На правах рукописи

Мейханаджян Лусине Акобовна

Системы с инверсионным обслуживанием и обобщённым вероятностным приоритетом и их применение к оценке показателей эффективности систем распределённых вычислений

05.13.17 — теоретические основы информатики

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
Разумчик Ростислав Валерьевич

Официальные оппоненты: **Ушаков Владимир Георгиевич**, д.ф.-м.н.,
профессор кафедры математической статистики МГУ им. М.В. Ломоносова
Лукашенко Олег Викторович, к.ф.-м.н.,
научный сотрудник лаборатории математической кибернетики Института прикладных математических исследований, КарНЦ РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (ВоГУ)

Защита состоится «16» декабря 2016 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6. (Отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу)

Автореферат разослан «____» 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета С.А. Васильев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Необходимость работы с большими объёмами данных, которая стимулировала разработку систем распределённых вычислений, из которых Hadoop, Spark, Dryad, – пожалуй, самые популярные в настоящий момент, поставила перед разработчиками новые задачи, связанные с управлением системными ресурсами. Одним из важнейших показателей эффективности систем распределённых вычислений является среднее время отклика, то есть среднее время от момента поступления задания в систему до момента его ухода. Поскольку при работе с большими объёмами данных могут возникать задания как требующие малой задержки перед началом выполнения, так и допускающие большие задержки, правильное планирование выполнения заданий является одним из важных условий обеспечения заданного уровня качества обслуживания. Другим фактором, влияющим на качество функционирования систем распределённых вычислений, являются характеристики распределения времён выполнения заданий на процессорах. Во многих реальных компьютерных системах распределения размеров файлов, времён выполнения задач на процессорах, времён передачи файлов между сервером и клиентом описываются распределениями с тяжёлыми хвостами[1]. В части систем распределённых вычислений это означает, что времена выполнения заданий могут принимать значения от нескольких секунд до нескольких часов[2]. Несмотря на сложность с точки зрения аналитического моделирования работы с распределениями такого типа, их свойства с преимуществом используются как при проектировании самих систем, так и при решении задач повышения эффективности их функционирования.

Математические методы теории массового обслуживания (ТМО) обеспечивают возможность решения задач расчёта показателей эффективности функционирования различных компонент вычислительных и информационно-телекоммуникационных систем, включая оценку их вероятностно-временных характеристик.

Значительный вклад в разработку и анализ классических моделей ТМО связан с именами А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко, А.А. Боровкова, Д. Кендалла, Д. Литтла, Д. Кокса, В. Смита, Л. Клейнрока,

[1] *D. G. Feitelson, Workload Modeling for Computer Systems Performance Evaluation. Cambridge University Press, 2015.*

[2] *K. Ren, Y. Kwon, M. Balazinska, and B. Howe. Hadoop's adolescence: A comparative workload analysis from three research clusters. In Technical Report, CMU-PDL-12-106, 2012.*

Б.А. Севастьянова, Л. Такача, Ф. Поллачека. Среди современных авторов по ТМО и приложениям в области теории телетрафика и анализа производительности инфокоммуникационных систем можно выделить Г.П. Башарина, П.П. Бочарова, В.М. Вишневского, А.Н. Дудина, В.А. Наумова, В.А. Ивницкого, И.Н. Коваленко, А.В. Печинкина, А.И. Зейфмана, К.Е. Самуйлова, С.Н. Степанова, В.Ю. Королёва, В.Г. Ушакова, И.И. Цитовича и др.

В некоторых реальных системах распределённых вычислений, как, например, в Hadoop,[3] точные времена выполнения заданий на процессорах практически никогда не известны априори. Таким образом, при использовании в этих системах дисциплин обслуживания, ориентированных на время выполнения заданий, необходимо оперировать оценками этого времени, точность которых зависит от конкретной ситуации. В качестве примера можно привести модель MapReduce. Обычно времена выполнения MapReduce заданий заранее неизвестны и для оценки времён используются различные приёмы[4]. Известно, что если в системе дисциплина выбора заявок на обслуживание основывается на информации об остаточных временах выполнения заданий и эта информация неточна, то вместо того, чтобы повысить производительность системы, она может её снизить[5]. Известен ряд работ, посвящённых анализу показателей эффективности функционирования систем с неточной априорной информацией о временах обслуживания заданий (inaccurate job size information) и, в частности, усовершенствованию известных дисциплин обслуживания таким образом, чтобы они были нечувствительны к ошибкам[5].

Диссертация развивает работы в области исследования показателей эффективности функционирования систем с неточной информацией о временах обслуживания. Вводится новая дисциплина с инверсионным порядком обслуживания с обобщённым вероятностным приоритетом, что позволяет разрабатывать аналитические модели, применимые для расчёта оценок показателей эффективности класса систем распределённых вычислений с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о длительностях их выполнения.

Учитывая регулярно появляющиеся публикации в данной области в ведущих периодических научных изданиях, можно заключить, что вопросы

[3] *Уайт, Том. Hadoop. Подробное руководство Hadoop. 2-е. СПб.: Питер, 2013.*

[4] *A. Verma, L. Cherkasova, and R. H. Campbell, Aria: automatic resource inference and allocation for MapReduce environments, in Proc. of ICAC, 2011.*

[5] *Matteo Dell'Amico, Damiano Carra, Pietro Michiardi: PSBS: Practical Size-Based Scheduling. IEEE Trans. Computers 65(7): 2199-2212 (2016)*

анализа показателей эффективности функционирования систем с неточной информацией о временах обслуживания являются важными, а тематика диссертационного исследования представляется актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы.
Разработка аналитических методов нахождения оценок показателей эффективности функционирования систем распределённых вычислений с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о длительностях их выполнения на основе моделей СМО $M|G|1|r$, $0 < r \leq \infty$, с дисциплиной инверсионного порядка обслуживания с обобщённым вероятностным приоритетом (LCFS GPP).

Положения, выносимые на защиту.

1. Новая специальная дисциплина обслуживания LCFS GPP, которая является обобщением известных дисциплин: инверсионный порядок обслуживания с прерыванием и без, инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом.

2. Метод анализа вероятностно-временных характеристик системы $M|G|1|r$, $0 < r \leq \infty$, с дисциплиной LCFS GPP, основанный на введении дополнительных переменных – остаточных времён обслуживания.

3. Соотношения в виде интегродифференциальных уравнений для анализа и расчёта основных показателей эффективности рассмотренных систем – стационарной вероятности потери и недообслуживания заявки, стационарного распределения времени ожидания и пребывания в системе.

4. Метод оценки среднего времени отклика в системах распределённых вычислений с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о длительностях их выполнения, моделируемых с помощью систем $M|G|1$ с дисциплиной LCFS GPP.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. По сравнению с известными, в диссертации получены перечисленные ниже результаты.

1. Для анализа показателей эффективности систем распределённых вычислений с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о длительностях их выполнения предложена модель СМО $M|G|1|r$, $0 < r \leq \infty$, в отличие от известных работ, с новой дисциплиной обслуживания LCFS GPP.

2. Для СМО $M|G|1|r$, $0 < r \leq \infty$, с дисциплиной LCFS GPP, являющейся обобщением ряда других известных дисциплин, разработан аналитический метод расчёта основных показателей эффективности – средняя

длина очереди, среднее время пребывания заявки в системе, стационарная вероятность потери заявки.

3. Для систем с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о временах их выполнения, применена модель СМО $M|G|1$ с дисциплиной LCFS GPP, позволяющая по сравнению с дисциплинами FCFS, sbLCFS, PS давать более точную оценку среднему времени отклика.

Методы исследования. В работе используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, численные методы.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность теоретических результатов следует из использования строгих математических методов исследования и подтверждается вычислительным экспериментом.

Достоверность практических результатов следует из того, что полученные численные результаты находятся в согласии с результатами численных экспериментов, полученных в других исследованиях по данной тематике.

Обоснованность предположений об использовании СМО $M|G|1$ для разработки методов повышения эффективности функционирования некоторых систем распределённых вычислений следует из результатов последних исследований в данной области исследований[5].

Теоретическая и практическая ценность.

Полученные в диссертации результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях других СМО с дисциплиной LCFS GPP, групповым, марковским входящим потоком, и полумарковским обслуживанием.

Методы, разработанные в диссертации, могут применяться для уточнения оценок показателей эффективности односерверных систем, в которых наблюдается большой разброс времён выполнения заданий и априорная информация о временах выполнения заданий неточна. Полученные результаты ориентированы на использование в программных средствах поддержки принятия решений при проектировании и модернизации подобных систем.

Результаты работы использованы в научно-исследовательских работах, проводимых в РУДН и в Институте проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, в том числе в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований 13-07-00223 “Разработка эффективных алгоритмических методов и программных средств моделирования и расчёта характеристик инфотелекоммуникацонных систем на основе систем массового обслуживания с некоторыми особенностями функционирования при обслуживании заявок” и 15-07-03406 “Создание информационной технологии для поддержки оптимальных решений в системах обработки, хранения и передачи больших объёмов информации, функционирующих в условиях неопределённости”.

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс в РУДН при подготовке выпускных работ бакалавров и магистров, обучающихся по направлению “Фундаментальная информатика и информационные технологии”.

Апробация работы. Результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы, докладывались на

— всероссийской конференции с международным участием “Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем” (Москва, Россия, 2013);

— первой научно-практической конференции молодых учёных “Задачи современной информатики” (Москва, Россия, 2014);

— второй научно-практической конференции молодых учёных “Задачи современной информатики” (Москва, Россия, 2015);

— 30-й европейской конференции по математическому и имитационному моделированию (European Conference on Modelling and Simulation, Регенсбург, Германия, 2016);

— на научных семинарах в РУДН и в Институте проблем информатики ФИЦ ИУ РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, из которых 2 – тезисы докладов на конференциях, 4 – статьи в научных журналах и сборниках, список которых приводится в конце автореферата. Основные результаты представлены в работах, опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК, и получены лично соискателем. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад соискателя состоит в проведении исследований и интерпретации полученных результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, трёх приложений и списка литературы. Текст диссертации изложен на 125 страницах, включая 3 приложения. Список литературы содержит 74 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована её цель и определены научная новизна и практическая ценность работы.

В **Главе 1** с целью анализа показателей эффективности функционирования систем с неточной априорной информацией о временах обслуживания формализована СМО $M|G|1$ с дисциплиной инверсионный порядок обслуживания с обобщённым вероятностным приоритетом. Для решения задачи расчёта показателей эффективности функционирования, таких как стационарное среднее время пребывания в системе и стационарная средняя длина очереди, были исследованы её стационарные характеристики и разработан аналитический метод их расчёта.

Рассматривается СМО $M|G|1$ с входящим потоком заявок пуассоновского типа. Отличие этого потока от пуассоновского заключается в следующем: интенсивность поступления заявки равна λ, если на приборе имеется заявка, и $\tilde{\lambda}$, если система пуста. Считается, что время обслуживания заявки становится известным в момент поступления заявки в систему. Далее, наряду с названием "время обслуживания заявки" будем также говорить "длина заявки". Если в момент поступления заявки в систему на приборе имеется заявка, то исходное распределение времени обслуживания поступающей заявки является произвольным с функцией распределения (ФР) $B(x)$. Если же заявка поступает в систему в тот момент, когда система пуста, то исходное распределение времени обслуживания поступающей заявки является произвольным с ФР $\widetilde{B}(x)$. Предполагается, что ФР $B(x)$ и $\widetilde{B}(x)$ имеют непрерывные ограниченные плотности распределения, обозначаемые $b(x) = B'(x)$ и $\tilde{b}(x) = \widetilde{B}'(x)$.

Инверсионный порядок обслуживания с обобщённым вероятностным приоритетом определяется следующим образом. Предполагается, что в любой момент времени известна остаточная длина каждой заявки в системе. В момент поступления в систему новой заявки её исходная длина u сравнивается с (остаточной) длиной v заявки на приборе. С вероятностью $D(x, y|u, v)$, зависящей только от u и v, обслуживавшаяся ранее заявка продолжает обслуживаться, причём её длина становится меньше y, а вновь поступившая становится на первое место в очереди и её длина становится меньше x. Кроме того, с вероятностью $D^*(x, y|u, v)$, зависящей только от u и v, вновь поступившая заявка занимает прибор, вытесняя обслуживавшуюся ранее на первое место в очереди, причём длина заявки, бывшей ранее на приборе, становится меньше y, а вновь поступившей — меньше x.

Если на приборе находится заявка остаточной длины v и в систему поступает заявка длины u, то с вероятностью $D_0(x|u, v)$ заявка, находящаяся на приборе, покидает систему, а поступившая заявка становится на прибор, причём её длина становится меньше x. Кроме того, с вероятностью $D_0^*(y|u,v)$ поступившая заявка сразу же покидает систему, а заявка, находящаяся на приборе, продолжает обслуживаться, причём её длина становится меньше y. Далее будем пользоваться обозначением $D(x|u,v) = D_0(x|u,v) + D_0^*(x|u,v)$. Наконец, предполагается, что с вероятностью $d_0(u,v)$ обе заявки покидают систему, а на прибор становится первая заявка из очереди. Предполагается, что все ФР $D(x,y|u,v)$, $D^*(x,y|u,v)$, $D_0(x|u,v)$, $D_0^*(y|u,v)$ имеют непрерывные ограниченные плотности $d(x,y|u,v) = \partial^2 D(x,y|u,v)/(\partial x\,\partial y)$, $d^*(x,y|u,v) = \partial^2 D^*(x,y|u,v)/(\partial x\,\partial y)$, $d_0(x|u,v) = \partial D_0(x|u,v)/\partial x$, $d_0^*(y|u,v) = \partial D_0^*(y|u,v)/\partial y$, $d(x|u,v) = \partial D(x|u,v)/\partial x$ и для любых u и v выполнено условие нормировки

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty [d(x,y|u,v) + d^*(x,y|u,v)]\,dx\,dy + \int\limits_0^\infty d(x|u,v)\,dx + d_0(u,v) = 1. \quad (1)$$

Если длина заявки на приборе становится равной нулю, то она мгновенно покидает систему и на прибор переходит первая заявка из очереди. Остальная очередь сдвигается на единицу.

В главе 1 всюду предполагается, что система функционирует в стационарном режиме. Для рассматриваемой СМО не удаётся выписать общее необходимое и достаточное условие существования стационарного режима функционирования. Это условие зависит от конкретных параметров системы и в каждом отдельном случае нуждается в специальном исследовании. Из сравнения суммарной имеющейся работы в описанной СМО и суммарной работы в стандартной СМО $M|G|1$ в диссертации получено простое достаточное условие: после поступления новой заявки изменённые длины заявок не должны превышать те длины, которые были до поступления.

Функционирование системы можно описать случайным процессом $\eta(t) = (\nu(t), \vec{\xi}(t))$, где $\nu(t)$ число заявок в системе в момент t, а через $\vec{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_{\nu(t)}(t))$ — вектор, координатой $\xi_1(t)$ которой является остаточное время обслуживания заявки, находящейся в этот момент на приборе, $\xi_2(t)$ — первой заявки в очереди, ..., $\xi_{\nu(t)-1}(t)$ — последней, $(\nu(t)-1)$-й заявки в очереди. При $\nu(t) = 0$ вектор $\vec{\xi}(t)$ не определяется.

Обозначим через $p_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\nu(t) = 0\}$ и

$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\nu(t) = n, \xi_1(t) < x_1, \ldots, \xi_n(t) < x_n\}, \quad n \geq 1,$$

стационарное распределение процесса $\eta(t)$. В диссертации получен аналитический метод нахождения (совместного) стационарного распределения, и доказаны следующие два утверждения, составляющие суть данной главы.

Утверждение 1. Стационарные плотности вероятностей $p_n(x)$, $n \geq 1$, того, что в системе находится n заявок и на приборе находится заявка остаточной длины x, удовлетворяют системе интегродифференциальных уравнений

$$-p_n'(x) = a_n(x) - \lambda p_n(x) + \int\limits_0^\infty K(x,v) p_n(v)\,dv, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

с граничными условиями $\lim\limits_{x\to\infty} p_n(x) = 0$, $n \geq 1$, *где*

$$a_1(x) = \tilde{\lambda}\tilde{b}(x)p_0, \tag{3}$$

$$a_n(x) = \lambda \int\limits_0^\infty p_{n-1}(v)\,dv \int\limits_0^\infty b(u)\,du \int\limits_0^\infty [d(y,x|u,v) + d^*(x,y|u,v)]\,dy, \quad n \geq 2, \tag{4}$$

$$K(x,v) = \lambda \int\limits_0^\infty b(u)\,du \left(d(x|u,v) + \int\limits_0^\infty [d(x,y|u,v) + d^*(y,x|u,v)]\,dy \right). \tag{5}$$

Уравнения для определения совместных стационарных плотностей $p_n(x_1,\ldots,x_n) = \partial^n P_n(x_1,\ldots,x_n)/(\partial x_1 \cdots \partial x_n), n \geq 1$ приведены в диссертации. В случае, если для каждой из функций $d(x,y|u,v)$, $d^*(x,y|u,v)$, $d_0(x|u,v)$, $d_0^*(x|u,v)$ известны соответствующие сепарабельные аппроксимации вида $d(x,y|u,v) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i}(x)\beta_{1i}(y)\gamma_{1i}(u)\delta_{1i}(v)$, $d^*(x,y|u,v) = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_{2i}(x)\beta_{2i}(y)\gamma_{2i}(u)\delta_{2i}(v)$, $d_0(x|u,v) = \sum_{i=1}^{N_3} \alpha_{3i}(x)\gamma_{3i}(u)\delta_{3i}(v)$, $d_0^*(x|u,v) = \sum_{i=1}^{N_4} \alpha_{4i}(x)\gamma_{4i}(u)\delta_{4i}(v)$, то решение уравнений (2) сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Обозначим через $\beta(s)$ преобразование Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) ФР $B(x)$.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием существования стационарного распределения при $d(x,y|u,v) = b(x)b(y)$, $d^*(x,y|u,v) = 0$, $d(x|u,v) = 0$, $d_0(u,v) = 0$, *является выполнение неравенств* $1/2 < \beta(\lambda) < 1$. *В этом случае стационарное распределение* p_n, $n \geq 0$, *общего числа заявок в системе имеет вид:*

$$p_n = \left(2 - \frac{1}{\beta(\lambda)}\right)\left(\frac{1-\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)}\right)^n, \; n \geq 0, \tag{6}$$

а среднее число N заявок в системе определяется формулой

$$N = \frac{1-\beta(\lambda)}{2\beta(\lambda)-1}. \tag{7}$$

Таким образом, в системе $M|G|1$ с частным случаем дисциплины LCFS GPP, когда длины поступающей и обслуживающейся заявок при поступлении очередной заявки разыгрываются заново вне зависимости от того, сколько уже обслуживалась заявка на приборе, стационарное распределение общего числа заявок в системе является геометрическим.

Утверждение 2. ПЛС $\chi(s;x)$ стационарного распределения времени пребывания в системе поступающей заявки длины x рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}\chi(s;x) = p_0\psi(s;x) + \int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^\infty p_n(y)\Bigg[d_0(x,y) + \int\limits_0^\infty d_0^*(w|x,y)\,dw +{}\\ + \int\limits_0^\infty \psi(s;v)\Bigg(d_0(v|x,y) + \int\limits_0^\infty d^*(v,w|x,y)\,dw\Bigg)\,dv +{}\\ + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \psi(s;v)u(s;w)d(v,w|x,y)\,dv\,dw\Bigg]\,dy,\end{aligned} \tag{8}$$

где $u(s;x)$ – ПЛС длительности периода занятости, открываемого заявкой длины x, а $\psi(s;x)$ – ПЛС времени пребывания в системе заявки длины x, поступившей на прибор, с учётом времени прерываний её обслуживания.

В силу громоздкости уравнения для нахождения ПЛС $u(s;x)$ и $\psi(s;x)$ в автореферате не приводятся.

Следствие 2. При $d(x,y|u,v) = b(x)b(y)$, $d^*(x,y|u,v) = 0$, $d(x|u,v) = 0$, $d_0(u,v) = 0$, ПЛС $\chi(s)$ времени пребывания в системе заявки произвольной длины задается выражением

$$\chi(s) = p_0\psi(s) + (1-p_0)\psi(s)u(s), \tag{9}$$

где

$$\psi(s) = \frac{\lambda+s}{s+\lambda\beta(\lambda+s)}\beta(\lambda+s), \tag{10}$$

$$u(s) = \frac{\lambda + s - \sqrt{[\lambda + s]^2 - 4\lambda[1 - \beta(s+\lambda)]\beta(s+\lambda)[\lambda + s]}}{2\lambda[1 - \beta(s+\lambda)]}. \qquad (11)$$

Среднее время v_x пребывания в системе поступающей заявки длины x определяется формулой

$$v_x = e^{-\lambda x}\frac{1 - 2\beta(\lambda)}{\lambda\beta^2(\lambda)} + \frac{3\beta^2(\lambda) - 3\beta(\lambda) + 1}{\lambda\beta(\lambda)(2\beta(\lambda) - 1)}. \qquad (12)$$

Усреднение v_x по распределению длины заявки показывает, что в системе $M|G|1$ с инверсионным порядком обслуживания, в которой длины поступающей и обслуживающейся заявок каждый раз при поступлении новой заявки разыгрываются заново, формула Литтла выполняется.

В главе 1 также получены выражения для следующих вероятностно-временных характеристик поступающих в систему заявок:

— вероятность того, что заявка исходной длины x не будет потеряна при поступлении, будет (не будет) обслужена до конца и за время пребывания в системе сменит длину i, $i \geq 1$ раз;

— среднее время пребывания в системе заявки в расчёте на единицу времени обслуживания.

В **главе 2** продолжается исследование СМО с входящим потоком пуассоновского типа, рекуррентным обслуживанием, с инверсионным порядком обслуживания и обобщённым вероятностным приоритетом, но введено ограничение на размер очереди. Необходимость рассмотрения подобной модели вызвана тем, что современные технические системы обладают хотя и большой, но все же конечной ёмкостью, из-за чего могут возникать потери. В связи с этим существует необходимость в разработке метода расчёта ещё одного показателя эффективности — вероятности потери сообщения. В силу возникновения ограничения на ёмкость очереди меняется и метод исследования временных характеристик поступающих заявок, который и составляет суть данной главы.

Дисциплина LCFS GPP определяется тем же самым образом, что и в главе 1. Однако её описание необходимо дополнить, задав правило принятия заявок в систему при отсутствии в ней свободных мест. В диссертации предполагается, что поступающая в заполненную систему заявка теряется.

Несмотря на наличие ограничения на ёмкость очереди, общего необходимого и достаточного условия существования стационарного режима выписать по-прежнему не удаётся[6]. Оно, как и в случае неограниченной очереди, зависит от конкретных параметров системы и в каждом отдельном случае нуждается в специальном исследовании. Поэтому всюду в главе 2 существование стационарного режима предполагается.

Для анализа СМО $M|G|1|(r-1)$ с дисциплиной $LCFS\ GPP$, как и в главе 1, был применён метод введения дополнительных переменных, в качестве которых выбраны остаточные времена обслуживания заявок. Обозначим через $p_n(x),\ n=\overline{1,r}$, – стационарные плотности вероятностей того, что в системе находится n заявок и на приборе находится заявка остаточной длины x. Через p_0 обозначим стационарную вероятность простоя системы.

Утверждение 3. Вероятность $\pi(x)$ того, что поступающая заявка длины x будет потеряна при поступлении в систему равна

$$\pi(x)=\int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^{r-1} p_n(y)\left(d_0(x,y)+\int\limits_0^\infty d_0^*(w|x,y)\,dw\right)dy+\int\limits_0^\infty p_r(y)dy. \qquad (13)$$

Из-за наличия ограничения на размер очереди стационарное распределение длительности периода занятости, времени ожидания начала обслуживания, а также пребывания заявки в системе с учётом возможных прерываний и без, рассчитываются в терминах ПЛС рекуррентным образом.

Утверждение 4. ПЛС $V(s;x)$ стационарного распределения времени пребывания в системе заявки длины x, которая была обслужена до конца, рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}V(s;x)=\frac{1}{1-\pi}\Bigg(&p_0V_0(s;x)+\\&+\int\limits_0^\infty\sum_{n=1}^{r-1}p_n(y)\left[\int\limits_0^\infty V_{n-1}(s;v)\left(d_0(v|x,y)+\int\limits_0^\infty d^*(v,w|x,y)\,dw\right)dv\right]dy+\\&+\int\limits_0^\infty\sum_{n=1}^{r-1}p_n(y)\left[\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty u_{n+1}(s;w)V_{n-1}(s;v)d(v,w|x,y)\,dv\,dw\right]dy\Bigg), \qquad (14)\end{aligned}$$

где $V_n(s;x)$ – ПЛС стационарного распределения времени пребывания на приборе заявки, которая была обслужена до конца с учётом возможных

[6]Например, при $d(x,y|u,v)=e^{-v}b(x)b(ye^{-v})$, $d^*(x,y|u,v)=0$, $d(x|u,v)=0$, $d_0(u,v)=0$, $u,v>0$, условия конечности среднего времени обслуживания недостаточно для существования стационарного режима.

смен длин и прерываний, при условии, что в момент поступления на прибор её длина равнялась x, а в очереди было n, $0 \leq n \leq r-1$, других заявок, а $u_n(s;x)$ ПЛС времени до того момента, когда в системе впервые останется $(n-1)$ заявок, при условии, что на приборе начала обслуживаться заявка остаточной длины x и в системе было n заявок. Системы уравнений для определения величин $V_n(s;x)$ и $u_n(s;x)$ в автореферате не приводятся в виду их громоздкости. В главе 2 также найдены математические соотношения для ПЛС стационарного распределения времени пребывания в системе произвольной заявки.

Был разработан программный комплекс на языке Delphi, позволяющий рассчитывать по полученным в главах 1 и 2 математическим соотношениям значения основных показателей эффективности.

Глава 3 посвящена изложению результатов численных экспериментов, которые показывают, что полученные в диссертации аналитические результаты могут быть использованы для получения, по сравнению с дисциплинами FCFS, LCFS, LCFS с прерыванием, LCFS с прерыванием наикратчайшим заданием, PS, более точных оценок значений показателей эффективности функционирования некоторых систем с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о временах их обслуживания. Рассмотренный в главе 3 показатель эффективности – среднее время пребывания заявки в системе. Прообразом системы, которая рассматривается в численных экспериментах, являются системы распределённых вычислений Hadoop для обработки Mapreduce заданий[3,5].

Задача, которая решается в главе 3, может быть сформулирована следующим образом.

Имеется система распределённых вычислений, моделируемая СМО $M|G|1$. Поступающее задание сообщает планировщику прогнозное время для своего выполнения, которое требуется серверу, работающему с известной постоянной скоростью. В прогнозных временах выполнения заданий наблюдается очень большой разброс, то есть моделируемые времена выполнения описываются распределением с тяжёлым хвостом. Планировщик на основе этой информации реализует одну из дисциплин обслуживания заданий – FCFS, LCFS, LCFS с прерыванием, LCFS с прерыванием наикратчайшим заданием, PS. После того, как задание было выполнено, как правило оказывается, что фактическое время выполнения задания на сервере не совпадает с прогнозным временем.

Предполагается, что фактическое время выполнения заданий X и прогнозное время выполнения заданий Z связаны соотношением $Z = X \cdot Y$, причём случайная величина Y имеет логнормальное распределение с параметрами 0 и σ. Данное предположение основано на эмпирических данных о временах выполнения заданий в известных системах распределённых вычислений[5].

Обозначим через $B(x)$ ФР прогнозного времени выполнения задания, а через $G(x)$ – ФР фактического времени выполнения задания. Из представленного выше описания следует, что ФР $B(x)$ известна заранее, а ФР $G(x)$ заранее неизвестна. Используя известные результаты для систем $M|G|1$, можно рассчитать среднее время отклика v_B, соответствующее прогнозному времени выполнения задания. В диссертации показано, что, в силу сделанных предположений, $v_G < v_B$, v_G – среднее время отклика, соответствующее фактическому времени выполнения задания.

Задача состоит в следующем: можно ли, изменяя лишь правила обслуживания заявок, получить оценку v^* для среднего времени отклика, удовлетворяющую неравенствам

$$v_G < v^* < v_B. \tag{15}$$

Оказывается, что обслуживая заявки специальным образом, такую оценку v^* получить можно. Однако, это можно сделать не всегда, а лишь когда ФР *прогнозного* времени выполнения $B(x)$ имеет тяжёлый хвост и значения величины $\hat{B}(x^*)$, где x^* определяется из соотношения

$$B(x^*) = 1 - \hat{B}(x^*), \quad \hat{B}(x) = \frac{\int_0^x ub(u)du}{\int_0^\infty ub(u)du}, \tag{16}$$

находится в определённых границах, которые в рассмотренных в диссертации примерах находятся численно.

Воспользовавшись результатами главы 1, в диссертации предложен следующий способ получения оценки v^*. При поступлении очередной заявки, независимо от предыдущей истории функционирования системы, будет заново разыгрываться длина поступающей заявки и заявки на приборе, затем поступившая заявка становится на первое место в очереди, заявка на приборе продолжает обслуживаться уже с новой длиной. Данный способ обслуживания есть частный случай дисциплины *LCFS GPP*, когда $d(x,y|u,v) = b(x)b(y)$, $d^*(x,y|u,v) = 0$, $d(x|u,v) = 0$, $d_0(u,v) = 0$.

В численных экспериментах, для получения фактического среднего времени отклика v_G берутся различные предположения о виде ФР $G(x)$.

На рисунках показано насколько удаётся улучшить оценку v_B при различных предположениях о неизвестном распределении $G(x)$.

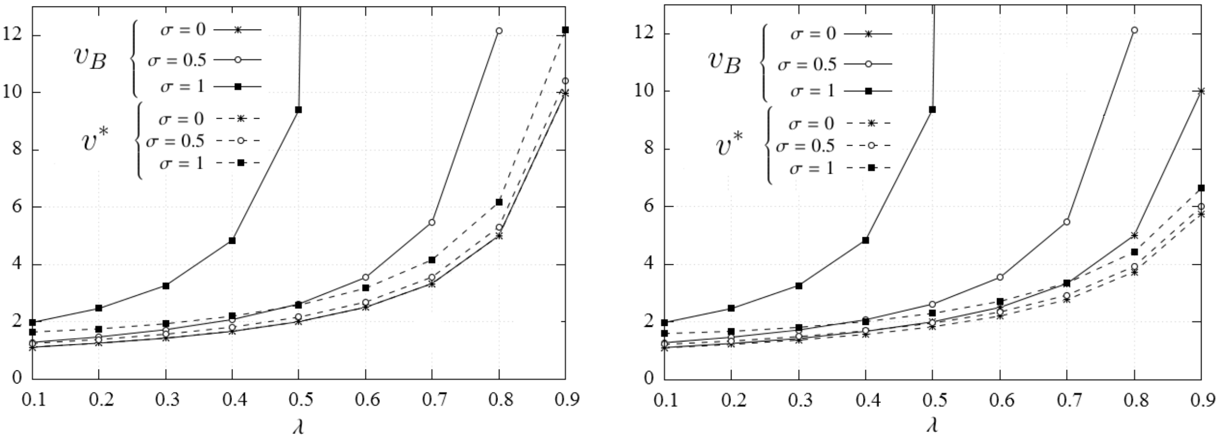

Рис. 1: (слева) СМО $M|G|1$ с дисциплиной PS. Распределение $G(x)$ – экспоненциальное. Распределение $B(x)$ имеет тяжёлый хвост. (справа) СМО $M|G|1$ с дисциплиной PS. ФР $G(x)$ – распределение Вейбулла с параметрами $k = 0.9$, $\alpha = \Gamma(1 + 1/k)$. Распределение $B(x)$ имеет тяжёлый хвост ($\hat{B}(x^*) \approx 0,3$).

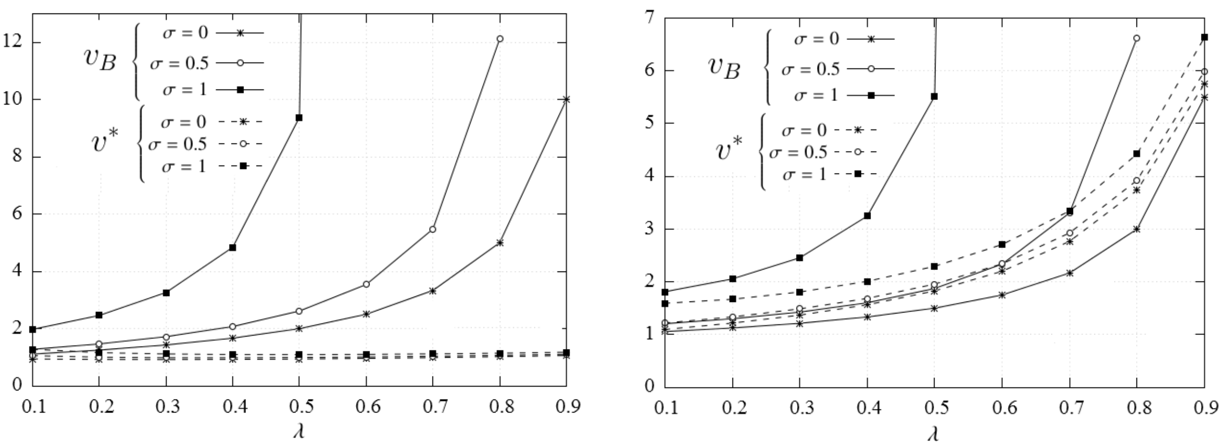

Рис. 2: (слева) СМО $M|G|1$ с дисциплиной PS. ФР $G(x)$ – распределение Вейбулла с параметрами $k = 0.5$, $\alpha = \Gamma(1+1/k)$. Распределение $B(x)$ имеет тяжёлый хвост ($\hat{B}(x^*) \approx 0,2$). (справа) СМО $M|G|1$ с дисциплиной LCFS с прерыванием наикратчайшей заявкой. ФР $G(x)$ – распределение Вейбулла с параметрами $k = 0.9$, $\alpha = \Gamma(1+1/k)$. Распределение $B(x)$ имеет тяжёлый хвост ($\hat{B}(x^*) \approx 0,3$).

В диссертации численно показано, что предложенный способ получения оценки v^* работает только, если значение $\hat{B}(x^*)$, найденное из (16), не превосходит $\approx 0,32$. Но даже в этом случае, получить значение v^* удаётся не всегда, поскольку выполнение неравенств $v_G < v^* < v_B$ также зависит от значения интенсивности входящего потока λ. Эксперименты показывают, что чем “тяжелее” оказывается хвост распределения прогнозного времени выполнения, то есть чем меньше значение $\hat{B}(x^*)$, тем меньше остается возможностей для получения оценки v^* с помощью предложенного способа. В диссертации численно показано, что небольшое усложнение способа обслуживания заявок, а именно введение порогового значения, только при превышении которого осуществляется переразыгрывание длин поступающей и обслуживающейся заявок, позволяет получать значение v^* в большем числе случаев.

В **заключительном разделе** сформулированы основные результаты работы. В приложениях приводятся доказательства *следствия 1* и *следствия 2*, а также ряд вспомогательных результатов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Новая специальная дисциплина обслуживания – инверсионный порядок обслуживания с обобщённым вероятностным приоритетом, которая является обобщением следующих известных специальных дисциплин: инверсионный порядок обслуживания с прерыванием и без, инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом.

2. Метод анализа вероятностно-временных характеристик системы $M|G|1|r$, $0 < r \leq \infty$, с дисциплиной LCFS GPP, основанный на введении дополнительных переменных– остаточных времён обслуживания.

3. Соотношения в виде интегродифференциальных уравнений для анализа и расчёта основных показателей эффективности рассмотренных систем – стационарной вероятности потери и недообслуживания заявки, стационарного распределения времени ожидания и пребывания в системе.

4. Метод оценки среднего времени отклика в системах распределённых вычислений с большим разбросом времён выполнения заданий и неточной априорной информацией о длительностях их выполнения, моделируемых с помощью систем $M|G|1$ с дисциплиной LCFS GPP.

Основные результаты диссертационной работы отражены в следующих опубликованных работах:

1. *Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Стационарные вероятности состояний в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщённым вероятностным приоритетом // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 16–26.

2. *Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Разумчик Р. В.* Время ожидания в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и

обобщённым вероятностным приоритетом // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 14–22.

3. *Мейханаджян Л. А.* Стационарные вероятности состояний в системе обслуживания конечной ёмкости с инверсионным порядком обслуживания и обобщённым вероятностным приоритетом // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 123–131.

4. *Meykhanadzhyan L., Razumchik R.* New Scheduling Policy for Estimation of Stationary Performance characteristics in Single Server Queues With Inaccurate Job Size information // Proceedings of 30th European Conference on Modelling and Simulation. Digitaldruck Pirrot GmbHP, Dudweiler, Germany. 2016. pp. 710–716.

5. *Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А.* Численный анализ системы с инверсионным вероятностным порядком обслуживания и его приложения к анализу порогового управления нагрузкой SIP-сервера // Тезисы докладов. Всероссийская конференция «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Секция «Сети связи следующего поколения», 2013. С. 99–101.

6. *Мейханаджян Л. А.* О временных характеристиках в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщённым вероятностным приоритетом // Труды первой научно-практической конференции молодых учёных «Задачи современной информатики», 2014. С. 43–47.