушечных волноводных модах, убывающих степенным / А. Н. Боголюбов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2003. — № 5. — С. 6—9.
17. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Пономарева В. Л.* О спектральных свойствах электромагнитного волновода с неоднородным заполнением // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2004. — № 3. — С. 10—12.
18. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Ермишин Д. И.* О резонансных свойствах волновода со вставкой // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2004. — № 5. — С. 3—6.
19. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В.* Моды для волновода с граничными условиями Щукина-Леонтовича // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2004. — № 6. — С. 7—10.
20. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А.* Временная асимптотика поля, возбуждаемого в волноводе гармоническим током // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 12. — С. 2219—2231.
21. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* К теореме о неустойчивости вложенных ловушечных мод // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 5. — С. 67—70.
22. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* О распространении понятия обобщенного решения задачи Дирихле на решения, не принадлежащие L^2 // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 4. — С. 12—14.
23. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В.* О спектральной задаче для волновода с импедансными граничными условиями // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 6. — С. 55—56.
24. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* О ловушечных модах электромагнитного волновода с неоднородным заполнением // Радиотехника и электроника. — 2005. — Т. 50, № 2. — С. 218—222.
25. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В.* Об удовлетворяющем условию излучения решении краевой задачи для произвольного эллиптического оператора // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 12. — С. 2230—2236.
26. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В.* Об условиях излучения для импедансного волновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 1. — С. 3—6.
27. *Малых М. Д.* О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 4. — С. 3—5.

28. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А.* Принцип предельной амплитуды для волновода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 5. — С. 9—13.

29. *Малых М. Д.* Об одном возможном обобщении понятия пространства Соболева // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2007. — № 1. — С. 25.

30. *Малых М. Д.* Об обобщении теоремы Джонса // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2007. — № 2. — С. 15.

31. *Малых М. Д.* О значении элемента пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ в точке области X // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2007. — № 3. — С. 6.

32. *Малых М. Д.* Геометрическая интерпретация тензора электромагнитного поля с ортогональными компонентами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2008. — № 6. — С. 9.

33. *Малых М. Д.* О критерии пустоты дискретного спектра задачи Дирихле для уравнения $\Delta v + \lambda v = 0$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 288—292.

34. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Мухартова Ю. В.* Существование обобщенного преобразования Фурье решения как условие излучения для класса задач, обобщающих задачи возбуждения колебаний в регулярных волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 293—300.

35. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А.* Зависимость эффективности апостериорной оценки точности эллиптической краевой задачи от входных данных и параметров алгоритма // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2009. — № 1. — С. 18—22.

36. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А.* Двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа и их применение в задачах математической теории волноводов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. — 2009. — Т. 10. — С. 83—93.

37. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Об одном классе нелокальных нелинейных уравнений параболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1056—1063.

38. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Белов А. А.* Моделирование волновода со вставкой, обладающей квадратичной нелинейностью // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2012. — № 5. — С. 49—51.

39. *Малых М. Д.* О моделях с парциальным распределением точности // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2013. — № 3. — С. 67—80.

40. *Малых М. Д.* О распрямлении локально деформированного волновода // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2014. — № 2. — С. 126—132.

41. *Малых М. Д.* О решениях уравнений Максвелла на базе геометрической оптики // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2015. — № 1. — С. 37—44.

50. *Malykh M. D.*, *Nikolaev N. E.*, *Sevastianov L. A.* The geometrical description of electromagnetic radiation // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2016. — Vol. 30, no. 15. — P. 2055—2066.

42. Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплёночной волноводной линзе / Д. В. Диваков [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2017. — № 1. — С. 56—68.

51. The geometrical description of electromagnetic radiation / M. D. Malykh [et al.] // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2016. — Vol. 30, no. 15. — P. 2055—2066.

52. The numerical-analytical implementation of the cross-sections method to the open waveguide transition of the “horn” type / D. V. Divakov [et al.] // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. — 2017. — Vol. 10337. — 103370G.

43. *Малых М. Д.* О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 320—329.

44. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М. Д. Малых [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39—48.

53. Quasi-Vector Model of Propagation of Polarized Light in a Thin-Film Waveguide Lens / D. V. Divakov [et al.] // EPJ Web of Conferences. — 2018. — Vol. 173. — P. 02007.

54. Diffraction of Electromagnetic Waves on a Waveguide Joint / M. D. Malykh [et al.] // EPJ Web of Conferences. — 2018. — Vol. 173. — P. 02014.

55. The Application of Helmholtz Decomposition Method to Investigation of Multicore Fibers and Their Application in Next-Generation Communications Systems / D. V. Divakov [et al.] // Communications in Computer and Information Science. Vol. 919 / ed. by V. Vishnevskiy, D. Kozyrev. — DCCN 2018: Distributed Computer, Communication Networks. Cham : Springer, 2018. — P. 469—480.
56. *Malykh M. D., Sevastianov L. A., Tiutiunnik A. A.* Calculation of normal modes of the closed waveguides in general vector case // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. — 2018. — Vol. 10717. — 107170Z.
45. On the calculation of electromagnetic fields in closed waveguides with inhomogeneous filling / D. V. Divakov [et al.] // 9th international conference «Numerical methods and applications». August 20-24, 2018, Borovets, Bulgaris. — 2018. — P. 44—44.
46. Diffraction of electromagnetic waves on a waveguide joint / M. Malykh [et al.] // Mathematical Modeling and Computational Physics (MMCP'2017): Book of Abstracts of the International Conference (Dubna, July 3-7, 2017). — 2017. — P. 142—142.
47. Modeling the propagation of polarized light in a thin-film waveguide lens / D. V. Divakov [et al.] // 6th international conference «The problems of mathematical physics and mathematical modelling». Books of abstracts. — 2017. — P. 122—123.
48. Quasi-vector model of propagation of polarized light in a thin-film waveguide lens / D. V. Divakov [et al.] // Mathematical Modeling and Computational Physics (MMCP'2017): Book of Abstracts of the International Conference (Dubna, July 3-7, 2017). — 2017. — P. 100—100.
49. *Malykh M. D., Nikolaev N. E., Sevastianov L. A.* Phase-ray coordinate system corresponding to Maxwell's equations solution // Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016). Vol. 2. — 2016. — P. 202—211.

Малых Михаил Дмитриевич

Разработка методов численного анализа закрытых электромагнитных волноводов

Рассматривается закрытый волновод постоянного поперечного сечения с идеально проводящими стенками. Предполагается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости волновода не меняются вдоль его оси и описываются кусочными постоянными функциями. Вместо разрывных поперечных компонент электромагнитного поля используются четыре потенциала, при этом условия идеальной проводимости стенок волновода и условия сопряжения на разрывах проницаемостей записываются как условия принадлежности этих потенциалов пространствам Соболева. Это позволяет указать новый подход к исследованию спектральных свойств волноводов. Во-первых, мы можем теоретически исследовать свойства системы нормальных мод волновода, заполненного неоднородным веществом. Во-вторых, мы можем предложить новую технику для вычисления нормальных волн, используя стандартные конечные элементы. Представлены результаты численных экспериментов во FreeFem++.

Malykh, Mikhail D.

Methods of the numerical analysis of the closed electromagnetic waveguides

We consider a closed waveguide of a constant simply connected cross-section with ideally conducting walls. We assume that the filling of the waveguide doesn’t change along its axis and is described by the piecewise constant functions defining on the waveguide cross-section. Instead of noncontinuous cross-components of an electromagnetic field we offer to use four potentials. Instead of conditions of ideal conductivity of waveguide walls and conditions on ruptures of filling we have the conditions of the belonging of the potentials to standard Soboblev spaces. This statement give us a new approach to investigations of spectral properties of waveguides. First, we can theoretically investigate properties of a system of waveguide normal modes. Secondly, we can offer new technique for the calculation of the normal waves using standard finite elements. Results of several numerical experiments in FreeFem++ are presented.

Малых Михаил Дмитриевич

Разработка методов численного анализа закрытых электромагнитных волноводов

Автореф. дис. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 150 экз.
Типография ______________________________________