На правах рукописи

Ракитянский Александр Семенович

МАКСИМАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫЕ СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ SL(n, R)

01.01.01-математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2000 год

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Тамбовского государственного университета им. Г.Р.Державина

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор В.Ф.МОЛЧАНОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Д.П.ЖЕЛОБЕНКО
доктор физико-математических наук, профессор В.-Б.К.РОГОВ

Ведущая организация:
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится "16" марта 2000 г. в 15 час. 30 мин.
на заседании диссертационного совета К 053.22.23 в Российском университете дружбы народов по адресу: Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 485.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу:
117198 г.Москва, ул.Миклухо-Маклая, 6.
Автореферат разослан "2" февраля 2000 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент
М.В.ДРАГНЕВ

A2000
1699

Общая характеристика работы.

Актуальность темы исследования. Под гармоническим анализом на однородных пространствах G/H обычно понимается разложение квазирегулярного представления группы G сдвигами в пространстве $L^2(G/H)$ по инвариантной мере. Это представление унитарно. Широкий и очень важный класс однородных пространств G/H образуют полупростые симметрические пространства. Для них решение задачи о разложении квазирегулярного представления продвинуто далеко вперед: Хариш-Чандра, И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич – для римановых симметрических пространств (60-е годы), Хариш-Чандра для полупростых групп Ли (70-е годы), В. Ф. Молчанов для пространств ранга 1 (80-е годы), Н. Бопп, П. Харанк, С. Сано – для фактор-пространств комплексных групп по их вещественным формам, П. Делорм, Э. ван ден Бан, Г. Шлихткрулль – некоторые версии формулы Планшереля для общего случая (90-е годы). Однако, кроме этой (классической) задачи, в гармоническом анализе имеется еще много других, связанных с изучением представлений в пространствах функций на G/H с нелокальным скалярным произведением или даже унитарных в индефинитном смысле. В частности, такие задачи естественно появляются при построении квантования в духе Ф. А. Березина на полупростых симметрических пространствах, которые являются симплектическими многообразиями (В. Ф. Молчанов, Г. ван Дейк и их сотрудники).

Одним из примеров таких пространств (имеющих большое значение) является пространство

$$G/H = \mathrm{SL}(n, R)/\mathrm{S}(\mathrm{GL}(p, R) \times \mathrm{GL}(q, R)),\ p + q = n. \qquad (1)$$

Оно есть обобщение однополостного гиперболоида в R^3, который получается при $n = 2, p = q = 1$. В самом деле, этот гиперболо-

...АЛЬНАЯ
БИБЛИОТЕКА
С Петербург
ОЭ 2000 акт 68

ид есть $\mathrm{SL}(2,R)/\mathrm{GL}(1,R)$.

Как известно, группа $\mathrm{SL}(2,R)$ является ключевым примером в теории представлений. В частности, гармонический анализ на однополостном гиперболоиде важен как сам по себе, так и как источник различных общих идей.

Пространство (1) – полупростое, псевдориманово, симплектическое, оно относится к классу пара-эрмитовых симметрических пространств первой категории [1] [2]. Оно имеет размерность $2pq$ и ранг $\min\{p,q\}$.

Построение квантования на пространстве (1) и изучение тесно связанных с квантованием так называемых канонических представлений приводит к задаче о разложении тензорных произведений представлений группы $\mathrm{SL}(n,R)$, относящихся к максимально вырожденным сериям, связанным с пространством (1). Это – представления группы $\mathrm{SL}(n,R)$, индуцированные характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп $P^{\pm}$, для которых H является подгруппой Леви. Это – подгруппы верхних и нижних блочно треугольных матриц.

В связи с этим возникает задача об исследовании самих этих максимально вырожденных представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$, $\mu \in C$, $\varepsilon = 0,1$.

Случай $q=1$ (или $p=1$) был исследован в работе Г. ван Дейка и В.Ф.Молчанова [3].

Случай $p>1$, $q>1$ оказывается значительно более трудным. Это связано с тем, что в этом случае ранг пространства G/H, а также ранг многообразия Грассмана, в функциях на котором реализуются представления, больше 1. Здесь имеется только один частный результат: в работе Д. Барбаша, С. Сахи, Б. Спех [4] для $p=q$ пред-

[1]Kaneyuki S., Kozai M. Paracomplex structures and affine symmetric spaces. Tokyo J. Math., 1985, vol. 8, No. 1, 81–98

[2]Molchanov V. F. Quantization on Para-Hermitian Symmetric Spaces. Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, 1996, vol. 175, 81–85

[3]Dijk G. van, Molchanov V. F. Tensor products of maximal degenerate representations of the group $\mathrm{SL}(n;R)$. J. Math. Pures Appl., 1999, t. 78, No. 1, 99–119

[4]Barbash D., Sahi S., Speh B. Degenerate series representations for $\mathrm{GL}(2n,\mathbf{R})$ and Fourier analysis. Symp. Math., 1989, vol. 31, 45–69

ложена некоторая характеризация инвариантных подпространств в случае, если имеется конечномерное неприводимое подпространство.

Цель работы. В предлагаемой работе мы исследуем представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ группы $\mathrm{SL}(n,R)$ для случая $q=2$ (мы считаем, что $n \geq 4$). В этом случае ранг пространства (1) и соответствующего многообразия Грассмана равен 2, поэтому мы называем наши представления "максимально вырожденными представлениями ранга 2."

Мы находим: различные реализации представлений, их структуру (приводимость, неприводимость, композиционные ряды в приводимом случае), сплетающие операторы (как в матричном, так и интегральном виде), находим инвариантные полуторалинейные формы и, наконец, выясняем, когда наши представления или их подфакторы унитаризуемы.

Методы исследования. Мы используем как достаточно традиционные методы (аппарат теории представлений, ограничение на максимальную компактную подгруппу, действие некоторых операторов Ли,...), так и некоторые новые методы (барьерные функции, сферические функции, H-инварианты,...).

Научная новизна. В диссертации впервые:

а) исследована структура представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ группы $\mathrm{SL}(n,\mathrm{R})$: приводимость, неприводимость, структура инвариантных подпространств;

б) найдены все сплетающие операторы для этих серий представлений – как в матричном, так и в интегральном виде;

в) найдены все инвариантные полуторалинейные формы, все инвариантные эрмитовы формы;

г) найдены все унитаризуемые представления;

д) исследован гармонический анализ на многообразиях Грассмана двумерных ориентированных подпространств в R^n;

е) найдены радиальные части дифференциальных операторов, являющихся образующими в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на указанном многообразии Грассмана, вычислены собственные числа этих операторов на неприводимых подпространствах.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы как в математике – в гармоническом анализе на однородных пространствах и теории представлений групп Ли, так и в теоретической физике –, например, при изучении квантования на однородных пространствах и вопросов, с ним связанных.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на

– Международной конференции "Классическая и квантовая геометрия однородных пространств", Москва, 1994;

– Международной летней школе-семинаре "Гармонический анализ на однородных пространствах", Тамбов, 1996;

– Семинаре по функциональному анализу профессора В.Ф. Молчанова, ТГУ, г.Тамбов;

– Научных конференциях преподавателей и сотрудников Тамбовского государственного пединститута – университета;

– Научных конференциях преподавателей и студентов Оренбургского государственного пединститута – педуниверситета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 15 параграфов, объединенных в две главы: в первой рассматривается случай $n > 4$; во второй рассматривается случай $n = 4$. Список литературы, включенный в диссертацию, содежит 32 наименования. Полный объем диссертации (с оглавлением) 108 страниц.

Содержание работы.

В первых двух параграфах (§§1, 2) мы приводим основные сведения о группе $G = \mathrm{SL}(n, R)$. Здесь $n \geq 4$. Мы рассматриваем разбиение $n = (n-2)+2$ и записываем матрицы из G в блочном виде соответственно этому разбиению. Пусть P^+ и P^- – подгруппы соответственно верхних и нижних блочно треугольных матриц (это – максимальные параболические подгруппы). Мы пишем основные разложения, связанные с этими подгруппами: разложения Гаусса, "анти-Гаусса", Ивасавы, "анти-Ивасавы". Отсюда мы получаем меры на пространствах флагов $G/P^\pm$ в неоднородных координатах, инвариантные относительно максимальной компактной подгруппы $K = \mathrm{SO}(n)$.

Начиная с §3 и до §11 включительно мы рассматриваем общий случай $n > 4$.

В §3 мы сообщаем некоторые сведения о многообразии Штифеля $S = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ и гармоническом анализе на нем [5] [6].

Пусть $G = \mathrm{SL}(n, R)$ действует на R^n справа: $x \to xg$. В соответствии с этим мы записываем вектор $x \in R^n$ в виде строки: $x = (x_1, ..., x_n)$.

Многообразие Штифеля состоит из упорядоченных пар (u, v) ортогональных единичных векторов из R^n. Оно может быть реализовано как совокупность матриц s размеров $2\times n$ с условием $ss' = E$. На многообразии S естественным образом действуют: группа K умножениями справа: $s \to sk, k \in K$, и группа $\mathrm{O}(2)$ умножениями слева: $s \to rs, r \in \mathrm{O}(2)$.

Квазирегулярное представление U группы K на S содержит не-

[5]Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970, 664 с.

[6]Strichartz R. S. The explicit Fourier decomposition of $L^2(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-m))$, Canad. J. Math., 1975, vol. 27, 294–310.

приводимые представления π_ν группы K со старшими весами

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, 0, ..., 0), \tag{2}$$

всего $[n/2]$ координат, ν_1, ν_2 – целые, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 0$. Представление π_ν входит в разложение представления U с кратностью $\nu_1 - \nu_2 + 1$. Подпространства, в которых действуют π_ν, состоят из гладких функций (из ограничений на S многочленов от матричных элементов матриц s).

В §§4, 5, 6, 7 мы исследуем гармонический анализ на многообразии Грассмана $\Gamma = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO} \times \mathrm{SO}(n-2)$ двумерных ориентированных подпространств в R^n. Здесь мы опирались на работы[7 8 9].

Для плоскости $\gamma \in \Gamma$ мы обозначаем через $-\gamma$ ту же плоскость с противоположной ориентацией. Пусть $d\gamma$ – мера на Γ, инвариантная относительно K, ее выражение в неоднородных координатах было найдено в §2.

Сопоставим точке $s = (u, v) \in S$ плоскость $\sigma \in \Gamma$, порождаемую векторами u, v. Мы получим проекцию $S \to \Gamma$. Функции на Γ мы можем рассматривать как функции φ на S, инвариантные относительно умножения слева на элементы из $\mathrm{SO}(2)$:

$$\varphi(rs) = \varphi(s),$$

где $r \in \mathrm{SO}(2)$.

Пусть π – квазирегулярное представление группы K на Γ. Неприводимые компоненты его – такие же, как у его ограничения – обозначим его снова π – на пространство $\mathcal{D}(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$. Оно распадается в прямую сумму представлений $\pi^{(\varepsilon)}, \varepsilon = 0, 1$, действующих в подпространствах $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, состоящих из функций φ четности ε:

[7] Helgason S. Differential geometry and symmetric spaces. New-York-London: Acad. Press, 1962, 486 p. (Пер. на рус. яз.: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.– М.: Мир, 1964, 533 с.)

[8] Helgason S. Groups and geometric analysis. New York, etc.: Acad. Press, 1984. (Пер. на рус. яз.: Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987, 735 с.)

[9] Молчанов В. Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. / ВИНИТИ, том 59, 1990, 5–144

$\varphi(-\gamma) = (-1)^\varepsilon \varphi(\gamma)$.

Для удобства отождествим старшие веса (2) с векторами $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ на плоскости и будем называть последние тоже старшими весами.

Обозначим через $N_\varepsilon, \varepsilon = 0, 1$, множество векторов $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ с целочисленными координатами, для которых $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 0$ и $\nu_1 \equiv \nu_2 \equiv \varepsilon$ (здесь и дальше знак сравнения обозначает сравнение по модулю 2).

В разложение представления $\pi^{(\varepsilon)}$ входят с кратностью 1 неприводимые представления π_ν, для которых $\nu \in N_\varepsilon$.

Мы даем явное описание неприводимых подпространств $H_\nu \subset \mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, в которых действуют π_ν.

Сферические функции Φ_ν из H_ν выражаются через многочлены Коорнвиндера[10].

Это – многочлены от двух переменных, ортогональные относительно некоторой меры в некоторой области на плоскости. Коорнвиндер ввел их, в частности, для изучения гармонического анализа на многообразии Грассмана Γ_0 неориентированных двумерных плоскостей в R^n. В §6 мы приводим описание этих многочленов. В §5 мы исследуем образующие Δ_1 и Δ_2 в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на многообразии Γ. Эти операторы – второго и четвертого порядков, первый из них оператор Лапласа-Бельтрами. Мы находим явно радиальные части этих операторов, которые не приводим здесь ввиду их громоздкости.

Подпространства H_ν являются собственными для Δ_1 и Δ_2 с собственными числами $\lambda_1(\nu)$ и $\lambda_2(\nu)$ соответственно:

$$\lambda_1(\nu) = \nu_1(2 - n - \nu_1) + (4 - n - \nu_2),$$

$$\lambda_2(\nu) = (\nu_1 + 1)(\nu_1 + n - 3)\nu_2(\nu_2 + n - 4).$$

[10] Koornwinder T., Harmonics and spherical functions on Grassmann manifolds of rank two and two-variable analogues of Jacobi polynomials. Lect. Notes Math., 1977, vol. 171, 141–154

В §8 мы определяем серии представлений

$$T^{\pm}_{\mu,\varepsilon} = \mathrm{Ind}(G, P^{\mp}, \omega_{\mp\mu,\varepsilon}),$$

где $\mu \in C, \varepsilon = 0,1$, группы G, индуцированных характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп $P^{\pm}$, – максимально вырожденные серии "ранга 2". Характер $\omega_{\mu,\varepsilon}$ группы $P^{\pm}$ определяется формулой:

$$\omega_{\mu,\varepsilon}(p) = (\det c)^{\mu,\varepsilon},$$

где c – правый нижний 2×2-блок матрицы $p \in P^{\pm}$. Мы используем следующее обозначение для характера группы R^*: $t^{\mu,\varepsilon} = |t|^{\mu}\mathrm{sgn}^{\varepsilon} t$. Мы рассматриваем реализации представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ в компактной и некомпактной картинах.

В изучении представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ (§§9-11) мы следуем в основном схеме работ [11] [12].

В §9 мы исследуем структуру представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ – с помощью ограничения на максимально компактную подгруппу K.

Центральное место здесь занимает теорема 9.6, которая дает в явном виде "коэффициенты зацепления K-типов". А именно, пусть Z_0 – диагональная матрица с диагональю $\frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n}, \frac{2}{n} - 1, \frac{2}{n} - 1$. Это – элемент из алгебры Ли группы G, являющийся базисным в централизаторе группы $L = K \cap P^{\pm}$. В представлении $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ ему отвечает оператор $\mp 2\mathcal{L}_{\mu}$, где $\mathcal{L}_{\mu}$ – некоторый дифференциальный оператор первого порядка от двух переменных (от аргументов сферических функций).

Теорема 9.6 утверждает, что оператор $\mathcal{L}_{\mu}$ переводит сферическую функцию Φ_{ν} в линейную комбинацию ее самой и четырех "соседних"

[11] Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Мат. сб., 1970, том 81, No. 3, 358–375

[12] Молчанов В. Ф. Представления псевдоунитарной группы, связанные с конусом. Функцион. анализ: Межвуз. сб., Ульяновск, 1984, Вып. 22, 55–66

сферических функций:

$$\mathcal{L}_\mu \Phi_\nu = (2\mu + n)\gamma_0(\nu)\Phi_\nu + \sum_{i=1}^{4} \gamma_i(\nu)\beta_i(\mu;\nu)\Phi_{\nu+2e_i},$$

где e_i – следующие четыре вектора на плоскости:

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), e_3 = (0,-1), e_4 = (-1,0),$$

γ_i – некоторые коэффициенты, а β_i - "барьерные" функции: пусть $\nu = (p,q)$, тогда

$$\begin{aligned}
\beta_1(\mu;\nu) &= \mu - p,\\
\beta_2(\mu;\nu) &= \mu + 1 - q,\\
\beta_3(\mu;\nu) &= \mu + n - 3 + q,\\
\beta_4(\mu;\nu) &= \mu + n - 2 + p.
\end{aligned}$$

Назовем прямую $\beta_i(\mu,\nu) = 0$ на плоскости векторов $\nu = (p,q)$ барьером для представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$, если эта прямая пересекается с N_ε и пересечение $\mathrm{N}_\varepsilon \cap \{\beta_i(\mu,\nu) \geq 0\}$ отлично от N_ε. Для того чтобы прямая $\beta_i = 0$ была барьером, необходимо, чтобы μ было целым. Для данного представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ количество барьеров не превосходит 1.

Обозначим $\mu^* = -\mu - n$. Прямая $\beta_i = 0$ является барьером для $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ для следующих целых μ и $\varepsilon = 0,1$:

$$\begin{aligned}
&i = 1 : \mu \geq \varepsilon, \mu \equiv \varepsilon,\\
&i = 2 : \mu \geq \varepsilon - 1, \mu \equiv \varepsilon - 1,\\
&i = 3 : \mu \leq 1 - n - \varepsilon, \mu \equiv 1 - n - \varepsilon, \text{т.е.}\ \mu^* \geq \varepsilon - 1, \mu^* \equiv \varepsilon - 1,\\
&i = 4 : \mu \leq -n - \varepsilon, \mu \equiv -n - \varepsilon, \text{т.е.}\ \mu^* \geq \varepsilon, \mu^* \equiv \varepsilon.
\end{aligned}$$

Если $\beta_i = 0$ является барьером для $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$, то обозначим через $V_i(\mu,\varepsilon)$ подпространство в $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, которое есть сумма подпространств H_μ таких, что μ находится внутри этого барьера (т.е. $\beta_i(\mu,\nu) \geq 0$).

Теорема 9.11. *Подпространства $V_i(\mu,\varepsilon)$ инвариантны относительно представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$. Всякое собственное инвариантное подпространство есть одно из $V_i(\mu,\varepsilon)$. Представление $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ непри–*

водимо, за исключением случаев, когда μ — целое и выполняется одно из неравенств $\mu \geq \varepsilon - 1$ или $\mu^* \geq \varepsilon - 1$. В этих случаях имеется в точности одно собственное инвариантное подпространство - это $V_i(\mu, \varepsilon)$.

В §10 мы описываем все сплетающие операторы между представлениями серий $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$, т.е. непрерывные операторы A в пространстве $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, удовлетворяющие условию:

$$T^{\pm}_{\mu_1,\varepsilon_1}(g)A = AT^{\pm}_{\mu,\varepsilon}(g) \tag{3}$$

для всех $g \in G$ (здесь знаки $\pm$ берутся в произвольных сочетаниях), а также сплетающие операторы между подфакторами представлений этих серий в приводимом случае.

Теорема 10.1. *Ненулевой оператор $A : \mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma) \to \mathcal{D}_\chi(\Gamma)$, сплетающий представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ и $T^{\pm}_{\lambda,\chi}$, существует лишь для следующих пар представлений : $(T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}, T^{\pm}_{\mu,\varepsilon})$, $(T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}, T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon})$, μ^* см. выше. Для первой пары всякий такой оператор кратен единичному. Для второй пары сплетающий оператор – единственный с точностью до множителя. В приводимом случае этот оператор обращается в нуль на инвариантном подпространстве, а образ его есть инвариантное подпространство для $T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon}$. Кроме того, в приводимом случае существует оператор (единственный с точностью до множителя), который сплетает ограничение представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ на инвариантное подпространство и фактор – представление представления $T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon}$ в фактор – пространстве по инвариантному подпространству.*

Мы даем явные формулы для собственных чисел $a(\nu)$ сплетающего оператора на подпространствах H_ν, именно, если A определен на всем $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, то:

$$a(\nu) = \mathrm{const} \cdot \prod_{j=1}^{4} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu;\nu)\right)^{-1},$$

а если A определен на внутренности r-ого барьера (т.е. на $\beta_r \geq 0$), то:

$$a(\nu) = \mathrm{const} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\beta_r(\mu;\nu)\right) \cdot \prod_{j \neq r} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu;\nu)\right)^{-1}$$

Предъявим сплетающие операторы в интегральном виде. Пусть $[\sigma,\tau]$- функция на $\Gamma \times \Gamma$ ("угол" между плоскостями σ,τ), определяемая следующим образом: пусть s,t - точки из многообразия Штифеля S, порождающие σ,τ соответственно, тогда $[\sigma,\tau] = \det(st')$ (штрих означает транспонирование).

Определим оператор $A_{\mu,\varepsilon}$ на $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ формулой:

$$(A_{\mu,\varepsilon}\varphi)(\gamma) = \int_\Gamma [\gamma,\sigma]^{\mu^*,\varepsilon}\varphi(\sigma)d\sigma.$$

Теорема 10.4. *Оператор $A_{\mu,\varepsilon}$ на $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ для всех комплексных μ, за исключением тех μ, где он имеет полюс, является непрерывным и сплетает представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ с $T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon}$:*

$$T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon}(g)A_{\mu,\varepsilon} = A_{\mu,\varepsilon}T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}(g)$$

(*берутся либо верхние знаки $\pm$, либо нижние*).

На каждом $H_\nu, \nu \in N_\varepsilon$, оператор $A_{\mu,\varepsilon}$ есть скалярный оператор, т.е. умножение на некоторое число $a(\mu,\varepsilon,\nu)$ (от "$\pm$" оно не зависит). Вот явное выражение:

$$a(\mu,\varepsilon;\nu) = 2^{2\mu+2n-2}\pi^{n-1}\frac{\Gamma(-\mu-n+1)\Gamma(-\mu-n+2)}{\prod\limits_{j=1}^{4}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu;\nu)\right)},$$

где Г- гамма-функция Эйлера.

Как функция от μ оператор $A_{\mu,\varepsilon}$ является мероморфной функцией - такой, что оператор

$$\tilde{A}_{\mu,\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(-\mu - n + 1 + \varepsilon)} A_{\mu,\varepsilon}$$

является целой функцией, нигде не обращающейся в нуль. В противном случае оператор

$$A'_{\mu,\varepsilon} = \lim_{\lambda \to \mu} \frac{\tilde{A}_{\lambda,\varepsilon}}{\lambda - \mu}$$

определен на $V_i(\mu, \varepsilon)$, сплетает ограничение на $V_i(\mu, \varepsilon)$ представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ и и фактор-представления $T^{\mp}_{\mu^*,\varepsilon}$ на дуальном подфакторе.

В §11 мы находим инвариантные полуторалинейные формы, инвариантные эрмитовы формы и выясняем, какие из представлений унитаризуемы. При $n > 4$ имеется только непрерывная серия неприводимых унитарных представлений: это – представления $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$ с $\mathrm{Re}\mu = -\frac{n}{2}$, действующие в ${L^2}_{\varepsilon}(\Gamma)$ (пространство четных ($\varepsilon = 0$), или нечетных ($\varepsilon = 1$) функций из $L^2(\Gamma)$).

В главе II мы рассматриваем случай $n = 4$. Этот случай имеет ряд особенностей, отличающих его от $n > 4$: подгруппы P^+ и P^- сопряжены, подпространства $q^{\pm}$ (изотропные подпространства в алгебре Ли g группы G) обладают H-инвариантной мерой, йордановы тройные системы с пространствами $q^{\pm}$ являются йордановыми алгебрами, представления обладают H-инвариантами, набор унитаризуемых представлений намного богаче, чем для $n > 4$: кроме непрерывной серии имеются две дискретные, дополнительная серия и одно исключительное представление.

Исследованию случая $n = 4$ помогает то обстоятельство, что группа $\mathrm{SL}(4,\mathrm{R})$ локально изоморфна группе $\mathrm{SO}_0(3,3)$ накрывает ее с кратностью два. Поскольку ядро этого гомоморфизма совпадает с ядрами всех представлений $T^{\pm}_{\mu,\varepsilon}$, мы получаем представления группы $\mathrm{SO}_0(3,3)$. Эти последние оказываются представлениями группы $\mathrm{SO}_0(3,3)$, связанными с конусом. Представления группы $\mathrm{SO}_0(p,q)$, связанные с конусом, были описаны В. Ф. Молчановым [13]. Поэтому мы можем использовать эти результаты в частном случае $SO_0(3,3)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Ф. Молчанову за постановку задачи, большую помощь и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Ракитянский А.С. О некоторых представлениях группы $SL(4;R)$. // Материалы научн. конф., изд-во ТГПИ, - Тамбов, - 1994, - С. 6–7.

2. Ракитянский А.С. К вопросу о представлениях группы $SL(n;R)$. // Материалы научн. конф., изд-во ОГПИ, - Оренбург, - 1995, - С. 28–29.

3. Ракитянский А.С. Максимально вырожденная серия представлений группы $SL(n;R)$ ранга 2. // III Державинские чтения: Материалы научн. конф., изд-во ТГУ, - Тамбов, - 1998, - С. 14–15.

4. Ракитянский А.С. Сплетающие операторы для максимально вырожденных серий группы $SL(n;R)$ ранга 2. // IV Державинские чтения: Материалы научн. конф., изд-во ТГУ, - Тамбов, - 1999, - С. 31–32.

5. Ракитянский А.С. Гармонический анализ на многообразиях Грассмана. // Материалы научн. конф., изд-во ОГПУ, - Оренбург, - 1999, - С. 16–19.

6. Rakityansky A.S. Maximal degenerate series for $SL(n,R)$ of rank two. Вестник Тамбовского Университета, 1998, том 3, вып. 1, 90–95.

[13] Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Мат. сб., 1970, том 81, No. 3, 358–375

Ракитянский Александр Семенович

Максимально вырожденные серии представлений группы $\mathrm{SL}(n, R)$.

В диссертации исследуются максимально вырожденные неунитарные серии представлений группы $\mathrm{SL}(n, R)$, отвечающие разбиению $n = (n-2) + 2$, т. е. представлений, индуцированных характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп, отвечающих указанному разбиению. Найдены различные реализации этих представлений, их структура (приводимость, неприводимость, инвариантные подпространства, композиционные ряды), все сплетающие операторы, инвариантные полуторалинейные формы, инвариантные эрмитовы формы, унитаризуемые представления. Для изучения этих вопросов был развит гармонический анализ на многообразии Грассмана двумерных ориентированных подпространств в R^n. В частности, вычислены сферические функции, найдены радиальные части дифференциальных операторов, являющихся образующими в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на этом многообразии, вычислены собственные числа этих операторов на неприводимых подпространствах.

Rakityansky Aleksandr Semenovich

Maximal degenerate series representations of the group $\mathrm{SL}(n, R)$

In the dissertation we investigate maximal degenerate series representations of the group $\mathrm{SL}(n, R)$ assotiated with the partition $n = (n-2) + 2$, i.e. representations induced by characters (one-dimensional representations not nesserily unitary) of maximal parabolic subgroups corresponding to the partition mentioned above We find out some realizations of these reperesentations, determine their structure (reducibility, irreducibility, invariant subspaces, composition series), interwining operators, invariant sesquilinear forms, invariant Hermitian forms, unitarizable representations. To study these problems, we develope harmonic analysis on the Grassmannian manifold of two-dimensional oriented subspaces in R^n. In particular, we compute generators in the algebra of invariant differntial operators on this manifold, compute eigenvalues of these operators on irreducible subspaces.

Ракитянский А С Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 28.01 2000 Объем 1 п.л.

Тираж 100 экз.

Заказ 61

Издательско-полиграфический центр
Оренбургского государственного педагогического университета
им. В.П.Чкалова
460000, г Оренбург, ул. Гагарина, 1

F. 1699
A2000
1699