На правах рукописи

Перепелкина Юлианна Вячеславовна

ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ В НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ВАРИАНТАХ ЗАДАЧИ *N* ТЕЛ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической физики и механики факультета физико-математических и естественных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН).

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Р.Г.Мухарлямов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, **Марков Юрий Георгиевич,** профессор кафедры «Теоретическая механика» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

кандидат физико-математических наук, доцент **Зленко Александр Афанасьевич,** профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет» (МАДИ).

Ведущая организация: Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН)

Защита состоится 8 сентября 2016 г. в 15-30 на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 в ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов» (РУДН) по адресу: 115419, г. Москва, ул.Орджоникидзе, д.3, зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов (РУДН) по адресу: 117198, г.Москва, ул.Миклухо-Маклая, д.6 или на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru

Автореферат разослан «___»__________201__г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 212.203.34
кандидат физико-математических наук, доцент В.А.Попова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача многих тел небесной механики ($N \geq 3$), даже в ее простейших вариантах, представляет значительный научный интерес, поскольку в попытках получить ее даже не общее, а частные решения, исследователями были созданы и развиты многочисленные эффективные методы анализа динамических систем, имеющих приложения в различных разделах науки и техники. Исследование проблем существования и устойчивости центральных конфигураций было актуально не только для небесной механики, в недрах которой более 250-ти лет назад они возникли в работах Эйлера, Лагранжа, Лапласа и др. и в терминах которой они были первоначально сформулированы. Кроме аналитической механики, механики космического полета и звездной динамики, представляющих естественные области применения этих результатов, они представляют большой интерес и для других разделов естественных наук, например, рассматриваются в теоретической физике, в кинетической теории газов, в электро- и магнетодинамике и некоторых других разделах.

Доказательство существования и поиск конкретных совокупностей геометрических и динамических параметров обобщенных плоских центральных конфигураций с различными несферическими телами в центре, кроме теоретического, представляет и практический интерес, поскольку такие решения используются при анализе периодических движений, генерировании новых модельных ограниченных задач небесной механики и космодинамики и т.д. С появлением понятий плоских и пространственных центральных конфигураций с этой точки зрения стали рассматриваться задачи анализа распределения электронов на сфере, исследования клетки атома углерода, микро-кластеров разряженного газа, солитоновые модели ядер, рассеяние магнитных монополей и др.

Вместе с тем, несмотря на достаточно богатую историю, огромное количество проведенных исследований и публикаций их результатов, многие связанные с центральными конфигурациями задачи остаются полностью или частично нерешенными.

В связи с вышеизложенным проблемы обобщения плоских центральных конфигураций в различных постановках задач, в том числе с несферическими центральными телами, такими, как однородные эллипсоиды вращения или трехосные эллипсоиды, исследования устойчивости новых обобщенных центральных конфигураций и положений относительного равновесия, в частности, в вариантах задачи Ситникова и ее обобщений в строгом нелинейном смысле, представляются крайне важными как в теоретическом, так и практическом отношениях.

Цели и задачи работы. Диссертационная работа посвящена решению проблем существования и устойчивости обобщенных плоских центральных конфигураций в различных постановках задач с несферическими центральными телами, а также исследованию устойчивости положений относительного равновесия в вариантах задачи Ситникова и ее обобщений в строгом нелинейном смысле в случае малых эксцентриситетов орбит.

Целями диссертационного исследования являются:

- доказательство существования новых обобщенных плоских центральных конфигураций квадратного, ромбовидного, дельтовидного и трапецеидального типа в случаях несферических центральных тел, в частности, эллипсоида вращения и трехосного эллипсоида;

- исследование устойчивости по Ляпунову найденных новых плоских центральных конфигураций квадратной, ромбовидной, дельтовидной и трапецеидальной форм с несферическими центральными телами;

- уточнение условий и размеров областей устойчивости и неустойчивости положений относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова при малых эксцентриситетах орбит тел конечных размеров ($e < 0.25$);

- завершение задачи исследования устойчивости в строгом нелинейном смысле положений относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова при малых эксцентриситетах орбит тел конечных размеров.

Методы исследования. В основу аналитических исследований положены методы математического анализа, высшей алгебры, теоретической и небесной механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости Ляпунова и теории устойчивости гамильтоновых систем Арнольда-Мозера и А.П.Маркеева. Вычислительные алгоритмы и расчеты были реализованы в рамках математических средств *Wolfram Mathematica* и *Maple* 13.

Научная новизна работы:

1) Доказательство существования новых обобщенных плоских центральных конфигураций, не имеющих аналогов в небесной механике. Эти результаты определяют новое направление в исследовании гомографических, гомотетических и стационарных решений задач небесной механики, звездной динамики и космодинамики, а именно – исследование обобщенных вариантов

задач с несферическими центральными телами, что определяет более адекватные постановки задач и исследования устойчивости найденных решений;

2) Завершение проблемы устойчивости в задаче Ситникова в ее классическом и обобщенных вариантах в строгом нелинейном смысле при малых эксцентриситетах орбит.

Теоретическая и практическая значимость работы. Сформулированы новые постановки задач 4-х и 5-ти тел, которые позволили доказать существование обобщенных плоских центральных конфигураций в форме выпуклых четырехугольников (квадратов, ромбов, дельтоидов и трапеций), на пересечении диагоналей которых расположены несферические центральные тела. Получены аналитические необходимые и достаточные условия существования таких обобщенных центральных конфигураций. Найдены многочисленные совокупности геометрических и динамических параметров, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям существования. Проведены исследования устойчивости по Ляпунову всех новых обобщенных центральных конфигураций. Завершена задача об устойчивости в строгом нелинейном смысле положения равновесия в классическом и обобщенных вариантах проблемы Ситникова для малых эксцентриситетов орбит ($e < 0.25$).

Доказательство существования обобщенных плоских центральных конфигураций с несферическими телами в центре помимо теоретического значения, определяемого доказательством существования совершенно новых частных решений в общей задаче N тел ($N > 3$), имеет и большое практическое заченчебние. Дело в том, что каждое частное решение общей задачи N тел является в некотором роде генератором множеств вариантов ограниченных задач N+1 тел, что представляет собой широкий диапазон возможностей их практического применения в небесной механике, звездной динамике и космодинамике, в частности, для формулирования многочисленных новых динамических моделей.

Также, казалось бы, теоретический результат – завершение проблемы устойчивости положения относительного равновесия (внутренняя точка либрации) в вариантах задачи Ситникова имеет эффективные приложения в практической космодинамике – уже несколько лет используется для размещения в ней орбитальной станции, телескопа или космической обсерватории. Эта задача космической динамики, предполагающая создание искусственных космических объектов в точках либрации системы трех гравитирующих тел (два массивных тела и пассивно гравитирующий объект), требует исследования устойчивости равновесия спутника в точках либрации.

Подобные проекты уже были реализованы на практике: американские проекты GENESIS (2002 г., сбор образцов солнечного ветра с помощью аппарата, летающего вокруг точек либрации L_1 и L_2) и ARTEMIS (в 2010 г. состоялся запуск двух аппаратов для исследования в окрестностях точек L_1 и L_2 геомагнитного поля Луны, поведения солнечного ветра, взаимодействия между Солнцем и Луной); российский проект по созданию космической обсерватории «Миллиметрон» (2006-2015 гг.) для проведения исследований астрономических объектов во Вселенной; а также другие американские и европейские проекты («Планк», «Гершель», WMAP) по размещению космических аппаратов в точках либрации.

Достоверность полученных результатов и выводов диссертации обеспечивается:

– математически четкими и корректными постановками исследуемых задач и их физической обоснованностью;

– использованием строгих методов математического анализа, высшей алгебры, теоретической и небесной механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости Ляпунова и теории устойчивости гамильтоновых систем Арнольда-Мозера и А.П.Маркеева;

– проведением многочисленных и трудоемких аналитических выкладок и вычислений с использованием программных пакетов Maple и Mathematica;

– непротиворечивостью полученных результатов и их согласованностью с результатами классических работ и результатами, полученными другими авторами.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- 7-м Международном симпозиуме по классической и небесной механике в г.Седлице, Польша, 2011 (7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Siedlce, Poland, 2011),
- 8-м Международном симпозиуме по классической и небесной механике в г.Седлице, Польша, 2013 (8th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Siedlce, Poland, 2013),
- заседании научного семинара Отдела безопасности и устойчивости сложных систем ВЦ им. А.А Дородницына под руководством проф. Северцева Н.А. (2013 г.),
- заседании семинара по нелинейным колебаниям и небесной механике кафедры высшей математики Московского автомобильно-дорожного

государственного технического университета (МАДИ) под руководством проф. С.Г.Журавлева (2014, 2015),

- научно-методических конференциях Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) (2014, 2015),
- 30-ом Международном конгрессе математиков в Сеуле (Корея) – ICM2014 (2014).

Публикации. Материалы, отражающие основное содержание диссертации, изложены в 11 научных публикациях, в том числе в 8 статьях (включая 2, опубликованные в источниках из перечня ВАК, которые также отражены в базах данных Scopus и Web of Science) и в 3-х докладах на международных научных конференциях.

Структура и объем работы: диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, включая 23 рисунка и 16 таблиц, и списка литературы из 82 наименований. Объем диссертации составляет 124 страницы.

Содержание работы

Первая глава является вводной, и в ней, помимо достаточно объемного обзора как исторических, так и современных трудов по теме диссертационной работы, приведены аналитические и геометрические определения центральных конфигураций и их роль в различных разделах естественных наук. В конце главы проводится анализ результатов исследований центральных конфигураций за всю историю их существования, и делаются выводы о проблемах, оставшихся в этой области механики неразрешенными.

Раздел 1.1 состоит из 4 подразделов и содержит определения центральных конфигураций и историю их открытия:

В подразделе 1.1.1 приведены история открытия центральных конфигураций, несколько аналитических и геометрических определений центральных конфигураций и используемая терминология.

В подразделе 1.1.2 рассматривается классический период в развитии исследований центральных конфигураций – с 1760 по 1880 гг., начиная с работ Эйлера и Лагранжа.

В подразделе 1.1.3 описан период интенсивного развития теории центральных конфигураций (1881-1941 гг.). Приведен анализ работ авторов, специализирующихся в этой области исследования - Lehmann-Filhés, Dziobek, Andoyer, W.Longley, F.R.Moulton, E.Breglia, M.Lindow, MacMillan W.D., Bartky W., Williams W.L. и др.

В подразделе 1.1.4 описан современный период исследований (с 1942 г. по настоящее время). Проанализированы труды А.Винтнера, G.Mayer, W.B.Klemperer («розеточные» конфигурации), Y.Hagihara (теория центральных конфигураций), Perko L.M. и Walter E.L. (доказательство существования плоской центральной конфигурации (кольцевой, концентрической) тел одинаковой массы), Б.Эльмабсута (теорема существования бисекториальных решений), Е.А.Гребеникова (теоремы существования центральных конфигураций в различных вариантах задачи N тел), А.Н.Прокопени (центральные конфигурации с телом в центре), Llibre J. и Mello L.F (доказательство существования центральных конфигураций для задач n = 6, 8, 9 тел).

Раздел 1.2 посвящен вопросам исследования устойчивости по Ляпунову существующих центральных конфигураций.

В **разделе 1.2.1** приведен подробный анализ трудов вышеперечисленных авторов и отмечено согласование полученных результатов.

Раздел 1.2.2 касается проблемы исследования устойчивости положения относительного равновесия системы тел в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова в строгом нелинейном смысле, решение которой осталось незавершенным в части исследования резонанса четвертого порядка.

Во второй главе проведено исследование существования обобщенных плоских центральных конфигураций в барицентрической системе координат.

В разделе 2.1 выведены аналитические условия существования классических и обобщенных центральных конфигураций в виде нескольких, вложенных один в другой квадратов в рамках задачи ($4n$+1)-тел. При этом в центре конфигурации рассматривались шар, сжатый эллипсоид и трехосный эллипсоид. Результаты расчетов представлены в Табл.1, 3, 6.

Основные уравнения движения (N + 1) тел в барицентрической системе координат могут быть найдены в монографиях А.Винтнера и Г.Н.Дубошина. На базе этих уравнений в работах Б.Эльмабсута и Е.А.Гребеникова выписаны в общем виде необходимые и достаточные условия существования плоских центральных конфигураций, как простейших в виде изолированного многоугольника с телами в его вершинах, так и сложных – «гнездовидных» или «каскадных» в виде вложенных один в другой многоугольников с телами в их вершинах. Для шарового центрального тела эти условия имеют вид:

$$\ddot{x}_{l,k} = \dot{x}_{l,k} = 0\,, \quad \ddot{y}_{l,k} = \dot{y}_{l,k} = 0\,, \quad \ddot{z}_{l,k} = \dot{z}_{l,k} = z_{l,k} = 0$$

$$\omega_l^2 x_{l,k} = \frac{M_0 x_{l,k}}{\left(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{l \le r \le 2 \\ r \ne l}} m_r \sum_{j=1} \frac{x_{l,k} - x_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{r,j}\right)^2\right]^{3/2}} +$$

$$+ m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}} \frac{x_{l,k} - x_{l,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{l,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{l,j}\right)^2\right]^{3/2}},$$

$$\omega_l^2 y_{l,k} = \frac{M_0 y_{l,k}}{\left(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{l \le r \le 2 \\ r \ne l}} m_r \sum_{j=1} \frac{y_{l,k} - y_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{r,j}\right)^2\right]^{3/2}} +$$

$$+ m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}} \frac{y_{l,k} - y_{l,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{l,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{l,j}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad l = 1, 2, ..., p, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

Используя общие выражения (1), в **подразделах 2.1.1–2.1.3** рассматриваются аналитические выражения для расчета параметров квадратных конфигураций в задаче ($4n$+1)-тел при n = 1 (2.1.1), n = 2 (2.1.2) и n = 3 (2.1.3).

Общее выражение для квадрата угловой скорости вращения правильного n-угольника с равными между собой массами в его вершинах и произвольной массой M_0 в центре описанной вокруг него окружности радиуса a_0 имеет вид

$$\omega_n^2 = \frac{1}{a_0^3}\left[M_0 + \frac{m}{4}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\sin\frac{\pi(k-1)}{n}\right)^{-1}\right]. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче (4+1) тел с шаровым телом в центре силовая функция воздействия конфигурации на материальную точку $P(x, y, z)$ имеет вид

$$U(P) = f\left(\frac{M_0}{\Delta_0} + m_1\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\Delta_i} + m_2\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\Delta_j}\right) \tag{3}$$

где f – гравитационная постоянная,

$$\Delta_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}, \quad k = 1, 2.$$

Если рассматривать в качестве центрального тела трехосный эллипсоид с полуосями $a > b > c$, то гравитационный потенциал воздействия такой конфигурации на материальную точку $P(x, y, z)$ будет иметь вид

$$U(P) = f\left[\frac{M_0}{\Delta_0}\left(1 + \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{\Delta_0^2} + ...\right) + m_1\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\Delta_i} + m_2\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\Delta_j}\right], \tag{4}$$

где малые величины λ, μ, ν определяются соотношениями

$$\lambda = (a^2 - R^2)/mR^2, \mu = (b^2 - R^2)/mR^2, \quad \nu = (c^2 - R^2)/mR^2, \;\; \lambda + \mu + \nu = 0,$$

R – радиус сферы (шара) равного с трехосным эллипсоидом объема и m – параметр, равный m = 10/3 для однородного эллипсоида. Величины λ, μ, ν характеризуют малые отклонения формы трехосного эллипсоида от шарообразной.

При рассмотрении в качестве центрального тела эллипсоида вращения с полуосями a=b>c , то гравитационный потенциал воздействия такой конфигурации на материальную точку $P(x, y, z)$ будет иметь вид

$$U(P) = f\left[\frac{M_0}{r}\left(1 + \frac{3}{10}\left(\frac{\nu c}{r}\right)^2 + \ldots\right) + m_1\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\Delta_i} + m_2\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\Delta_j}\right], \qquad (5)$$

где сумма в круглых скобках представляет собой сумму первых двух членов известного разложения силовой функции сжатого эллипсоида вращения по полиномам Лежандра

$$U(P) = \frac{fM_0}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n \nu^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n} P_{2n}\left(\frac{z}{r}\right) = $$
$$= \frac{fM_0}{r}\left[1 - \frac{\nu^2}{5}\left(\frac{c}{r}\right)^2 P_2\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{3\nu^4}{35}\left(\frac{c}{r}\right)^4 P_4\left(\frac{z}{r}\right)^4 - \ldots\right], \qquad (6)$$

где

$$P_2\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right], \quad P_4\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{8}\left[35\left(\frac{z}{r}\right)^4 - 30\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 3\right] \quad .$$

и было принято во внимание, что $\nu = \sqrt{a^2 - c^2}/c$ (сжатие или второй эксцентриситет) является малой величиной. В случае учета полного потенциала притяжении эллипсоида вращения использовалось другое известное выражение

$$U(P) = \frac{3fM_0}{2\nu c}\left\{arctg(\nu u) + \frac{r^2}{2(\nu c)^2}\left[\frac{\nu u}{1+(\nu u)^2} - arctg(\nu u)\right] + \frac{z^2}{(\nu c)^2}\left[arctg(\nu u) - \nu u\right]\right\} \qquad (7)$$

$$u = c/\sqrt{r^2 - (\nu c)^2}$$

и соответственно другое выражение будет входить в круглую скобку в выражении (6).

Раздел 2.2 посвящен исследованию классических и обобщенных плоских центральных конфигураций ромбовидной формы. Выведены аналитические условия их существования по алгоритму, использованному в предыдущем разделе.

В **подразделах 2.2.1-2.2.3** рассматриваются конфигурации ромбовидной формы в задаче ($4n$+1)-тел при n = 1 (2.2.1), n = 2 (2.3.2) и n = 3 (2.2.3).

Раздел 2.3 содержит результаты многочисленных расчетов по определению совокупностей геометрических и динамических параметров, удовлетворяющих аналитическим необходимым и достаточным условиям существования квадратной и ромбовидной центральных конфигураций. Результаты расчетов представлены в Табл. 1, 3, 6 для квадратной ц.к. и в Табл. 2, 4, 7, 8 для ромбовидной ц.к.

В **подразделах 2.3.1-2.3.4.** приведены расчеты для конфигураций, имеющих в качестве центрального тела шар (2.3.1), эллипсоид вращения с приближенным выражением потенциала (2.3.2, таблицы 3 и 4), эллипсоид вращения с полным выражением потенциала (2.3.3) и трехосный эллипсоид вращения (2.3.4).

Таблица 3

M_0	m_1	α_1	νc	ω^2	Корни характер. уравнения
1	0.5	1	0.10	1.48155	$\lambda_{1\text{-}4}=\pm 0.38715 \pm 1.10553i$
1	1	1	0.10	1.96010	$\lambda_{1\text{-}4}=\pm 0.41914 \pm 1.34918i$
5	2	1	0.20	6.97421	$\lambda_{1\text{-}4}=\pm 0.80416 \pm 2.33150i$
10	3	2	0.10	1.60891	$\lambda_{1\text{-}4}=\pm 0.35948 \pm 1.08743i$
10	5	3	0.15	0.54789	$\lambda_{1\text{-}4}=\pm 0.23569 \pm 0.67283i$
20	2	3	0.10	0.81188	$\lambda_{1,2}=\pm 0.74559i$; $\lambda_{3,4}=\pm 0.59532i$

Таблица 4

M_0	m_1	α_1	β_1	νc	m_2	ω^2	Корни характер. уравнения
1	0.5	1	0.8	0.2	2.86399	3.86432	$\lambda_{1,2}=\pm 1.26094 \pm 1.89173i$
1	1	1	1.0	0.1	1.00000	1.96010	$\lambda_{1,2}=\pm 0.77159 \pm 1.30342i$
5	2	1	0.8	0.1	13.3642	18.2414	$\lambda_{1,2}=\pm 2.7353 \pm 4.10430i$
10	3	2	1.5	0.1	37.2034	6.10672	$\lambda_{1,2}=\pm 1.60086 \pm 2.37961i$
10	5	3	2.5	0.2	22.2929	1.16583	$\lambda_{1,2}=\pm 0.68276 \pm 1.03537i$
20	2	3	2.5	0.2	33.5890	1.88592	$\lambda_{1,2}=\pm 0.86093 \pm 1.30067i$

Необходимые условия существования:

а) квадратной конфигурации: (приближенное выражение для потенциала эллипсоида вращения

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = M_0 \frac{1}{\alpha_1^3}\left(1 + \frac{3}{10}\left(\frac{\nu c}{\alpha_1}\right)^2 + \dots\right) + \frac{m_1}{4\alpha_1^3}\left(2\sqrt{2}+1\right), \tag{8}$$

б) ромбовидной конфигурации (полное выражение для потенциала эллипсоида вращения)

$$\omega_x{}^2 = 4\frac{\pi a^2 c}{(\nu c)^3}\Phi(\alpha_1,\nu c) + m_1\frac{1}{4\alpha_1^3} + 2m_2\frac{1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^{3/2}} \tag{9}$$

$$\omega_y{}^2 = 4\frac{\pi a^2 c}{(\nu c)^3}\Phi(\beta_1,\nu c) + m_2\frac{1}{4\beta_1^3} + 2m_1\frac{1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^{3/2}},.\quad \omega_x^2 = \omega_y{}^2 = \omega^2, \tag{10}$$

где

$$2\Phi(s,\nu c) = arctg\frac{(\nu c)}{(s^2-(\nu c)^2)^{1/2}} - \frac{(\nu c)(s^2-(\nu c)^2)^{1/2}}{s^2} \tag{11}$$

Третья глава посвящена вопросам доказательства существования обобщенных плоских центральных конфигураций (дельтовидной и трапецеидальной) в гелиоцентрической системе координат. Приведен явный вид условий существования и соответствующих алгебраических систем уравнений для определения совокупностей геометрических и динамических параметров классических и обобщенных дельтовидных центральных конфигураций для случаев центральных тел: а) шар, б) эллипсоид вращения и в) трехосный эллипсоид. Результаты расчетов представлены в Табл. 9-12.

В разделе 3.1 записаны уравнения движения в общей задаче N тел в гелиоцентрической вращающейся системе координат.

Раздел 3.2 содержит общие аналитические условия существования нескольких типов плоских классических и обобщенных дельтовидных и трапецеидальных конфигураций в упомянутой системе координат при несферических центральных телах.

Необходимые и достаточные условия существования плоской обобщенной центральной конфигурации (гравитационная постоянная f принята равной единице) имеют вид (центральное тело трехосный эллипсоид):

$$\left.\begin{aligned}
\omega^2 x_i &= \left[M_0\left(1-\frac{2\lambda}{r_i^2}+\frac{5(\lambda x_i^2+\mu y_i^2)}{r_i^4}+\ldots\right)+m_i\right]\frac{x_i}{r_i^3} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\left(\frac{x_j-x_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{x_j}{r_j^3}\right)\\
\omega^2 y_i &= \left[M_0\left(1-\frac{2\mu}{r_i^2}+\frac{5(\lambda x_i^2+\mu y_i^2)}{r_i^4}+\ldots\right)+m_i\right]\frac{y_i}{r_i^3} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j\left(\frac{y_j-y_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{y_j}{r_j^3}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где (x_k, y_k) – координаты тела m_k, $k = 1, \ldots, n$,

Подразделы 3.2.1-3.2.3 посвящены исследованию классических дельтовидных (3.2.1), обобщенных дельтовидных (3.2.2), и обобщенных трапецеидальных (3.2.3) центральных конфигураций.

Необходимые и достаточные условия существования дельтовидной центральной конфигурации с шарообразным телом в центре имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{1x}^2=\frac{M_0+m_1}{|\alpha|^3}+\frac{2m_2}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{m_3}{\alpha}\left(\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\\
&\omega_{3x}^2=\frac{M_0+m_3}{|\gamma|^3}+\frac{2m_2}{(\beta^2+\gamma^2)^{3/2}}+\frac{m_1}{\gamma}\left(\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\\
&\omega_{2y}^2=\frac{M_0+m_2/4}{|\beta|^3}+\frac{m_1}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{m_3}{(\beta^2+\gamma^2)^{3/2}},\quad \omega_{1x}^2=\omega_{3x}^2=\omega_{2y}^2=\omega^2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Необходимые и достаточные условия существования дельтовидной центральной конфигурации с эллипсоидом вращения в центре (приближенный потенциал) имеют вид

$$\omega_{1x}^2=\frac{1}{|\alpha|^3}\left[M_0A(\alpha,\nu c)+m_1\right]+\frac{2m_2}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{m_3}{\alpha}\left(\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right),$$

$$\omega_{3x}^2=\frac{1}{|\gamma|^3}\left[M_0A(\gamma,\nu c)+m_3\right]+\frac{2m_2}{(\beta^2+\gamma^2)^{3/2}}+\frac{m_1}{\gamma}\left(\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right), \tag{14}$$

$$\omega_{2y}^2=\frac{1}{|\beta|^3}\left[M_0A(\beta,\nu c)+\frac{m_2}{4}\right]+\frac{m_1}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{m_3}{(\beta^2+\gamma^2)^{3/2}},\qquad \omega_{1x}^2=\omega_{3x}^2=\omega_{2y}^2=\omega^2,$$

где функция $A(s,\nu c)=\left(1+\frac{3}{10}\left(\frac{\nu c}{s}\right)^2+\ldots\right)$.

Четвертая глава посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову всех классических и обобщенных плоских центральных конфигураций с несферическими центральными телами, существование которых было доказано в главах 2 и 3.

В разделах 4.1 и 4.2 приведено введение, содержащее описание известных результатов по устойчивости ц.к., и вывод общих уравнений в вариациях, соответствующих всем рассматриваемым в данной работе ц.к.

Раздел 4.3 содержит результаты анализа линейной устойчивости обобщенных плоских ц.к., существующих в барицентрической системе координат, а именно **в подразделе 4.3.1** рассмотрена квадратная ц.к., а в **подразделе 4.3.2 –** ромбовидная ц.к. с несферическими центральными телами, определяющие различные обобщенные ц.к. В каждом из многочисленных рассмотренных случаев выписываются коэффициенты характеристической матрицы, составляются соответствующие характеристические уравнения и находятся их корни. Значения корней характеристических уравнений представлены в последнем столбце соответствующих таблиц. Центральная конфигурация считается устойчивой в первом приближении, если среди корней ее характеристического уравнения отсутствуют корни с положительной вещественной частью. При этом это должно иметь место для каждого из периферийных тел ц.к. В большинстве найденных обобщенных конфигурациях, это условие не выполняется, т. е. они – неустойчивы (Табл. 1-8).

Раздел 4.4 содержит результаты анализа линейной устойчивости обобщенных плоских ц.к., существующих в гелиоцентрической системе координат: **в подразделе 4.4.1** рассмотрена дельтовидная ц.к., а в **подразделе 4.4.2 –** трапецеидальная ц.к. Обе конфигурации как в классическом варианте, так и в их обобщенных вариантах, являются неустойчивыми.

Пятая глава содержит исследования устойчивости положений относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова в строгом нелинейном смысле.

В разделах 5.1, 5.2 содержится введение в проблему и постановки рассматриваемых вариантов задачи.

Раздел 5.3 содержит описание аналитической процедуры представления гамильтониана возмущенного движения (слагаемых H_2, H_3 и H_4) в виде рядов Фурье с коэффициентами в виде рядов по степеням эксцентриситета e с точностью до четвертой степени включительно.

Раздел 5.4 посвящен нормализации функции Гамильтона при отсутствии резонансов и вырождения и переход к новым каноническим сопряженным переменным «действие-угол» для формулировки новых теорем об устойчивости на базе известных теорем Арнольда-Мозера и А.П.Маркеева. Полученные результаты представлены в таблице 16.

Таблица 16

n	$a=\frac{4n}{S_1}$	Случай A			Случай $Б$		
		$e_{\text{res}}\times10^4$	$\lvert c\rvert\times10^4$	$d\times10^4$	$e_{\text{res}}\times10^4$	$\lvert c\rvert\times10^4$	$d\times10^7$
45 000	0.57963	2495	8680	5	2422	8597	4588
50 000	0.57405	2025	8272	0	1984	8235	2172
55 000	0.56909	1515	7929	0	1497	7917	782
60 000	0.56464	855	7636	0	852	7634	117
61 000	0.56381	666	7582	0	665	7581	53
62 000	0.56298	405	7530	0	404	7530	11
62 500	0.56258	163	7505	0	163	7505	1
62 550	0.56254	113	7502	0	113	7502	0.24
62 580	0.56251	68	7501	0	68	7501	$4.1\cdot10^{-5}$
62 597	0.56250	5	7500	0	5	7500	$2.4\cdot10^{-5}$

В разделе 5.5 проанализирована структура гамильтониана в классическом варианте задачи Ситникова и найдено, что резонанс второго порядка не может быть реализован при малых значениях эксцентриситета орбит тел конечных размеров. Резонанс третьего порядка не может иметь места в этой задаче ввиду специального вида ее гамильтониана, а именно, $H_3(p, q) = 0$. Резонанс четвертого порядка не проявляется по той же причине, что и резонанс второго порядка. В результате имеет место

Теорема 1. *Тривиальное положение относительного равновесия в классической задаче Ситникова устойчиво по Ляпунову при малых значениях эксцентриситета орбиты тел конечных размеров.*

Для анализа устойчивости положения равновесия в случае резонанса четвертого порядка в переменных «действие-угол» (r, φ) нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H^*(r, \varphi) = r^2(c + d\cos 4\varphi) + O(r^{5/2}), \qquad (15)$$

где

$$d = \frac{1}{4}\left[\left(h_{1k}^{(0)} - h_{1k}^{(2)} + h_{1k}^{(4)} - h_{2k}^{(1)} + h_{2k}^{(3)}\right)^2 + \left(h_{1k}^{(1)} - h_{1k}^{(3)} + h_{2k}^{(0)} - h_{2k}^{(2)} + h_{2k}^{(4)}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (16)$$

В разделе 5.6 рассматривается обобщенный вариант задачи Ситникова, который отличается от классического варианта тем, что оказывается возможным один из резонансов четвертого порядка, а именно, $4\omega = 3$ при изменении n (число тел конечных размеров) в некотором диапазоне значений. Производится нормализация гамильтониана при наличии резонанса четвертого порядка. Уточняется вид коэффициента d, в общем случае задаваемый формулой (16). Поскольку в данной задаче имеет место только резонанс $4\omega = k$, $k = 3$, все слагаемые во второй паре круглых скобок в равенстве (12) тождественно равны нулю, имеем

$$d = \frac{1}{4}\left| h_{13}^{(0)} - h_{13}^{(2)} + h_{13}^{(4)} - h_{23}^{(1)} + h_{23}^{(3)} \right|.$$

По теореме А.П.Маркеева вопрос об устойчивости или неустойчивости положения равновесия при резонансе четвертого порядка решается анализом соотношения между коэффициентами | c | и d. Результаты анализа представлены на рис. 23.

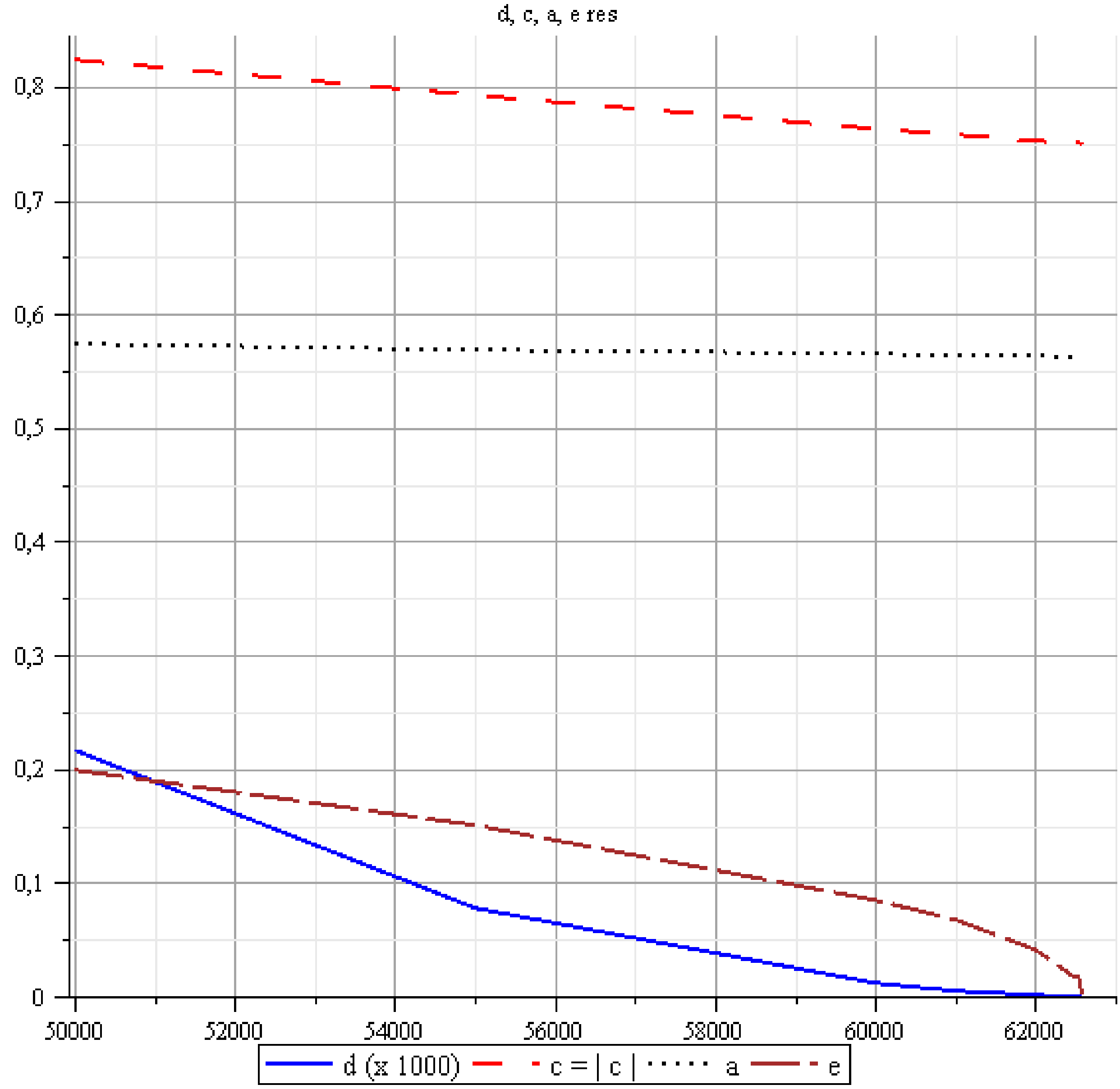

Рис. 23

В разделе 5.7 с использованием теоремы А.П.Маркеева и анализа соотношений, связанных с упомянутым резонансом, формулируется

Теорема 2. *Тривиальное положение относительного равновесия в обобщенных вариантах задачи Ситникова* ($45\,000 \le n \le 62\,597$) *устойчиво по Ляпунову при малых значениях эксцентриситета орбит тел конечных размеров.*

В рассматриваемой задаче $|\,c\,| > d$, что подтверждается данными таблицы и видом кривых на рис. 23.

В **Заключении** перечислены основные научные результаты, полученные в диссертационной работе.

В приложении 1 приведены четыре блока **(Блок 1 - Блок 4)** коэффициентов уравнений в вариациях для классических и обобщенных центральных конфигураций, найденных в барицентрической системе координат (квадратная и ромбовидная ц.к.).

В приложении 2 приведены четыре блока **(Блок 5 - Блок 8)** коэффициентов уравнений в вариациях для классических и обобщенных центральных конфигураций, найденных в гелиоцентрической системе координат (дельтовидная и трапецеидальная ц.к.**).**

На защиту выносятся следующие научные результаты:

1. Доказательство существования новых обобщенных плоских центральных конфигураций в форме квадрата и ромба с трехосным эллипсоидом, при наличии симметрии относительно двух взаимно-перпендикулярных осей и плоскости динамической симметрии в задаче ($4n$+1)-тел при n = 1, 2, 3.

2. Результаты расчетов, показывающих, что для существования плоских центральных конфигураций дельтовидной и трапецеидальной форм с центральным телом или без него необходимо наличие взаимной перпендикулярности диагоналей фигуры и построение модели движения тел в гелиоцентрической вращающейся системе координат, начало которой расположено на пересечении диагоналей.

3. Доказательство существования новых обобщенных плоских центральных конфигураций в форме дельтоида и равнобочной трапеции с эллипсоидом вращения и трехосным эллипсоидом на пересечении взаимно-перпендикулярных диагоналей.

4. Исследование устойчивости в строгом нелинейном смысле тривиального положения относительного равновесия в классическом и в обобщенных вариантах задачи Ситникова в случае малых эксцентриситетов орбит тел конечных размеров.

5. Доказательство в классическом варианте задачи Ситникова (при n = 2) отсутствия резонансов второго, третьего и четвертого порядков и случая вырождения, а в обобщенных вариантах (при $2 < n \leq 5\cdot10^5$) – отсутствия резонансов второго и третьего порядков и также случая вырождения.

6. Доказательство существования резонанса четвертого порядка в вариантах задачи Ситникова, где число тел конечных размеров удовлетворяет неравенству $45000 \leq n \leq 62597$, при этом эксцентриситет орбит $e < 0{,}25$.

7. Доказательство с помощью теорем Арнольда-Мозера и А.П.Маркеева существования устойчивости по Ляпунову тривиальных положений

относительного равновесия в вышеупомянутых вариантах задачи Ситникова.

8. Исследование проблемы линейной устойчивости всех обобщенных плоских центральных конфигураций квадратной, ромбовидной, дельтовидной и трапецеидальной форм в случаях, когда на пересечении их диагоналей находятся либо сжатый эллипсоид вращения, либо трехосный эллипсоид.

9. Доказательство неустойчивости в общем случае всех рассмотренных обобщенных плоских центральных конфигураций. Однако, показано, что в некоторых вариантах центральных конфигураций возможна условная устойчивость, т.е. находятся совокупности значений геометрических и динамических параметров, при которых движение устойчиво в линейном приближении.

В целом работа представляет собой единый подход к доказательству существования новых обобщенных плоских центральных конфигураций с несферическими телами в центре и исследования их устойчивости по Ляпунову.

Публикации по теме диссертационной работы. Основные научные результаты по теме диссертационного исследования опубликованы в следующих работах:

1. On existence of planar central configurations in the (4*n*+1)-body problem with two axis of symmetry in a case of the triaxial central body. Book of abstracts of 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Siedlce (Poland), 2011, P. 240-241. (coauthor S.G. Zhuravlev)
2. On existence of planar central configurations in the (4*n*+1)-body problem with two axis of symmetry in a case of the triaxial central body. Classical and Celestial Mechanics: Selected Papers. Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlce (Poland), 2012, P. 206-217. (coauthor S.G. Zhuravlev)
3. О возможности обобщения плоской трапецеидальной центральной конфигурации на случай несферического центрального тела. Междунар. журнал по теор. и прикл. мат., класс. и неб. мех. и космодин. 2012. Вып. 1. С. 62-74. (соавтор Журавлев С.Г.)
4. О влиянии несферичности центрального тела на геометрические и динамические характеристики плоских центральных конфигураций. Междунар. жур. по теор. и прикл. мат., класс. и неб. мех. и космодин. 2012. Вып.1. С. 75-81.
5. On instability of planar trapezoidal central configurations in the classical and generalized cases. Book of abstracts of 8th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Siedlce (Poland), 2013, P. 60. (coauthor S.G.

Zhuravlev)

6. Об устойчивости в строгом нелинейном смысле тривиального положения относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова. Прикл. мат. и мех. 2013. Вып. 2. Т. 77. С. 239-250. (соавтор Журавлев С.Г.)
7. On stability in the strict nonlinear sense of a trivial relative equilibrium state in the classical and generalized variants of Sitnikov's problem. JPMM, 2013. V. 77. No 2. P. 173-180. (coauthor S.G. Zhuravlev)
8. О существовании и неустойчивости обобщенных плоских центральных конфигураций дельтовидного типа с несферическими центральными телами. Междунар. жур. по теор. и прикл. мат., класс. и неб. мех. и космодин. 2013. Вып. 1(2). С. 44-56. (соавтор Агафонов С.А.)
9. Унифицированный подход к исследованию линейной устойчивости классических и обобщенных плоских центральных конфигураций небесной механики. Часть 2. Вычислительные алгоритмы. Междунар. жур. по теор. и прикл. мат., класс. и неб. мех. и космодин. 2013. Вып. 2(3). С. 5-37.
10. Generalization of planar central configurations on the case of non-spherical central body. Int. Congress of Mathematicians. Aug. 13-21, 2014, Seoul, Korea. Seoul: ICM 2014 Abstracts. p. 310. (coauthor S.G. Zhuravlev)
11. О существовании и устойчивости обобщенных центральных конфигураций трапецеидального типа с несферическими телами в центре. Прикл. мат. и мех. 2016. Вып. 1. Т. 80. С. 51-59. (соавтор Журавлев С.Г.)

Личный вклад автора. В работах [1-3, 5, 10, 11] личный вклад автора заключается в получении необходимых и достаточных условий существования обобщенных центральных конфигураций, вычислении совокупностей их геометрических и динамических параметров, анализе устойчивости по Ляпунову и обсуждении полученных результатов и выводов. В работах [6, 7] автору принадлежит алгоритмическая, вычислительная и графическая части работы. В статье [8] автор выполнил вычислительную часть работы и принимал участие в анализе результатов и формулировке выводов.

АННОТАЦИЯ

Перепелкина Ю.В.

Проблемы существования и устойчивости положений относительного равновесия и центральных конфигураций в некоторых обобщенных вариантах задачи *N* тел

Аналитическими и численными методами доказано существование нового класса частных решений в общей задаче N тел ($N \geq 4$) – так называемых плоских обобщенных центральных конфигураций квадратной, ромбовидной, дельтовидной и трапециевидной форм с несферическими телами в центре. Исследована устойчивость по Ляпунову всех новых обобщенных центральных конфигураций и доказана их неустойчивость. Рассмотрена задача Ситникова в ее классической и обобщенной постановках. Уточнены условия существования резонансов и вырождения при исследовании устойчивости тривиальных положений относительного равновесия задачи в строгом нелинейном смысле и доказаны соответствующие теоремы об устойчивости. В результате проблема устойчивости тривиальных положений равновесия в задаче Ситникова при малых эксцентриситетах орбит тел конечных размеров оказывается завершенной.

ABSTRACT

Perepelkina Yu.V.

Existence and stability problems for equilibrium states and central configurations in some generalized versions of the *N*-body problem

Existence of a new class of partial solutions in the general problem of N bodies ($N \geq 4$) – the so called planar generalized central configurations of quadratic, rhomboid, deltoid and trapezoid forms with non-sphere bodies in the centre is proved by analytical and numerical methods. The Lyapunov stability of all mentioned new central configurations is investigated and their instability is proved. The classical and generalized formulations of Sitnikov's problem are analyzed. The resonant conditions and degenerations arising in investigations of the trivial equilibrium states stability in the strict sense are made more precise and proper theorems on the stability are proved. As a result the stability problem for the trivial equilibrium states in Sitnikov's problem for small eccentricities of orbits of bodies of the finite mass is completely concluded.