РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

УДК 530.12 51-71 521.9

ДИМИТРОВ
Богдан Георгиев

Методы алгебраической геометрии и перенос Ферми - Уокера в расширенных теориях гравитаций

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена в Лаборатории Теоретической Физики Объединенного Института Ядерных Исследований, г. Дубна

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Сава Славчев Манов

Институт Ядерных Исследований и Ядерной Энергетики

Болгарской Академии Наук

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

заведующий кафедры математических методов

современного естествознания Тверского Государственного Университета

Цирулев Александр Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор

Фролов Борис Николаевич

Факультет физики и информационных технологий

Московский Государственный Педагогический Университет

Ведущая организация:

Государственный Астрономический Институт имени П. К. Штернберга Московского Государственного Университета (ГАИШ МГУ)

Защита диссертации состоится « 19 » Декабря 2013 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д212.203.34 Российского Университета Дружбы Народов по адресу: 115419 г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, зал №1

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского Университета Дружбы Народов по адресу:

117 198 г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан « 17 » Ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук В.А. Попова

1 Общая характеристика диссертации

1.1 Актуальность темы

В настоящее время готовятся будущие астрофизические эксперименты на космических установках, такие как **GAIA** (Глобальный Астрометрический Интерферометр для Астрофизики), **LISA** (Laser Interferometer Space Antenna), **STEP** (Satellite Test of the Equivalence Principle) и другие, основной особенностью которых будут свверхпрецизионные измерения астрометрических (координаты и скорости) и фотометрических параметров. Например, спутник GAIA достигнет точности 10 μas микроарксекунд (1 $\mu as = 10^{-6}$ arcsecond) для звезд с величиной $V = 15$ (то есть он в 1000 раз более точный по сравнению с первым астрометрическим спутником Hipparcos Европейского Космического Агенства).

Другая очень перспективная задача для обнаружения горизонта сверхмассивных Черных Дыр (SMBH - Super Massive Black Holes) требует углового разрешения порядка 1 μas микроарксекунды . Однако, для (предполагаемых) SMBH других Активных Галактических Ядер таких как $NGC4258$, $NGC3227$, $NGC5548$ требуются еще меньшие угловые разрешения порядка 0.5 μas, 0.2 μas, 0.09 μas, которые пока экспериментально недостижимы.

Такая высокая экспериментальная точность предьявляет не только высокие требования к аппаратуре, но требует и пересмотра самой теоретической концепции, на которой построена теория отклонения светового луча в гравитационном поле - этим занимается **релятивистская астрометрия** (см. монографию с авторами Sergei Kopeikin, Michael Efroimsky, George Kaplan, "Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System" , WILEY-VCH Verlag, 2011 г., 860 стр.). Здесь надо отметить два основных случая, к которым имеют отношение разработанные в данной диссертации подходы:

А. Распространение светового луча в сильном гравитационном поле вокруг Черных Дыр, Нейтронных Звезд, Белых Карликов, двойных радиопульсаров (например - $J0737-3039$) - предполагается что скалярная кривизна пространства - времени в 100 раз больше, чем кривизна пространство - времени в Солнечной Системе. При таких полях особенно сильно будут проявлятся эффекты относительного ускорения $a = \nabla_u u$, которое будет сдвигать расстояния между каждыми двумя точками на двух произвольных траекториях. Другими словами, существенно отметить, что это ускорение благодаря своей "ковариантной" формулировке будет действовать во всех направлениях, а не только перпендикулярно к траекториям. Надо подчеркнуть, что самые интерессные и новые формулы в этом диссертационном труде о разложении тензора деформации и о переносе Ферми - Уокера в ускоренной системе отсчета, связаны именно с эффектами относительного ускорения.

Б. Сверхпрецизионные эффекты слабого гравитационного поля на распространение светового луча (или радиосигнала) - этот случай затрагивает Лазерную Локацию Луны (в литературе - Lunar Laser Ranging), а также деятельность NASA по построению **Глобальной Навигационной Системы** (S. Kopeikin, E. Pavlis, V. A. Brumberg et all (2008)-10 авторов) в пространстве между Землей и Луной на основе оптических лазерных телекоммуникационных устройств, которые требуют учета отклонения лазерного луча с точностью до 1 миллиметра на расстоянии десятков тысяч километров, причем на временных интервалах в несколько десятков лет. Согласно директивы Президента США, таким прибором должен быть оснащен каждый будущий космический корабль. Также, с 2010 года точность лазерной локации Луны составляет 2 - 4 mm, иногда и 1 mm. Задача поставлена также и для измерения расстояния в т. н. "суб-миллиметровом" (т. е. меньше 1 mm) диапазоне. Как известно, классический закон Ньютона проверен экспериментально только на расстояниях превышающих 1 mm.

Оба эти направления исследований являются новыми и находятся на начальном этапе разработки на теоретическом уровне. Более того, на теоретическом уровне будут замечено некоторое сходство между двумя задачами. В задаче А действие относительного ускорения приведет к изменению расстояний и масштаба расстояния - это видно из простой формулы

$$\nabla_u l = l_{,\mu} = (\nabla_u g)(u, u) + 2g(\nabla_u u, u)$$

где оператор ковариантного дифференцирования ∇_u действует на функцию длины $l = g(u, u)$. Изменение функции длины приведет к следующим последствиям:

1. Тангенциальный вектор к мировой линии наблюдателя уже не будет нормированным к единице, как обычно предполагается в релятивисткой гидродинамике, чтобы выполнялся Принцип Эквивалентности в его стандартной формулировке ("свободно падающий лифт" - (СПЛ)). Поэтому, надо использовать более адекватный - **Модифицированной Принцип Эквивалентности (МПЭ)**, согласно которому **пробное тело не испытывает никакого воздействия, если перейти к системе отсчета (СО), которая движется вместе с относительным ускорением.** Математические основы этого подхода были выдвинуты впервые болгарским физиком - теоретиком Божидаром Илиевым (B. Iliev) (см. монографию B. Z. Iliev, Handbook of Normal Frames and Coordinates, Progr. in Mathem. Physics, vol.42, Birkhauser Verlag, 2006, 440 стр.), и потом конкретно применены другим болгарским теоретиком Савой Мановым (S. Manoff). Так как выбор системы отсчета согласно МПЭ зависит только от относительного ускорения, то его можно применять и к сильным гравитационным полям, для которых уже не будет справедливо ограничительное предположение о их однородности. Кроме этого, (сильное) гравитационное поле обладает и неметричностью, кручением и расширением, но МПЭ будет выполняться. Но гравитационное поле между Землей и Луной (хотя и слабой) также будет неоднородным, из-за приливного воздействия Луны (задача Б).

2. Выбор СО, относительно которой пробное тело имеет нулевое относительное ускорение означает, что его движение будет осуществляться по (четырехмерным) автопараллельным траекториям, которые задаются как решениями автопараллельного уравнения для (четырехмерного) тангенциального вектора к этим кривым. В этом и основополагаюнцее и принципиальное отличие от уравнения для геодезических, которые задаются для (трехмерных) пространственных траекторий. Так как это отличие имеет важное значение для достижения более высокой точности в релятивисткой астрометрии, то в данной диссертации показано, что автопараллельное уравнение справедливо и при ненулевой метричности $\nabla_u g \neq 0$ и при изменении длины векторного поля.

3. По автопараллельным траекториям реализируются "свободные от возмущений" движения, и в этом смысле они являются аналогом обычных геодезических линий в Эйнштейновской теории гравитации. Этот факт "невозмущенного движения" вдоль геодезических линий был использован еще в 1963 году Ф. Манассе и Ч.Мизнером (F. K. Manasse, C. W. Misner) для введения т.н. "метрический тензор в терминах нормальных координат Ферми" в окрестности этой геодезической линии (формула написана только для пространственных компонентов)

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iljm|G}\, x^l x^m + ...$$

Фактически, каждая точка мировой линии локально (!) апроксимируется плоским пространством - временем Минковского, в котором выполняется Принцип Эквивалентности в стандартной формулировке "падающего лифта". Это означает, что выполнены условия Ферми по направлению геодезической линии

$$g_{\mu\nu|G} = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu|G} = 0$$

Теперь понятно, что при наличии относительного ускорения (ОУ) этот подход будет неприменимым, так как ОУ действует во всех направлениях и невозможно провести "невозмущенную" геодезическую линию. Кроме этого, подход Манассе и Мизнера имеет следующие недостатки, которые устранены в новом подходе для определения переноса Ферми - Уокера в этом диссертационном труде:

3a. Для определения "невозмущенного движения" используется **Модифицированный Принцип Эквивалентности (МПЭ)**, который расширяет понятие "*локальность*" **не только в окрестности точки, но и вдоль любой линии (не только геодезической)**. Это вполне оправдано, так как понятие "равномерное движение" в ПЭ на самом деле является идеализацией. Например, вычисление в рамках других (неэйнштейновских) теорий таких как теория скалярно - тензорной гравитации на основе внутренней гравитационной энергии, показывает, что **система Земля - Луна**, возможно, **не "падает" свободно** в гравитационном поле Солнца, а **падает с ускорением**, которое пропорционально разнице

$$\left(\frac{U}{Mc^2}\right)_E - \left(\frac{U}{Mc^2}\right)_M = -4.45.10^{-10} \quad (1)$$

и также Пость -Ньютоновскому параметру $\eta = 4\beta - \gamma - 3$ (в ОТО $\eta = 0$). Примечательно, что это будет проявляться в т.н. "поляризации орбиты Луны" (эффект Нортведта) - смещении орбиты Луны вдоль линии к Солнцу , и экспериментально этот эффект будет проявляться при точности лазерной локации Луны меньее чем 4 mm, что соответствует точности измерения относительного ускорения $\frac{\Delta a}{a} = \pm 1.5 \times 10^{-13}$ (J. G. Williams, Sl. G. Turyshev, Th. Murphy, IJMP D13, (2004)). Это вполне достижимо ныне и с еще более высокой точностью - в ближайшем будущем. Однако, существуют и иные, хорошо обоснованные мнения (S. Kopeikin, PRL (2007); (2009)), что из-за калибровочной свободы Пост - Ньютоновской силы и ее зависимости от орбитальной скорости системы Земля - Луна по отношению к Солнцу, **эффект поляризации орбиты не будет доступен обнаружению методами лазерной локации Луны, по крайней мере, при нынешном состоянии теории.** Причина в том, что локальные измерения лазерной локации являются нечувствительными к **кривизне (асимптотически неплоского) пространства-времени, которая возникает из-за приливных сил со стороны Солнца и других планет.** Именно эти внешние воздействия и обусловливают несвободное падение системы Земля - Луна, и нынешная теория не в состоянии учитывать эти эффекты уже на фоновом, асимптотически - неплоском пространстве - времени.

3б. "Пертурбативное" (в окрестности геодезической линии) определение компонент метрического тензора в подходе Манассе и Мизнера не даст ответа на вопрос **"сохраняются ли действительно углы и длины базисных векторов при переносе вдоль линии"**? Поэтому, в диссертации новое определение переноса Ферми -Уокера основано именно на этом строгом математическом требовании, которое обеспечивает точное сохранение этих длин и углов, а не в пертурбативном, приближенном смысле.

4. Тот факт, что автопараллельное уравнение определено для векторного поля (а не для пространственных координат) дает некоторые дополнительные возможности применения этого уравнения к массивным телам.

Например, если в центре массы массивного тела определен вектор плотности импульса $p = \rho u$ (u вектор скорости центра массы, ρ - плотность массивного тела), то условие для сохранение плотности импульса можно сформулировать на геометрическом языке как условие для параллельного переноса вектора $p = \rho u$, т.е. $\nabla_u p = \nabla_u(\rho u) = 0$, причем этот вектор не должен также менять и свою длину $l_p = g(p,p) = const.$Таким образом, в диссертации получено следующее условие для изменения плотности, чтобы массивное тело двигалось по автопараллельной траектории

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{1}{e}(\nabla_u g(u,u))(u,u)\right)d\tau \quad .$$

Эта формула может найти применение в теории Релятивистких Систем Отсчета (РСО)(барицентрические, геоцентрические, спутниковые), которая впервые (в периоде 1988 - 1992 г., но и гораздо ранее) была разработана русскими ученами В. А. Брумбергом, С. М. Копейкиным, С. Клионером. РСО - это математическая процедура для конструирования т.н. "Пост - Ньютоновских (PPN)" локальных координат в искривленном пространстве - времени вокруг массивных, движущихся небесных тел, которые используются для уточнения эфемерид небесных тел, для навигации космических кораблей в Солнечной Системе и для редукции астрономических наблюдений. Теория РСО была официально признана в Резолюциях 24-ой Генеральной Ассамблеи Международного Астрономического Союза (IAU) в августе 2000 г. (см. G. Kaplan, US Naval Obs. Circ. № 179, Washington D.C., 2005).

Однако, при начальном конструировании Геоцентрической РСО (вокруг Земли) основное предположение было об изолированости пространства вокруг Земли от внешних воздействий, которое означает, что все приливные воздействия со стороны Луны (и других внешних тел) учитываются как пертурбации. Как следствие, центр массы Земли совпадает с центром Геоцентрической РСО, и в силу своего "невозмущенного" движения он движется по геодезической линии. А так как автопараллельное уравнение является более общим, чем уравнение геодезических, то движение центра массы Земли будет осуществлятся также и по автопараллельной траектории, поэтому и выведенная формула будет справедливой. Но в геофизической литературе (см. монографию V. A. Ferronsky, S. A. Denisik, and S. V. Ferronsky, Jacobi Dynamics. A Unified Theory with Applications to Geophysics, Celestial Mechanics, Astrophysics and Cosmology, 2nd ed., Springer, 2011, 323 стр.) на основе теории строения Земли (вовсе не связанной с РСО) также можно найти распределение плотности внутри Земли

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{kr}{R}\right) \quad ; \quad \rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{kr^2}{R^2}\right) \quad .$$

Комбинирование двух предыдующих формул позволит найти метрический тензор гравитационного поля внутри Земли. Надо отметить, что первоначальная модель Геоцентрической РСО предполагала постоянные давление и плотность вещества в Земле, но современные спутники (как, например GRACE или GPS-спутники Системы Глобального Позиционирования) посредством изменения в тессаральных моментах потенциала Земли в **состоянии обнаружить изменения плотности на поверхности и внутри Земли** (например, из-за перемещения огромных океанских водных масс), а также посредством градиометров и акселерометров измерить **ускорения тел из-за несферичности и неоднородности Земли** (5×10^{-5} m/s^2) или из-за **приливных воздействий Луны и других планет** (5×10^{-6} m/s^2 - вызывает отклонение орбиты спутника за 2 часа от 5 метров до 150 метров, что вовсе не является пренебрежимо малым по сравнению с предыдущим).

5. Действие относительного ускорения и результирующее изменение расстояния являются физической мотивировкой для развития математического подхода алгебраической геометрии в этой диссертации. Если тангенциальный вектор к мировой линии наблюдателя постоянен, в соответствии со стандартной формулировкой ПЭ для "свободно падающего лифта" т.е. $u_\alpha u^\alpha = 1$, то аналогом этого условия в теории гравитации является $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$. Но даже в рамках Солнечной Системы, не существует определенного "стандарта" для измерения длины - согласно работы (G. A. Krasinsky, V. A. Brumberg (2004)), наблюдается секулярное изменение Астрономической Единицы (Astronomical Unit), которое составляет $\frac{d}{dt} AU = 15 \pm 4 \ m/su$. Если есть отклонение от нормировки векторно-

го поля u, то будет вполне естественно предположить, что $g_{\alpha\beta}\widetilde{g}^{\beta\gamma} = l^{\gamma}_{\alpha}$. На самом деле, Эйнштейн определил контравариантные метрические компоненты как обратные к ковариантными компонентам для удобства и на основе чисто математических соображений . Фактически, последнее равенство означает, что вводится **"анизотропная шкала расстояний"**, и как будеть дальше показано, эту шкалу для случая $\widetilde{g}^{ik} = dX^i dX^k$ можно считать естественным обобщением понятия о **метрике пространства-времени**, которая в сущности представляет собой **"изотропную шкалу расстояний"**. К сожалению, уравнения теории гравитации ставят целью найти метрический тензор, но сам он шкалу расстояний не дает. Наверно поэтому за последние несколько лет эта проблема стала особенно актуальной и дискуссионной - например, в серии работ (см. Carrera, Giulini, 2010, RMP) было высказано мнение, что "иерархия взаимно-вложенных систем, таких как Солнечная Система - Галактика - локальная группа галактик - Скопление - Свверхскопление - Космология невозможно смоделировать в терминах точных решений, так как **каждая система определяет характерную (для нее) шкалу расстояний, и вне этой шкалы можно считать эту систему квази - изолированной**". Поэтому и сегодня особенно актуальными становятся (сверхпрецизионные) эффекты возможного участия Солнечной Системы в процессе Хаббловского расширения Вселенной. Физическая сущность этого явления связана именно с влиянием внешней для Солнечной Системы материи (например, материя нашей галактики Млечный путь). Это внешнее воздействие можно смоделировать посредством введения фонового гравитационного поля (S. Kopeikin, J. Ramirez, B. Mashhoon, M. Sazhin, PLA (2001); J. Ramirez, S. Kopeikin, PLB (2002)). Таким образом, дальнейшее развитие теории Релятивистких Систем Отсчета на основе их "привязанности" к более удаленным космическим обьектам (квазары, радиопульсары и т.д.) неизменно связана с новой физикой - с космологической теорией пертурбаций и пертурбативной гравитацией на искривленном фоновом пространстве (S. Kopeikin, PRD (2012); S. Kopeikin, A. Petrov, PRD (2013)), которая была ранее развита русским ученым Александром Н. Петровым (ГАИШ им. П. К. Штернберга, МГУ, Москва).

Но если существует фоновое поле $g_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ (фоновое поле $\overline{g}_{\alpha\beta}$ может быть выбрано как метрика Фридмана - Робертсона - Уокера), то можно увидить, что контракция ковариантных и контравариантных метрических компонентов для полного метрического тензора $g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^{\alpha}_{\mu} - h_{\mu\nu}h^{\nu\alpha} = l^{\alpha}_{\mu}$ определяет **анизотропную тензорную шкалу**. Следовательно, пертурбативную теорию гравитации второго порядка можно интерпретировать в рамках подхода ГТККСМ.

Также, проблема локального Хаббловского расширения Солнечной Системы имеет и один чисто прикладной аспект - предполагается, что аномальное ускорение (к центру Солнца) космических аппаратов, таких как Pioneer 10/11, связано именно с Хаббловским расширением. Проблема пока нерешена, известно только, что ускорение составляет $a_p = 8.5.10^{-8}\ sm/s^2$ (J. Anderson (1998)) или по другим данным $(8.60 \pm 1.34).10^{-8}\ sm/s^2$ (G. Markwardt (2002)).

Существуют также некоторые интересные, заслуживающие внимания мнения других авторов (J. Rosalez (2002)), которые предполагают **"возможное действие локальной кривизны на световых геодезических линиях"** . Вполне вероятно, это связано с эффектами **относительного ускорения**.

1.2 Цель работы

Целью работы является построение математического алгоритма для нахождения решений многокомпонентных алгебраических уравнений в теории гравитации, а также вывод новой формулы для разложения тензора деформации и определение переноса Ферми-Уокера в рамках особого класса расширенных гравитационных теорий - Гравитационные Теории с Ковариантными и Контравариантными Связностями и Метриками (ГТККСМ). Были поставлены и решены следующие задачи:

– обосновать с физической и математической точки зрения необходимость и правильность применения подхода алгебраической геометрии в теории гравитации и найти применение для этого подхода в гравитационных теориях с допольнительными пространственно - временными измерениями;

– найти математический алгоритм для нахождения решений в терминах эллиптической функции Вейерштрасса для найденного "кубического алгебраического уравнения репараметризационной инвариантности гравитационного лагранжиана";

– для ГТККСМ, найти разложение тензора деформации и найти условия для существования свободных от сдвига и расширения течений, а также и условие для движения массивного тела по автопараллельной кривой;

– найти условия для осуществления переноса Ферми - Уокера в ГТККСМ и вообще в теориях с кручением, неметричностью и сдвигом;

1.3 Научная новизна

В данной диссертации в рамках т.н. ГТККСМ впервые предложен и обоснован новый метод алгебраической геометрии в теории гравитации и показано, что можно параметризовать с функцией Вейерштрасса (и ее производной) многокомпонентные алгебраические уравнения.

– Показано, что после введения изотропной шкалы расстояния на основе ГТККСМ, можно найти новые соотношения (в форме неравенств) между параметрами в гравитационных теориях с дополнительными измерениями;

– Впервые доказано, что можно вывести конкретные математические условия для переноса Ферми -Уокера в более общих гравитационных теориях на основе геометрического требования для сохранения длин базисных векторов и углов между ними (необязательно прямыми) при переносе этих векторов вдоль кривой;

– Выведено более общее разложение для тензора деформации, которое валидно и для случая, когда векторы относительного ускорения $a = \nabla_u u$ и скорости являются неортогональными. Показано, что условие

$$\pounds_u g = \nabla_u g$$

является одновременным условием для:

а. ортогональности этих векторов;

б. существования свободных от сдвига и расширения течений в ГТКК-СМ,

и тем самым, дано новое физическое толкование "нелокальных" и "локальных" гравитационных теорих - последние являются те, для которых выполнены условия а. и б.

1.4 Теоретическая и практическая значимость

Развитый математический подход на основе применения аппарата алгебраической геометрии (параметризация с функцией Вейерштрасса) открывает новые перспективы для нахождения новых решений уравнений Эйнштейна. Эта задача особенно актуальна для космологических метрик типа Фридмана - Робертсона - Уокера - ранее разные авторы (M. Dabrowski, J. Stelmach, R. Coquereaux, A. Grossmann , J. Garecki, Th. Stachowiak) находили решения в терминах эллиптических функций, но не на основе разграничения между ковариантными и контравариантными метрическими компонентами, а в рамках стандартной Эйнштейновской теории гравитации.

Найденные соотношения в форме неравенств были бы полезными для будущих экспериментов на LHC (Большой Адронный Коллайдер), если будут уточнены параметры в струнном действии (электромагнитная и струнная константа связи, струнная шкала, 4-мерная Планковская константа). Тогда выполнение найденных в диссертации неравенств будет означать, что метрика пространства - времени будет с положительной кривизной (т.е. квадрат длины положительный). В то же самое время, подход может быть применен к гравитационным теориям, более тесно связанные с гравитационными экспериментами - например, к т. н. "Пост - Ньютоновском формализме" в теории гравитации.

Новое разложение для тензора деформации и новое определение переноса Ферми - Уокера могут найти применение при разработке новых моделей в теории Релятивистских Систем Отсчета на фоне искривленного пространства - времени, когда надо учитывать эффекты относительного ускорения. Также, эти эффекты надо учитывать и при распространении светового луча в сильных гравитационных полях (вокруг Черных Дыр, Нейтронных Звезд) или при очень прецизионных эффектах гравитационного поля при распространении лазерного луча в пространстве между Землей и Луной, которые очень существенны для лазерной локации Луны (Lunar Laser Ranging).

1.5 Достоверность результатов

Методы алгебраической геометрии в теории гравитации основаны на точных математических методах, а не на приближенных методах. Используемое в этом подходе представление для контравариантных метрических компонент таких как $\widetilde{g}^{ik} = dX^i dX^k$ и введенная на этой основе анизотропная шкала расстояний $g_{ij} dX^j dX^k = l_i^k$ являются естественным обобщением понятия о метрике $ds^2 = l = g_{ij} dX^i dX^j$, которую можно интерпретировать как изотропную шкалу расстояний.

Математические выражения для переноса Ферми - Уокера и для разложения тензора деформации являются результатом точных аналитических выражений.

1.6 Апробация работы

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ - ОИЯИ (Дубна) (2005, 2008, 2010, 2012, 2013 г.), на семинаре отдела Теоретической и Математической Физики Института Ядерных Исследований и Ядерной Энергетики (ИЯИЯЕ) Болгарской Академии Наук (БАН) (2005 г.) , на семинаре им. Абрама Леонидовича Зельманова в Государственном Астрономическом Институте им. Штернберга (ГАИШ) (2012 г.), на семинаре кафедры теоретической физики Российского Университета Дружбы Народов (РУДН) (2013 г.) г. Москва, а также и на следующих конференциях:

- IX Международный семинар "Гравитационная Энергия и гравитационные волны Дубна, 8-12 Декабря 1996 г.

- 5th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, St. Konstantin, Bulgaria, 3-9 September 2000.
- First Advanced Workshop on Gravity, Astrophysics, and Strings at the Black Sea (GASBS 2002), Kiten, Bulgaria, 10-16 Jun 2002.
- International Seminar on Non - Euclidean (Lobachevsky) Geometry, 26-30 February, 2004, JINR, Dubna, dedicated to the 75th Anniversary of Prof. N.A. Chernikov.
- Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии, Яльчик-Казань, Россия, 10-15 сентября, 2007.
- Международная Конференция "Избранные проблемы современной теоретической физики"(23-27 июнь 2008 г., ЛТФ, ОИЯИ, Дубна), посвещённый 100-летию со дня рождения Д. И. Блохинцева (1908-2008).
- APCTP-BLTP JINR Joint Workshop on Frontiers in Black Hole Physics in Dubna, JINR and APCTP (Acian Pacific Center for Theoretical Physics), Dubna, Russia, May 2009.
- II Российская школа по гравитации и космологии. Международный семинар по современным проблемам теории гравитации и космологии; 24-29 августа 2009 г., Российское гравитационное общество, Казань-Яльчик, Россия.
- The Grassmannian Conference in Fundamental Cosmology (Grasscosmofun'09), University of Szczecin - celebration of Hermann Gunther Grassmann birth bicentennial anniversary, Szczecin, Poland (13-21 September 2009).
- Российский Семинар "Нелинейные поля и релятивисткая статистика в теории гравитации и космологии" , 6 - 10 Сентября 2010 г., Казань-Яльчик.

1.7 Публикации

По материалам диссертации опубликовано 7 работ в реферерируемых журналах, из них 5 работ в западных журналах (из списка ВАК): **Journal of Mathematical Physics, General Relativity and Gravitation, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Classical and Quantum Gravity, Annalen der Physik (Berlin)**; также из этих 7 работ 2 опубликованные в реферируемых журналах (вне списка ВАК-а): **Aerospace Research in Bulgaria**. Имеются также 6 публикаций в сборниках конференций.

Количество опубликованных страниц в журналах из списка ВАК - 93, во всех реферируемых журналах (из списка и вне списка ВАК)- 108, в трудах конференций - 53.

1.8 Обьем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения . Полный объем диссертации – 175 страниц машинописного текста. Список литературы содержит более чем 100 наименований.

2 Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор именно тех физических теорий, дальнейшее развитие которых (по личному убеждению автора этого диссертацчионного труда) может потребовать применения развитых в диссертации математических методов алгебраической геометрии и физических методов, связанных с новым разложением для тензора деформации в ГТККСМ и с новым определением для переноса Ферми - Уокера на основе сохранения длин и углов. Этими физическими теориями являются: Релятивисткие Системы Отсчета, релятивисткая астрометрия, теория Лазерной Локации Луны (Lunar Laser Ranging). Во введении также содержится краткое описание каждой главы диссертации.

В первой главе с наименованием **"Методы алгебраической геометрии в теории гравитации"**, основанная на опубликованных работах [1], [2] и [3], представлены основные уравнения, которые будут рассматриваться в рамках нового, развитого в диссертационном труде подхода алгебраической геометрии в теории гравитации. Основу этого подхода составляют т.н. "Гравитационные Теории с Коваринтными и Контравариантными Связностями и Метриками" (ГТККСМ), в которых делается разграничение между ковариантными и контравариантными компонентами метрического тензора. С математической точки зрения, это оправдано, так как базисные вектора тангенциального и котангенциального расслоения многообразия могут быть заданы вполне независимо (см. Кобаяси, Номизу, I т.). В диссертации контравариантные метрические компоненты были выбраны в форме

$$\widetilde{g}^{ij} \equiv dX^i dX^j \qquad , \tag{2}$$

которая предполагает, что на $n-$мерном многообразии заданы две системы координат (две разных разбиения на карты) $(x^1, x^2, ..., x^n)$ и $X^i \equiv X^i(x^1, x^2, x^3..., x^n)$. Но возможен и другой случай, когда эти две системы координат заданы на двух многообразиях - эта математическая конструкция (см. известный курс А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко) будет иметь и физическое соответствие - это будут координаты соответственно Барицентрической и Геоцентрической РСО. В любом случае, известная формула

$$dX^\mu(x^1, x^2...., x^n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

задает гладкое отображение между касательными векторами dX^μ и dx^α в соответных касательных пространствах (расслоениях). Поэтому, существенно подчеркнуть, что эти вектора НЕ являюся бесконечно маленькими. Свертка ковариантных компонентов (далее они будут предполагаться заданными) с контравариантными, "тилда" метрическими компонентами $g_{ij} dX^j dX^k = l_i^k = g_{ij} \widetilde{g}^{jk}$ будет определять т.н. (четырехмерную) "анизотропную шкалу расстояний (длин)" которая является естественным обобщением "изотропной шкалы расстояний" - метрика пространство - времени, так как при $i = k$ получается $ds^2 = l = g_{ij} dX^i dX^j$. Понятие "анизотропная шкала расстояний" впервые было введено в работах [2], [14] и в этой диссертации.

Далее, на основе наложенного условия для равенства гравитационного Лагранжиана в "тилда" представлении и обычном Гравитационном Лагранжиане (при условия также сохранения тензора Риччи) выведено основное уравнение, которое далее будет решатся относительно переменных dX^i

$$dx^i dx^j dx^k p\Gamma^r_{j(i}g_{k)r} - R_{ij}dx^i dx^j = 0 \quad . \qquad \text{(A)}$$

Уравнение **(А)** написано при предположении $d^2X^i = 0$ и в диссертации и в работе [1] оно названо **"кубическим алгебраическим уравнением репараметризационной инвариантности гравитационного Лагранжиана"(КАУРИГЛ)**.

Однако, оказывается "анизотропная шкала расстояний" может быть введена не согласованной с метрикой, т.е. $\widetilde{g}^{ik} \neq dX^i dX^k$. С этим связано конкретное физическое применение, которое в этой главе найдено для т. н. **гравитационных теорий с дополнительными измерениями пространства-времени.** В этих теориях, которые с 1998 г. разрабатывались такими авторами как Гиа Двали (G. Dvali), И. Антониадисом (I. Antoniadis) и др., действие для низкоэнергетической струнной теории (тип I) задается в 10 - мерном пространстве

$$S = \int d^{10}x \left(\frac{m_s^8}{(2\pi)^7\lambda^2}R + \frac{1}{4}\frac{m_s^6}{(2\pi)^7\lambda}F^2 + ... \right) = \int d^4x V_6 = (......) \qquad (3)$$

и после этого пространство компактифицируется до 4-ех измерений

$$= \int d^4x \left(M_{(4)}^2 R + \frac{1}{4}\frac{1}{g_4^2}F^2 \right) \quad .$$

После сравнения **(числовых) коэффициентов** перед R и F^2 в подходе G. Dvali и I. Antoniadis получаются соотношения между параметрами в струнном действии.

В настоящей диссертации, этот подход модифицирован путем введения дополнительной операции **"перемасштабирования"**, согласно следующего переопределения контравариантных тилда компонент $\widetilde{g}^{ij} = g^{ik}l_k^j(t,x) = g^{ik}l(t,x)\delta_k^j(x)$, при котором вводится **изотропная шкала расстояний** $l(t,x)$. Но так как перемасштабирование может произойти до компактификации и после компактификации, то следуя подходу Двали, Антониадис и Димополус и сравнивая **коэффициентные выражения** перед R и F^2, для каждого случая **"компактификация + перемасштабирование"** и **"перемасштабирование + компактификация"** получаются квазилинейные уравнения в частных производных (относительно функции длины $l(t,x)$) и алгебраическое соотношение. Если компактификация и перемасштабирование происходят **одновременно**, то от обоих квазилинейных уравнений можно найти следующие неравенства между параметрами в струнном действии

$$p^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{27} - b\sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{27}} > \left[\frac{a_1 + 6a}{18} + \frac{a_1}{18}\sqrt{a_1^2 + 12a}\right]^3 \qquad \text{(I)}$$

или

$$p^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{27} - b\sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{27}} < \left[\frac{a_1 + 6a}{18} - \frac{a_1}{18}\sqrt{a_1^2 + 12a}\right]^3 \quad . \qquad \text{(II)}$$

Примечательно и очень существенно то, что в этих неравенствах функция длины не участвует, поэтому они справедливые и для стандартного подхода Двали, Антониадиса и Димопулуса.

Во второй главе с наименованием **"Эллиптические кривые и кубические алгебраические уравнения - известные факты и новые результаты"**, основанной на опубликованных работах [1],[2], представлен новый математический формализм для нахождения решений выведенного в Главе I кубического алгебраического уравнения (A) **КАУРИГЛ** в терминах эллиптической функции Вейерштрасса (**ЭФВ**) и ее производной. Это на языке алгебраической геометрии означает, что данное уравнение (A) будет параметризировано с ЭФВ

$$\rho(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \qquad (1)$$

и ее производной. Напомним, что ЭФВ определена на комплексной плоскости (суммирование по всем периодам на двумерной решетке), так что **"параметризация"** означает введение добавочной комплексной переменной.

Основная проблема в данном случае состоит в том, что уравнение (A) является **многокомпонентным (т.е. для многих переменных)** алгебраическим уравнением, а стандартная процедура для параметризации в алгебраической геометрии (см. монографию В. В. Прасолова. Ю. П. Соловьева, Эллиптические функции и алгебраические уравнения, Москва, "Факториал" , 1997 г., 286 стр.) разработана для **двумерных кубических** алгебраических уравнений типа

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \ , \tag{1}$$

которое параметризируется как $x = \rho(z)$, $y = \rho^{'}(z)$. Поэтому, в диссертации разработан новый математический подход для параметризации многокомпонентных алгебраических уравнений типа A, который основан на следующих четырех шагах:

Шаг 1: Уравнение (A) записывается как кубическое относительно одной из переменных, и по отношении этой переменной применяется **дробно-линейная трансформация** $dX^3 = \frac{a_3(z)\widetilde{dX}^3 + b_3(z)}{c_3(z)\widetilde{dX}^3 + d_3(z)}$ (для удобства рассматривается трехмерный случай). После зануления выражения перед высшей (третьей) степенью $\widetilde{dX}^3$ получается алгебраическое уравнение, зависящее от двух переменных (оно фактически является **условием для параметризации первоначального уравнения**)

$$p\Gamma^r_{\gamma(\alpha}g_{\beta)r}dX^\gamma dX^\alpha dX^\beta + K^{(1)}_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta + K^{(2)}_\alpha dX^\alpha + 2p\left(\frac{a_3}{c_3}\right)^3 \Gamma^r_{33}g_{3r} = 0 \ , \tag{B}$$

а **первоначальное уравнение** записывается в форме

$$\widetilde{n}^2 = \overline{P}_1(\widetilde{n})\ m^3 + \overline{P}_2(\widetilde{n})\ m^2 + \overline{P}_3(\widetilde{n})\ m + \overline{P}_4(\widetilde{n}) \ , \tag{C}$$

где $\overline{P}_1(\widetilde{n})$,$\overline{P}_2(\widetilde{n})$, $\overline{P}_3(\widetilde{n})$ и $\overline{P}_4(\widetilde{n})$ являются сложными кубическими полиномами.

Шаг 2. Если эти коэффициентные функции являются равными числовыми коэффициентами $4, 0, -g_2, -g_3$, то тогда уравнение $\widetilde{n}^2 = 4m^3 - g_2 m - g_3$ можно параметризовать как $\widetilde{n} = \rho^{'}(z) = \frac{d\rho}{dz}$, $\frac{a_3}{c_3} \equiv m = \rho(z)$.

Шаг 3 (**параметризация вложенной последовательности алгебраических уравнений**). Так как переменные в уравнении (B) на одну меньше по сравнению с первоначальным уравнением (A),то следующий шаг связан с параметризацией уравнения (B), применяя выше описанный алгоритм Шага 2. В результате, на каждом следующем шаге параметризации получаются уравнения типа (B) и (C) - это и будет та цепочка уравнений, которая в диссертации названа **"вложенной цепочкой кубических алгебраических уравнений"** .Эта цепочка уравнений обладает исключительно интересным свойством - если решение для dX^1 задается найденного в диссертации и в работе [2] выражением

$$dX^1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{k_1}}\rho(z)\rho'(z)\sqrt{F_1\rho^2 + F_2\rho(z) + K_1^{(2)}} + f_1\rho^3 + f_2\rho^2 + f_3\rho + f_4}{\frac{1}{\sqrt{k_1}}\rho'(z)\sqrt{F_1\rho^2(z) + F_2\rho(z) + K_1^{(2)}} + \widetilde{g}_1\rho^2(z) + \widetilde{g}_2\rho(z) + \widetilde{g}_3} \quad ,$$

то решение для dX^2 является **"обвертывающей"** (т.е. зависящей от dX^1), а решение для dX^3 - **"обвертывающей"** для dX^2.

Шаг 4 (**униформизация**). Так как найденные решения для dX^1, dX^2 и dX^3 $(l = 1,2,3)$

$$dX^l(X^1, X^2, X^3) = F_l(g_{ij}(\mathbf{X}), \Gamma^k_{ij}(\mathbf{X}), \rho(z), \rho'(z)) = F_l(\mathbf{X}, z) \quad ,$$

зависят от пространствено-временных координат и от комплексной переменной z, то эти решения являются **параметризационными**. Теперь, если координаты зависят и от комплексной переменной z по формуле $X^l \equiv X^l(x^1(z), x^2(z), x^3(z)) = X^l(\mathbf{x},\ z)$, эти решения будут также и **униформизационными**. В этой главе показано, как можно их найти. Учитывая первоначальное условие $d^2X^l = 0 = dF_l(\mathbf{X}(z), z)$, после решения системы негомогенных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial X^1}{\partial z}$, $\frac{\partial X^2}{\partial z}$ и $\frac{\partial X^3}{\partial z}$, можно найти систему из **нелинейных дифференциальных уравнений** первого порядка $\frac{\partial X^l}{\partial z} = G_l\left(\frac{\partial F_i}{\partial X^k}\right) = G_l\left(X^1, X^2, X^3, z\right)$, решения которой будуть давать зависимость пространственно-временных координат от z .

В диссертации рассматривался и случай, когда функция Вейерштрасса и ее производная могут параметризовать более общее уравнение

$\left[\rho'(z)\right]^2 = 4\rho^3(z) - g_2(z)\rho(z) - g_3(z)$ - фактически это "параметризируемая форма" кубического алгебраического уравнения, но с коэффициентными функциями вместо числовых коэффициентов (**инварианты Эйзенштейна**). Уравнение такова типа в математической литературе пока не исследовано. Из полученной цепочки уравнений для коэффициентов Лорановского разложения этих функций найдены все коэффициенты и доказано, что суммы $G_1 = \sum\limits_{\omega} \frac{1}{\omega}$ и $G_2 = \sum\limits_{\omega} \frac{1}{\omega^2}$ должны быть **сходящимися**. Этот результат не противоречит известной теореме из теории эллиптических кривых (Э. Кнэпп, Эллиптические кривые, 2004) о **равномерной сходимости** рядов типа $G_m = \sum\limits_{\omega} \frac{1}{\omega^m}$ при $m \geq 3$, так как эта теорема **не означает, что всегда ряды при** $m = 1, 2$ **должны быть расходящимися.** В частности, доказательство для сходимости было приведено в работе в электронном архиве [20]. Можно также привести дополнительные аргументы из монографии Кнэппа и из монографии Тома Апостола по теории чисел (T. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, 1976). Например, на стр. 315 в монографии Кнэппа показано, что если в сумме $G(\tau) = \sum\limits_{n}\sum\limits_{m}{}' \frac{1}{m+n\tau}$, где $\omega = m + n\tau$ $(\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2})$, **суммирование производить в указанном порядке, то тогда весъ ряд сходится**. Внутренная сумма берется по всем m, таким, что $(m, n) \neq (0, 0)$.

В **третьей главе** с наименованием **"Теоретические ограничения в стандартной гравитационной теории деформируемых сред. Принцип Эквивалентности в пространствах с кручением и неметричностью"** не содержатся новые результаты, она имеет обзорный характер. Но в этой главе представлен материал, без которого будет невозможно понять новое определение переноса Ферми - Уокера, так как материал затрагивает теоретические разработки, в общем незнакомые специалистам-гравитационистам. В главе представлен обзор по автопараллельному уравнению - его канонический и неканонический вид, из которого видно что только при определенном выборе параметра это уравнение сводится к геодезическому уравнению. Также представлен обзор по теоретическому формализму о выполнении ПЭ в пространствах с кручением, неметричностью, расширением и сдвигом, которой разработан болгарским теоретиком Б.

Илиевым. Здесь основной и нетривиальный момент состоится в том, что для выполнения ПЭ в таких теориях будет необходимо не зануление коэффициентов аффинной связности, а т.н. **деривация**. Само определение S-деривации давно известно из дифференциальной геометрии (см. Кобаяси, Номизу, I том) - S-деривация тензорной алгебры на многообразии M - это отображение $D : X \to D_X = L_X + S_X$, где X является векторным полем, L_X производная Ли по направлении X и S_X тензорное поле типа $(1,1)$, которое считается также деривацией. Условие, которое будет получено в последней главе для выполнения переноса Ферми-Уокера будет фактически условием для нулевой деривации. Также, для перехода к системе отсчета, в которой пробная частица не будет испытывать никакого ускорения (из-за пространственно-временной кривизны), применяется **"деформация аффинной связности"** - на самом деле это тоже деривация по своей математической сущности

$$\nabla_u^e = \nabla_u - \overline{A}_u \qquad (-1)$$

где ∇_u^e является **расширенным оператором ковариантного дифференцирования** и $\overline{A}_u$ является смешанным тензором третьего ранга.

В этой главе представлены также некоторые стандартные определения переноса Ферми - Уокера, основанные на известных монографиях (Хоукинг, Эллис; Меллер).

Четвертая глава "Пертурбативная теория гравитации на искривлённом фоновом пространстве - новые результаты", основана на опубликованных в реферируемых журналах (вне списка ВАК-а) работах [6],[7] (также и [8]), и содержит некоторые неосновные для диссертации новые результаты. Эта глава посвещена новому пертурбативному разложению гравитационного лагранжиана до второго порядка при предположении, что контравариантные метрические компоненты флуктуационного (пертурбативного) поля определены как

$$g^{\mu\beta} = g^{(0)\mu\beta} - h^{\mu\beta} + h^{\mu}_{\alpha}\, h^{\alpha\beta} \quad . \qquad (-1)$$

При этом определении контравариантные метрические компоненты для полного метрического тензора являются обратными (т.е. $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$) по отношению к ковариантным компонентам с точностью до второго порядка. Так как разложение в литературе до сих пор было осуществлено только при стандартном определении $g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, то это приведет к некоторым модификациям в пертурбативном разложении второго порядка для тензора Римана по сравнению с работой автора Барнеби (Barneby, 1974 г.)

В пятой главе с наименованием **"Метрически-Аффинные Теории Гравитации (МАТГ) и Гравитационные Теории с Ковариантными и Контравариантными Метриками и Связностями (ГТККМС) - известные факты и новые результаты"** представлены совместные результаты с проф. С. Мановым, опубликованные в работах [4] и [5]. Основные результаты в этой главе связаны с новым разложением для тензора деформации в ГТККСМ, а также и с новым определением переноса Ферми-Уокера на основе геометрического требования о сохранении длин между базисными векторами и углами между ними. В начале главы представлен обзор математических свойств ГТККСМ - особой акцент сделан на то, что ГТККСМ являются более общими по сравнению с Метрически - Аффинными Теориями Гравитации (МАТГ), так как в ГТККСМ вводится анизотропная шкала длины. Представлена также новая (впервые в работе [4]) классификация пространств в ГТККСМ в зависимости от типа оператора контракции и соотношения между компонентами контравариантной и ковариантной связностей. Для случая ГТККСМ также дается новое определение **пространства Вейля** - для него выполнено условие

$$\nabla_u g := \frac{1}{n} Q_u g \quad , \tag{-1}$$

где Q_u определяется как $Q_u := Q_j.u^j$ и ковариантное векторное поле $Q_u = \frac{1}{n}Q$ называется ковариантным ковекторным полем Вейля. Используя формулы для изменения длин и углов, показано также, что **параллельные переносы в пространстве Вейля являются также конформными переносами.** Также из формулы для изменения длины векторного поля в пространстве Вейля

$$\frac{dl_u}{d\tau} = \frac{1}{2n} Q_\xi l_u \quad , \tag{-1}$$

и при $Q_j = -n\overline{\varphi}_{,j}$ следует, что **скалярное поле** $\overline{\varphi}$ выступает в роли калибровочного фактора, изменяющего длину вектора ξ, поэтому и это скалярное поле называется **дилатонным полем** в пространстве Вейля. Этот простой вывод подсказывает следующую интерпретацию: **каждая (метрическая) скалярно-тензорная теория гравитации в (псевдо)Римановом пространстве (с или без кручения, но с параллельным переносом) может быть переформулирована в соответственном пространстве Вейля с метрикой Вейля и дилатонное поле, порождая таким образом ковектор Вейля в пространстве Вейля.**

Особенно интересным и важным является разложение для **тензора скорости деформации в ГТККСМ, которое в этих теориях отличается от относительной скорости**

$$v_{rel.} := \overline{g}\left[p_u(\nabla_u\xi)\right] = \overline{g}(p_u)\left(\frac{l}{e}a - \pounds_\xi u\right) + \overline{g}\left[d(\xi)\right] \qquad \text{(E)}$$

Так как в обычных гравитационных теориях первое выражение в скобках равняется нулю, то в этих теориях разложение тензора скорости деформации

$$p^c_b u_{a;c} = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta p_{ab} \qquad \text{(F)}$$

на **тензор вращения, тензор сдвига и тензор расширения** является на самом деле разложением для относительной скорости, **поэтому неудивительно, что наложено дополнительное условие ортогональности векторного поля u на тензор вращения и тензор сдвига.**

В диссертации выведено новое разложение для тензора скорости деформации, которое аналогично по внешнему виду разложению (F) $d := \sigma + \omega + \frac{1}{n-1}\Theta p_u$, но, благодаря своему отличию от относительной скорости, это разложение обладает более необычными и интересными физическими свойствами. Во первых, каждый тензор в разложении имеет компоненту, свободную от кручения и индуцированную кручением. Поэтому, отсюда можно предположить, что **кручение будеть неизменной характеристикой гравитационного поля с относительным ускорением.** Во вторых, так как тензоры сдвига и расширения задаются выражениями

$$\sigma = \frac{1}{2}[p_u\left(\nabla_u\overline{g} - \pounds_u\overline{g}\right)p_u - \frac{1}{(n-1)}\left(p_u\left(\nabla_u\overline{g} - \pounds_u\overline{g}\right)\right)p_u] \tag{G}$$

$$\Theta = \frac{1}{2}[p_u\left(\nabla_u\overline{g} - \pounds_u\overline{g}\right)] = \frac{1}{2}p_{i\,\overline{j}}\left(\overline{g}^{ij}_{;k}u^k - \pounds_u\overline{g}^{ij}\right)\ , \tag{H}$$

то отсюда можно вывести следующее условие $\nabla_u\overline{g} = \pounds_u\overline{g}$ для существования свободных от сдвига и расширения течений. Это простое математическое условие имеет наглядное и богатое по своему физическому смыслу толкование - **в свободных от сдвига и расширения течениях наблюдатель по мировой линии двигается вместе с сопутствующей материей, причем в каждой точке траектории вектор скорости является ортогональным к вектору относительного ускорения.** В сущности, это можно рассматривать и как "обобщенный" критерий для существования **"локальной"** гравитационной теории - ранее такой критерий на основе ортогональности векторов скорости и ускорения (но в смысле Ньютоновского определения!) был выдвинут американским физиком-теоретиком Баарамом Машхуном (B. Mashhoon).

Однако, оказывается, что свободные от сдвига и расширения течения (в деформируемой среде, так как соотношение (E) выполняется) не являются условием для определения переноса Ферми-Уокера, если рассматривать этот перенос с точки зрения геометрического критерия о сохранении длин базисных векторов и углов между ними, а не на основе "невозмущенного" движения в окрестности геодезической линии. Последний подход (Манассе и Мизнера) неприменим из-за деформации среды и наличия относительного ускорения.

Чтобы найти конкретные математические условия для сохранения длин и углов, в диссертации рассмотрены не сами эти вектора, а вектора в ортогональном к ним подпространстве. В нем действует проективная метрика $p_u := g - \frac{1}{e}u \otimes u$, которая учитывает изменение длины векторного поля u, в отличие от обычно используемой в релятивисткой гидродинамике метрика $\widetilde{p}_u := \delta - u \otimes u$, которая не обладает этим свойством.

Пользуясь этой метрикой, можно определить изменения длин векторов $ul_{\xi_\perp}$ в этом подпространстве и углы между ними $u[\cos(\xi_\perp, \eta_\perp)]$, которые были найдены, действуя оператором ковариантного дифференцирования на соответные выражения для длин и косинуса угла. Так как длины и углы не должны меняться, полученные выражения приравниваются к нулю:

$$ul_{\xi_\perp} = \pm\frac{1}{l_{\xi_\perp}}\left[(\nabla_u p_u)(\xi_\perp,\xi_\perp) + 2p_u(\nabla_u\xi_\perp,\xi_\perp)\right] = 0 \qquad \text{(K)}$$

$$u[\cos(\xi_\perp,\eta_\perp)] = \frac{1}{l_{\xi_\perp}l_{\eta_\perp}}\left[(\nabla_u p_u)(\xi_\perp,\eta_\perp) + p_u(\nabla_u\xi_\perp,\eta_\perp) + p_u(\nabla_u\xi_\perp,\nabla_u\eta_\perp)\right] -$$

$$-\frac{1}{l_{\xi_\perp}l_{\eta_\perp}}\left[\frac{1}{l_{\xi_\perp}}(ul_{\xi_\perp}) + \frac{1}{l_{\eta_\perp}}(ul_{\eta_\perp})\right]\cos(\xi_\perp,\eta_\perp) = 0 \quad . \qquad \text{(L)}$$

Теперь, пользуясь аналогией с подходом Манассе и Мизнера, надо перейти к системе отсчета, в которой пробное тело не будет испытывать никаких воздействий. Это будет система отсчета, полученна посредством "деформации" аффинной связности путем введения т.н. **"расширенного оператора ковариантного дифференцирования"** ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$, где $\overline{A}_u = \overline{g}(A_u)$ является смешанным тензором третьего ранга, который является линейным относительно контравариантного векторного поля u, т.е. $A_u = C(u) = A(u)$. Существенно, что именно при этом выборе системы отсчета удается найти совместное решение уравнений (K) и (L) и после отделения симметрической от антисимметрической части, получить **условие для определения переноса Ферми-Уокера**

$$\nabla_u p_u = -2(\sigma + \frac{1}{(n-1)}\Theta p_u) \quad .$$

Это условие фактически и есть условие для **нулевой деривации.**, а деривация определяет понятие локальности в более общем смысле - не только в (инфинитезимальной) окрестности, но и вдоль кривой или на подмногообразии. В данной формуле тензор вращения ω не участвует, но, так как получено дополнительное условие $[p_u(p^u)(C(u))]_a = \omega$, то это означает, что формула справедлива для каждого тензора вращения. Это вполне естественно, так как антисимметрический тензор вращения не будет сказываться на симметрическом тензоре $\nabla_u p_u$. Однако, вполне возможно, что полученный результат является только первым шагом в данном исследовании и тензор вращения будет определяться другими более сложными соотношениями.

В качестве применения нового определения переноса Ферми - Уокера в диссертации рассмотрено движение бесспиновой массивной частицы с плотностью импульса $p = \rho.u$, где ρ суть плотность массы покоя и u - тангенциальный вектор к траектории (мировой линии) центра масс. Эта частица имеет следующие свойства, которые выражают законы сохранения на геометрическом языке:

А. При движении по мировой линии вектор плотности импульса не меняет своего направления - на геометрическом языке это означает параллельный перенос вдоль траектории, т.е. $\nabla_u p = f.p$ (автопараллельное уравнение в неканоническом виде) или $\nabla_u p = 0$ автопаралельное уравнение в каноническом виде). Это свойство дает следующее уравнение для **автопараллельной траектории** $\nabla_u u = \frac{1}{2e}\left[ue - (\nabla_u g)(u,u)\right].u$, **которая является более общей по сравнению с геодезической линии.**

Б. Сохранение плотности импульса означает сохранение длины $l_p =| \ g(p,p) \ |^{\frac{1}{2}}$ вектора плотности импульса, т.е. $ul_p = 0$. Так как сохранение длины есть свойство переноса Ферми, то опять применяется расширенный оператор коварнантного дифференцирования ${}^F\nabla_u ={}^e \nabla_u = \nabla_u - \overline{g}(C(u))$, где второй членъ представляет т.н. **"оператор Ферми"** $C(u) :={}^F \overline{\omega} - \frac{1}{2}.\nabla_u g$. Можно заметить, что второе слагаемое с коварнантной производной в этом операторе является следствием от равенства (К) для сохранения длины. Применение оператора Ферми к вектору p при предположении, что плоскость вращения является ортогональной к вектору u , т.е. $\omega(p) = \rho\omega(u) = 0$ дает равенство $\nabla_u p = -\frac{1}{2}\overline{g}(\nabla_u g)(p)$, откуда следует и требуемое уравнение для автопаралелной траектории (в неканоническом виде), которое зависит от распределения плотности массивного тела

$$\nabla_u u = -\left\{u(\log \rho).u + \frac{1}{2}\overline{g}\left(\nabla_u g\right)(u)\right\} \quad .$$

От зануления правой части этого выражения и решение соответного дифференциального уравнения и находится упомянутая в разделе "Актуальность темы" формула для распределения плотности вещества.

В <u>заключение</u> сформулированы основные результаты диссертации.

3 Основные результаты

<u>На защиту выносятся следующие основные результаты:</u>

- Для теорий с ковариантными и контравариантными связностями и метриками , предложено т. н. **"кубическое алгебраическое уравнение репараметризационной инвариантности гравитационного лагранжиана"** и найдены его решения.

- Доказана теорема для параметризации функциями Вейерштрасса и ее производной более общего кубического уравнения $\left[\rho'(z)\right]^2 = 4\rho^3(z) - g_2(z)\rho(z) - g_3(z)$ (с непостоянными коэффициентными функциями).

- На основе введённой **"тензорной шкалы длины"** и перемасштабированного действия для типа I струнной теории в гравитационных теориях с дополнительными измерениями, выведены неравенства между параметрами в этом действии.

- Найдено условие для существования свободных от сдвига и расширения течений в гравитационных теориях с ковариантными и контравариантными связностями и метриками (ГТККСМ), а также и необходимое и достаточное условие для движения по автопараллельной кривой свободной бесспиновой частицы с плотностью импульса.

- Дано новое определение о пространстве Вейля и показано, что **параллельные** переносы в этом пространстве являются **конформными** переносами, а также что скалярное поле выступает в роли калибровочного фактора, изменяющего длину векторного поля.

- Сформулированы математические условия для существования гироскопа (перенос векторных полей, сохраняющий длины и углы между ними) в ГТККСМ и доказано существование переноса Ферми-Уокера в более общих гравитационных теориях с неметричностью, кручением и расширением.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

В научных журналах, рекоммендованных ВАК:

- 1. *Dimitrov B. G.* Cubic algebraic equations in gravity theory, parametrization with the Weierstrass function and nonarithmetic theory of algebraic equations.// Journal of Mathematical Physics. 2003. T. 44. C. 2542-2578.

- 2. *Dimitrov B. G.* Elliptic Curves, Algebraic Geometry Approach in Gravity Theory And Uniformization Of Multivariable Cubic Algebraic Equations .// International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2008. V. 5. C. 677-698.

- 3. *Dimitrov B. G.* Algebraic geometry approach in gravity theory and new relations between the parameters in type I low-energy string theory action in theories with extra dimensions.// Annalen der Physik (Berlin). 2010. v. 19. 3 - 5. C. 254 - 2575.

- 4. *Manoff S. S., Dimitrov B. G.* Flows and particles with shear-free and expansion-free velocities in (Ln, g)- and Weyl spaces.// Classical and Quantum Gravity. 2002. T. 19. C. 4377 – 4397.

- 5. *Manoff S. S., Dimitrov B. G.* On the Existence of a Gyroscope in Spaces with Affine Connections And Metrics.// General Relativity and Gravitation. 2003. V. 35. 1. C. 25-33.

<u>В научных журналах, вне списка рекомендованного ВАК:</u>

- 6. *Dimitrov B. G.* On the perturbative gravity and quantum gravity theory on a curved background. I. Second-Order gravitational Lagrangian decomposition.//Aerospace Research in Bulgaria. 1997. T. 13. C. 3 - 10.

- 7. *Dimitrov B. G.* On the perturbative gravity and quantum gravity theory on a curved background. II. Application of covariant derivatives and third-rank tensors.//Aerospace Research in Bulgaria. 1997. T. 13. C. 11 - 18.

<u>Статьи в трудах и сборниках конференций:</u>

- 8. *Dimitrov B. G.* Second-Order Perturbative Gravity Theory on a Curved Background Spacetime// Proceedings of the IX International Seminar "Gravitational Energy and Gravitational Waves". Dubna. 8-12 December. 1996. C. 61-70.

- 9. *Dimitrov B. G.* Projective formalism and some methods from algebraic geometry in the theory of gravitation. // Proceedings of the 5th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields". St. Konstantin. Bulgaria. 3-9 Sep 2000. C. 171-179. World Scientific, Singapore.

- 10. *Dimitrov B. G.* Some algebro-geometric aspects of the SL(2, R) Wess-Zumino-Witten model of strings on an AdS(3) background. // First Advanced Workshop on Gravity, Astrophysics, and Strings at the Black Sea (GASBS 2002). Kiten. Bulgaria. 10-16 Jun 2002. eds. P. P. Fiziev and M. D. Todorov . C. 64-74. St. Kliment Ohridsky University Press . Sofia. Bulgaria.

- 11. *Dimitrov B. G.* Integral geometry on the Lobachevsky plane and the conformal Wess-Zumino-Witten model of strings on an AdS (3) background // Proc. of the International Seminar on Non - Euclidean (Lobachevsky) Geometry". 26-30 February, 2004, JINR, Dubna, dedicated to the 75th Anniversary of Prof. N.A. Chernikov, C.91-102. Publishing Department of the Joint Institute of Nuclear Research. Dubna.

- 12. *Dimitrov B. G.* Some Algebraic Geometry Aspects of Gravitational Theories with Covariant and Contravariant Connections and Metrics (GTCCCM) and Possible Applications to Theories with Extra Dimensions. // Proceedings of the Second Russian Summer School – Seminar "Contemporary Theoretical Problems of Gravitation and Cosmology GRACOS - 2009". Publ. House "Foliant". Kazan. Russia. 2009; C. 33 - 38; also arXiv:0910.4136v1 [hep-th].

- 13. *Dimitrov B.G.* Perturbative Gravity Theory on a Curved Background and its Importance for Gravitational Light Deflection Experiments.// Proceedings of the Russian Summer School - Seminar "Nonlinear Fields and Relativistic Statistics in the Theory of Gravitation and Cosmology". 6-10 September 2010. Kazan - Yalchik. C. 159-163.

Статьи в процессе реферирования и электронных архивах:

- 14. *Dimitrov B. G.* Elliptic Curves and Algebraic Geometry Approach in Gravity Theory I. The General Approach. // subm. to "Advances in Theoretical and Mathematical Physics". 25 стр. arXiv:0911.1049 Mathematical Physics (math-ph) .

- 15. *Dimitrov B.G.* Elliptic Curves and Algebraic Geometry Approach in Gravity Theory II. Parametrization of a Multivariable Cubic Algebraic

Equation // subm. to "Advances in Theoretical and Mathematical Physics". 8 стр. arXiv:0911.1051 Mathematical Physics (math-ph).

- 16. *Dimitrov B. G.* Elliptic Curves and Algebraic Geometry Approach in Gravity Theory III. Uniformization Functions for a Multivariable Cubic Algebraic Equation// subm. to "Advances in Theoretical and Mathematical Physics". 18 стр. arXiv:0911.1052 Mathematical Physics (math-ph).

- 17. *Dimitrov B. G.* Algebraic Geometry Approach in Theories with Extra Dimensions I. Application of Lobachevsky (hyperbolic) Geometry // ", submitted to "International Journal of Geometric Methods in Modern Physics". 41 стр. (revised and extended version). hep-th Arxiv:0810.1501D.

- 18. *Dimitrov B. G.* Algebraic Geometry Approach in Theories with Extra Dimensions II. Tensor Length Scale, Compactification and Rescaling in Low-Energy Type I String Theory // submitted to "International Journal of Geometric Methods in Modern Physics". 21 стр. hep-th Arxiv:0810.1503D.

- 19. *Dimitrov B.G.* Block-Structure Method for the Solution of the Matrix System of Equations $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ in the $N-$dimensional Case // 21 стр. hep-th Arxiv:0810.5312.

- 20. *Dimitrov B.G.* Cubic Algebraic Equations in Gravity Theory, Parametrization with the Weierstrass Function and Non-Arithmetic Theory of Algebraic Equations.// 77 стр. hep-th Arxiv:0107231.

- 21. *Dimitrov B.G.* Elliptic Curves, Algebraic Geometry Approach in Gravity Theory and Some Applications in Theories with Extra Dimensions// 113 стр. hep-th Arxiv:0511136.

Методы алгебраической геометрии и перенос Ферми-Уокера в расширенных теориях гравитации

ДИМИТРОВ Богдан Георгиев

В диссертации развит подход алгебраической геометрии в теории гравитации. Математическая основа этого подхода связана с разграничением между ковариантными и контравариантными метрическими компонентами (ГТККСМ), а физическая основа - изменение расстояния между каждыми двумя точками пространство-времени из-за действия относительного ускорения. Рассмотрено применение к гравитационным теориям с дополнительными пространствено-временными измерениями. Представлено новое разложение для тензора скорости деформации в ГТККСМ, а также найдены новые условия для переноса Ферми - Уокера в ГТККСМ и в средах с сдвигом,расширением, вращением и неметричностью. Обосновано возможное применение этих результатов в теориях Релятивистких Систем Отсчета (РСО), Лазерной Локации Луны и Релятивистской Астрометрии.

Methods of Algebraic Geometry and Fermi - Walker Transports in Extended Gravitational Theories

DIMITROV Bogdan Georgiev

In this dissertation the approach of algebraic geometry in the theory of gravitation has been developed. The mathematical grounds for this approach are related with the distinction between the covariant and the contravariant metric tensor components (GTCCMC) and the physical grounds - to the change of the length between every two space-time points due to the action of the relative acceleration. An application has been considered to gravitational theories with extra spacetime dimensions. A new decomposition of the velocity tensor deformation has been given, as well as new conditions for Fermi-Walker transport in GTCCMC and in spaces with shear, expansion, rotation and non-metricity. The possible application of these results to theories of Relativistic Reference Systems (RRS), Lunar Laser Ranging and Relativistic Astrometry has been motivated.

19

Отпечатано методом прямого репродуцирования
с оригинала, предоставленного автором.

Подписано в печать 14.11.2013.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,17. Уч.-изд. л. 2,86. Тираж 120 экз. Заказ № 225.

ООО “Дубненская типография”
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Курчатова, д. 2-а