На правах рукописи

Антонова Анастасия Петровна

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА-КУЗНЕЦОВА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и оптимизации Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Научный руководитель: Фаминский Андрей Вадимович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» .

Официальные оппоненты: Камынин Виталий Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».

Радкевич Евгений Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Защита состоится “21” июня 2016 года в 15ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН"и в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан “____” ________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации рассматривается уравнение Захарова–Кузнецова в случае двух пространственных переменных

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t, x, y) \tag{1}$$

($u = u(t, x, y)$). Это уравнение является одним из вариантов многомерного обобщения уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = f(t, x),$$

описывающего распространение одномерных нелинейных волн в средах с дисперсией.

Впервые уравнение (1) было выведено в работе Захарова В.Е. и Кузнецова Е.А. [1] для описания распространения нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова–Кузнецова. Это уравнение является модельным для описания волн, двигающихся в заданном направлении и испытывающих поперечные деформации.

Интенсивное изучение краевых задач для уравнения Кортевега–де Фриза началось с 60-х годов XX века. За прошедшее время в трудах таких математиков, как R. Temam, J.-C. Saut, T. Kato, J. Bona, С.Н. Кружков, А.В. Фаминский, J. Ginibre, Y. Tsutsumi, C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, J. Bourgain, T. Tao, J. Colliander и многих других была развита теория разрешимости и корректности задачи Коши и начально-краевых задач для этого уравнения в различных функциональных пространствах.

Теория краевых задач для уравнения Захарова–Кузнецова разработана значительно меньше. Основные результаты были получены начиная с 90-х годов XX века в трудах таких математиков, как J.C. Saut [2], А.В. Фаминский, F. Linares, A. Pastor [3], R. Temam [4], Н.А. Ларькин,

---

[1] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.*, О трехмерных солитонах // Журн. экспер. теорет. физ., 1974. — *66*, № 2. — С. 594–597.

[2] *Saut J.-C.* Sur quelques généralizations de l'equation de Korteweg–de Vries// J. Math. Pures Appl., 1979. — V. 221, № 1. — P.21–61.

[3] *Linares F., Pastor A.* Well-posedness for the 2D modified Zakharov–Kuznetsov equation // SIAM J. Math. Anal., 2009. — V. 41. № 4. — P. 1323-1339.

[4] *Saut J.-C., Temam R.* An initial boundary-value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation// Adv. Differential Equ., 2010. — *15*, № 11–12. — C. 1001–1031.

Г.Г. Доронин [5] и других, но эта теория далека от завершения. Основные трудности по сравнению с уравнением Кортевега–де Фриза, разумеется, лежат в переходе с прямой на плоскость.

При изучении свойств решений уравнения Кортевега–де Фриза в работах С.Н. Кружкова [6], А.В. Фаминского [7] и T. Kato [8] было обнаружено свойство повышения их внутренней регулярности в зависимости от скорости убывания на бесконечности начальной функции, которая сама может оставаться нерегулярной. В частности, в работах С.Н. Кружкова и А.В. Фаминского для задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза было доказано, что если $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ и $x^\alpha u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$ (функция f также удовлетворяет некоторым условиям), то решение $u(t,x)$ обладает обобщенными производными $\partial_x^n u$ до порядка $n \leqslant 2\alpha + 1$ при $t > 0$. Для $n < 2\alpha - 1/2$ эти производные являются непрерывными, причём для старших производных можно получить оценки в нормах Гёльдера. Если дополнительно тем же свойством, что и сама начальная функция обладает ее производная u_0', то порядок всех упомянутых производных может быть увеличен на единицу. Аналогичные результаты в случае начально-краевой задачи на полуоси $\mathbb{R}_+$ были установлены в работе А.В. Фаминского [9].

Отметим, что в упомянутых выше работах С.Н. Кружкова и А.В. Фаминского для доказательства непрерывности производных рассматриваемых решений уравнения Кортевега–де Фриза и их оценках в нормах Гёльдера применяется идея обращения линейной части уравнения и использования свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx}$. Это фундаментальное решение выражается через хорошо изученную функцию Эйри.

В отличие от оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx}$ свойства фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$ (соответствующего линеаризованному уравнению Захарова–Кузнецова) исследованы гораздо меньше, в частности, его поведение при $|x| \to +\infty$ ранее изучено не было.

[5] *Doronin G.G., Larkin N.A.* Stabilization of regular solutions for the Zakharov–Kuznetsov equation posed on bounded rectangles and on a strip// Proc. Edinburgh Math. Soc., 2015. — DOI: 10.1017/S0013091514000248. — P. 1–22.

[6] *Кружков С.Н., Фаминский А.В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сб., 1983. — Т. 120(162). № 3. — С. 396-425.

[7] *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Труды сем. им. И.Г. Петровского., 1988. — Вып. 13. — С. 56-105.

[8] *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation// Stud. Appl. Math., Adv. Math. Suppl. Stud., 1983. — V. 8. — P. 93–128.

[9] *Фаминский А.В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений// Труды ММО., 1988. — *51*. — С. 54–94.

Первый результат о внутренней регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова был установлен в работе J.L. Levandosky[10]. В ней результат о повышении гладости был получен для решений, обладающих априори обобщенными производными по пространственным переменным до шестого порядка включительно, принадлежащими пространству L_2 с некоторым степенным весом при $x \to +\infty$. Существование подобных решений было доказано только локально по времени при начальной функции из пространства H^6 с соответствующим весом. Вопросы существования непрерывных производных и их оценках в нормах Гёльдера не рассматривались.

Цели исследования

Основной целью работы является изучение свойств внутренней регулярности слабых решений задачи Коши в слое $\Pi_T = \{(t,x,y) : 0 < t < T, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y) \tag{2}$$

при $x \in \mathbb{R}^2$ и начально-краевой задачи в области $\Pi_T^+ = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ с начальным условием (2) при $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ и краевым условием

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \qquad 0 \leq t \leq T, \quad y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(везде предполагается, что T — произвольное положительное число) для уравнения Захарова–Кузнецова (1)в зависимости от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения.

В работе также исследуются свойства фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$ и глобальная корректность рассматриваемой начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова в пространстве гладких экспоненциально быстро убывающих на бесконечности функций.

Методика исследования

Исследование носит теоретический характер. Оно основано на сочетании нелинейных интегральных оценок решений рассматриваемых задач, обращения линейной части уравнения и

[10] *Levandosky J.L.* Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions// J. Differential Equ., 2001. — *175*, № 2. — С. 275–301.

использовании свойств линеаризованного уравнения Захарова–Кузнецова. В последнем случае при изучении фундаментального решения дифференциального операторв $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$ применяются методы гармонического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Теоремы о существовании обобщенных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова, порядок которых зависит от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения. В случае начально-краевой задачи производные первого порядка построены вплоть до пространственной границы, все остальные производные — строго внутри рассматриваемых областей.

2) Теоремы о существовании строго внутри рассматриваемых областей непрерывных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи уравнения Захарова–Кузнецова. Порядок производных и их оценки в нормах Гёльдера зависят от скорости убывания на бесконечности нерегулярной начальной функции и правой части уравнения.

3) Оценки фундаментального решения дифференциального оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$.

4) Глобальная корректность начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова в пространстве гладких экспоненциально быстро убывающих на бесконечности функций.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

1) Результаты о существовании обобщенных производных слабых решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова не имеют аналогов. Аналогичные результаты для задачи Коши в значительной степени усиливают и уточняют известные ранее результаты.

2) Результаты о существовании непрерывных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова и оценки этих производных в нормах Гёльдера получены впервые.

3) Подробное изучение свойств фундаментального решения дифференциального оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$ проведено впервые. Полученные оценки являются аналогами классических оценок функции Эйри.

4) Теорема о глобальной корректности начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова в пространстве гладких экспоненциально быстро убывающих на бесконечности

функций ранее не была известна. В случае задачи Коши аналогичный результат уже был установлен.

Теоретическая значимость

Развитые в диссертации методы изучения свойства повышения внутренней гладкости слабых решений могут быть использованы при изучении других классов квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. Самостоятельный интерес имеют результаты о свойствах фундаментального решения дифференциального оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$, которые могут быть применены при изучении широкого круга вопросов, связанных с уравнением Захарова–Кузнецова и его обобщениями.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следуюших семинарах и конференциях:

• семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора А.В. Арутюнова;

• семинар кафедры прикладной математики РУДН под руководством профессора А.Л. Скубаческого;

• скминар кафедры дифференциальных уравнений МГУ под руководством профессоров В.В. Жикова, Е.В. Радкевича, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой;

• Всероссийская научно-практическая конференция "Дифференциальных уравнения, Теория фунций, Нелинейный анализ и оптимизация", РУДН, Москва, 2013;

• The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, РУДН, Москва, 2014;

• Международная конференция "Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications", МФТИ, Долгопрудный, 2015.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, из них 4 статьи в научных изданиях, входящих в список ВАК, и 2 тезисов докладов на научных конференциях.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 38 наименований. Объем диссертации составляет 105 страниц.

Содержание работы

Во введении дается исторический обзор работ по теме диссертации и формулируются основные результаты. Там же вводятся основные обозначения.

Положим $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x > 0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{(x,y) : x < 0\}$, $B_T = (0,T)\times\mathbb{R}$, $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2)$, $L_{2,+} = L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $W_2^k = W_2^k(\mathbb{R}^2)$, $W_{2,+}^k = W_2^k(\mathbb{R}^2_+)$, $H^k = H^k(\mathbb{R}^2)$, $H^k_+ = H^k(\mathbb{R}^2_+)$. Пусть

$$|D^k\phi| = \Big(\sum_{|\nu|=k}(\partial^\nu\phi)^2\Big)^{1/2}, \qquad |D\phi| = |D^1\phi|.$$

Для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ положим

$$L_2^\alpha = \{\phi(x,y)\in L_2^{loc}(\mathbb{R}^2) : \phi\in L_2(\mathbb{R}^2_-), \quad (1+x)^\alpha\phi\in L_{2,+}\},$$

$$L_{2,+}^\alpha = \{\phi(x,y)\in L_2^{loc}(\mathbb{R}^2_+) : (1+x)^\alpha\phi\in L_{2,+}\},$$

$$H^{1,\alpha} = W_2^{1,\alpha} = \{\phi(x,y)\in L_2^\alpha\cap W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^2) : \phi_x,\phi_y\in L_2^\alpha\},$$

$$H_+^{1,\alpha} = W_{2,+}^{1,\alpha} = \{\phi(x,y)\in L_{2,+}^\alpha\cap W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^2_+) : \phi_x,\phi_y\in L_{2,+}^\alpha\}.$$

и введем на этих пространствах естественные нормы. Для описания свойств краевых условий будем использовать анизотропные пространства Соболева дробного порядка: для $s_1,s_2\ge 0$ положим

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{\mu(t,y) : (1+|\xi_1|^{s_1}+|\xi_2|^{s_2})\widehat{\mu}(\xi_1,\xi_2)\in L_2(\mathbb{R}^2)\},$$

где символом $\widehat{\mu}$ обозначено преобразование Фурье функции μ. Для области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ через $H^{s_1,s_2}(\Omega)$ обозначим пространство сужений на Ω функций из $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ с естественной нормой.

Для $\delta\in[0,T)$, $x_0\in\mathbb{R}$ положим $\Pi_T^{\delta,x_0} = (\delta,T)\times(x_0,+\infty)\times\mathbb{R}$ (в частности, $\Pi_T^+ = \Pi_T^{0,0}$),

$$L_{2,x_0}^\alpha = \{\phi(x,y) : (1+x-x_0)^\alpha\phi\in L_2\big((x_0,+\infty)\times\mathbb{R}\big)\}$$

(в частности, $L^\alpha_{2,+} = L^\alpha_{2,0}$),

$$\lambda(f;T) = \sup_{x_1\in\mathbb{R}} \int_0^T \int_{x_1}^{x_1+1} \int_{\mathbb{R}} f^2\,dydxdt$$
$$\lambda(f;T,\delta,x_0) = \sup_{x_1\geqslant x_0} \int_\delta^T \int_{x_1}^{x_1+1} \int_{\mathbb{R}} f^2\,dydxdt.$$

Введем пространство функций $X^\alpha(\Pi_T)$ при $\alpha \geqslant 0$, состоящее из функций $f(t,x,y)$ таких, что

$$f \in C_w([0,T];L^\alpha_2), \qquad \lambda(|Df|;T) < \infty,$$

а если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$|Df| \in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$$

(символ C_w обозначает пространство слабо непрерывных отображений).

Через $X^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$ обозначим пространство функций $f(t,x,y)$ таких, что

$$f \in C_w([\delta,T];L^\alpha_{2,x_0}), \qquad \lambda(|Df|;T,\delta,x_0) \ < \infty,$$

а если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$|Df| \in L_2(\delta,T;L^{\alpha-1/2}_{2,x_0})$$

(в частности, $X^\alpha(\Pi_T^+) = X^\alpha(\Pi_T^{0,0})$).

Введем также пространства функций

$$K_1(\Pi_T) = \{u \in C([0,T];H^1) \cap L_3(0,T;C^1_b) \cap L_2(\mathbb{R}^x;C_b(\overline{B}_T)),$$
$$\partial^j_x u \in C_b(\mathbb{R}^x;H^{(2-j)/3,2-j}(B_T)), \quad 0 \le j \le 2\}.$$

и

$$K_1(\Pi_T^+) = \{u \in C([0,T]; H_+^1) \cap L_2(0,T; C_{b,+}^1) \cap L_2(\mathbb{R}_+; C_b(\overline{B}_T)),$$
$$\partial_x^j u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^x; H^{(2-j)/3,2-j}(B_T)), \quad 0 \le j \le 2\}.$$

Символом $C_b^k(\overline{\Omega})$ будем обозначать пространство функций, обладающих всеми частными производными до порядка k включительно, непрерывными и ограниченными в $\overline{\Omega}$. Положим $C_b^k = C_b^k(\mathbb{R}^2)$, $C_{b,+}^k = C_b^k(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$, $C_b(\overline{\Omega}) = C_b^0(\overline{\Omega})$.

В первой главе диссертации изучено поведение фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial_{xxx}^3 + \partial_{xyy}^3$ на бесконечности, приведена вспомогательная лемма об обращении линейной части уравнения Захарова–Кузнецова, а также установлена разрешимость начально-краевой задачи для линеаризированного уравнения Захарова–Кузнецова в классе бесконечно гладких экспоненциально быстро убывающих функций.

Фундаментальное решение оператора $\partial_t + \partial_{xxx}^3 + \partial_{xyy}^3$ задается формулой

$$G(t,x,y) = \theta(t)\mathcal{F}^{-1}\big[e^{it(\xi_1^3+\xi_1\xi_2^2)}\big] \equiv \frac{\theta(t)}{t^{2/3}} S\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right),$$

где $S(x,y) \equiv \mathcal{F}^{-1}\big[e^{i(\xi_1^3+\xi_1\xi_2^2)}\big]$, θ – функция Хевисайда. Начало исследованию функции S было положено в статье [11], где было доказано, что эта функция существует, непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^2$. В настоящей работе установлены следующие свойства функции S.

Лемма 1. *Функция $S(x,y)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^2$, в каждой точке удовлетворяет уравнениям*

$$3S_{xx} + S_{yy} - xS = 0, \qquad S_{xy} - yS = 0$$

и представляется в виде

$$S(x,y) = \mathcal{F}_y^{-1}\big[A(x+\xi_2^2)\big](y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_2 y} A(x+\xi_2^2)\, d\xi_2,$$

где $A(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\big[e^{i\xi^3}\big](x)$ — функция Эйри. При этом, для любых $x \in \mathbb{R}$ и целом $k \geqslant 0$ функ-

[11] *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова // Дифф. уравн., 1995. — *31*, № 6. — С. 1070–1081.

ция $\partial_x^k S(x,y)$ по переменной y принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Более того, существует константа $c_0>0$ такая, что для любых $x_0\in\mathbb{R}$, целого $m\geqslant 0$ и мультииндекса ν

$$(1+|y|)^m|\partial^\nu S(x,y)|\leqslant c(m,|\nu|,x_0)e^{-c_0(x-x_0)^{3/2}}\quad \forall x\geqslant x_0,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Следующая лемма уточняет поведение функции S при $x\to-\infty$.

Лемма 2. *Для любого $r\in[0,2/3]$ и целого $n\in[0,2]$*

$$|\partial_x^n S(x,y)|,|\partial_y^n S(x,y)|\leqslant c(r)(1+|y|)^{-r}(1+|x|)^{r+n/2-1/4}\quad \forall x\leqslant 0,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Вторая глава диссертации посвящена теоремам о существовании обобщенных производных слабых решений задачи Коши и начально-краевой задачи для уравнения Захарова-Кузнецова.

Ранее в работе [12] было доказано существование слабого решения задачи (1), (2) из пространства $X^\alpha(\Pi_T)$ при $\alpha\geqslant 0$, $u_0\in L_2^\alpha$, $f\in L_1(0,T;L_2^\alpha)$ (единственность таких решений пока остается открытой проблемой). В настоящей работе установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $u_0\in L_2^\alpha$, $f\in L_1(0,T;L_2^\alpha)$ для некоторого $\alpha\geqslant 1/2$ и дополнительно существует натуральное число $m\in[1,2\alpha]$ такое, что $\partial^\nu f\in L_1(\delta_0,T;L_2^{\alpha-|\nu|/2})$ при $1\leqslant|\nu|\leqslant m$ для некоторого $\delta_0\in[0,T)$, причем если $m=2$, то $\alpha>1$. Тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи (1), (2) из пространства $X^\alpha(\Pi_T)$, которое при $t>\delta_0$ обладает обобщенными производными $\partial^\nu u$ до порядка $|\nu|\leqslant m+1$. При этом для любых $\delta\in(\delta_0,T)$ и $x_0\in\mathbb{R}$*

$$\partial^\nu u\in X^{\alpha-|\nu|/2}\big(\Pi_T^{\delta,x_0}\big),\quad 1\leqslant|\nu|\leqslant m. \tag{4}$$

Глобальная корректности задачи (1), (2) в классе $K_1(\Pi_T)$ была доказана в работе [11] при $u_0\in H^1$, $f\in L_1(0,T;H^1)$. В настоящей работе получены следующие свойства решений из данного класса.

[12] *Фаминский А.В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка //Матем. сб. 1989. — Т. 180. № 9. — С. 1183-1210.

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \in H^{1,\alpha}$, $f \in L_1(0,T;H^{1,\alpha})$ *для некоторого* $\alpha > 0$. *Тогда если* $u(t,x,y) \in K_1(\Pi_T)$ *— слабое решение задачи* (1), (2), *то при* $|\nu| \le 1$

$$\partial^\nu u \in X^\alpha\bigl(\Pi_T\bigr). \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть условия Теоремы 2 выполнены для* $\alpha \geqslant 1/2$ *и дополнительно существует натуральное число* $m \in [2, 2\alpha+1]$ *такое, что* $\partial^\nu f \in L_1(\delta_0, T; L_2^{\alpha-|\nu|/2+1/2})$ *при* $2 \leqslant |\nu| \leqslant m$ *для некоторого* $\delta_0 \in [0,T)$. *Тогда слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1), (2) *из пространства* $K_1(\Pi_T)$ *обладает при* $t > \delta_0$ *обобщенными производными* $\partial^\nu u$ *порядка* $|\nu| \leqslant m+1$. *При этом для любых* $\delta \in (\delta_0, T)$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\partial^\nu u \in X^{\alpha-|\nu|/2+1/2}\bigl(\Pi_T^{\delta,x_0}\bigr), \quad 2 \leqslant |\nu| \leqslant m. \tag{6}$$

Нижеследующий пример показывает, что без соответствующего убывания начальной функции при $x \to +\infty$ даже в случае бесконечно гладкой начальной функции решение задачи Коши может стать разрывным за конечное время. Рассмотрим уравнение (1) при $f \equiv 0$, пусть начальная функция $u_0 \in H^1$ имеет компактный носитель и разрывна. Тогда в силу Теоремы 3 существует единственное слабое решение этой задачи $u \in K_1(\Pi_T)$ бесконечно диффференцируемое при $t > 0$. Положим $v(t,x,y) = u(T-t,-x,y) \in K_1(\Pi_T)$. Тогда функция v является слабым решением задачи Коши для того же уравнения (1) ($f \equiv 0$) с начальной функцией $u(T,-x,y) \in H^1 \cap C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Однако при $t = T$ решение становится разрывным. Аналогичный пример можно построить для начальной функции $u_0 \in L_2$ с компактным носителем на основе Теоремы 1.

Слабые решения начально-краевой задачи (1)–(3) изучались в работе [13], в которой было показано, что при $u_0 \in L_{2,+}^\alpha$, $u_1 \in H^{s/3,s}(B_T)$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)$ для некоторых $\alpha \geqslant 0$ и $s > 3/2$ существует слабое решение задачи (1)–(3) из пространства $X^\alpha(\Pi_T^+)$. При этом, если $\alpha \geqslant 1$, то это решение единственно в рассматриваемом классе. В настоящей работе получен следующие свойства этих решений, первое из который относится к дополнительной гладкости решений вплоть до границы $x = 0$, а второе — к строго внутренней гладкости.

[13] *Faminskii A. V.* Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear equations of an odd order// Adv. Differential Equ., 2012. — *17*, № 5–6. — С. 421–470.

Теорема 4. *Пусть* $u_0 \in L^{\alpha}_{2,+}$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_2(0,T;L^{\alpha}_{2,+})$, $\partial^{\nu} f \in L_2(\delta_0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$ *при* $|\nu| = 1$ *для некоторых* $\alpha \geqslant 1/2$ *и* $\delta_0 \in [0,T)$. *Тогда существует слабое решение задачи* (1)–(3) $u \in X^{\alpha}(\Pi^+_T)$, *обладающее при* $t > \delta_0$ *обобщенными производными* $\partial^{\nu} u$ *до порядка* $|\nu| \leq 2$, *причем* $\partial^{\nu} u \in X^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,0}_T)$ *при* $|\nu| = 1$ *для любого* $\delta \in (\delta_0, T)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Теоремы 4 при* $\alpha \geqslant 1$ *и пусть дополнительно существует натуральное число* $m \in [2, 2\alpha]$ *такое, что* $\partial^{\nu} f \in L_1(\delta_0,T;L^{\alpha-|\nu|/2}_{2,a})$ *для* $2 \leq |\nu| \leq m$ *и некоторого* $a \geqslant 0$. *Тогда если* $u \in X^{\alpha}(\Pi^+_T)$ *— слабое решение задачи* (1)–(3), *то оно обладает при* $t > \delta_0$, $x > a$ *обобщенными производными* $\partial^{\nu} u$ *до порядка* $|\nu| \leq m+1$, *причем* $\partial^{\nu} u \in X^{\alpha-m/2}(\Pi^{\delta,x_0}_T)$ *при* $2 \leq |\nu| \leq m$ *для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > a$.

Теоремы 4 и 5 являются аналогами Теоремы 1 для рассматриваемой начально-краевой задачи. Разделение на две теоремы вызвано во-первых тем, что в Теореме 4 внутренняя регулярность решения установлена вплоть до границы $x = 0$, в то время как в Теореме 5 она установлена строго внутри области Π^+_T, а во-вторых тем, что в условиях Теоремы 5 можно воспользоваться результатом из статьи [13] о единственности слабого решения в пространстве $X^{\alpha}(\Pi^+_T)$ при $\alpha \geq 1$. Отметим, что по сравнению с Теоремой 1 в Теореме 5 удалось снять дополнительное условие $\alpha > 1$ при $m = 2$.

В работе [14] было установлено, что при $u_0 \in H^1_+$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_2(0,T;H^1_+)$, $u_1(0,y) \equiv u_0(0,y)$, существует единственное слабое решение задачи (1)–(3) из пространства $K_1(\Pi^+_T)$. В настоящей работе доказаны следующие свойства гладкости этих решений.

Теорема 6. *Пусть* $u_0 \in H^{1,\alpha}_+$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_2(0,T;H^{1,\alpha}_+)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $u_1(0,y) \equiv u_0(0,y)$. *Тогда если* $u \in K_1(\Pi^+_T)$ *— слабое решение задачи* (1)–(3), *то* $\partial^{\nu} u \in X^{\alpha}(\Pi^+_T)$ *при* $|\nu| \leq 1$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия Теоремы 6 при* $\alpha \geqslant 1/2$ *и пусть дополнительно существует натуральное число* $m \in [2, 2\alpha+1]$ *такое, что* $\partial^{\nu} f \in L_1(\delta_0,T;L^{\alpha-|\nu|/2+1/2}_{2,a})$ *при* $2 \leq |\nu| \leq m$ *для некоторых* $\delta_0 \in [0,T)$ *и* $a \geqslant 0$. *Тогда если* $u \in K_1(\Pi^+_T)$ *— слабое решение задачи* (1)–(3), *то оно обладает при* $t > \delta_0$, $x > a$ *обобщенными производными* $\partial^{\nu} u$ *до порядка* $|\nu| \leq m+1$, *причем* $\partial^{\nu} u \in X^{\alpha-|\nu|/2+1/2}(\Pi^{\delta,x_0}_T)$ *при* $2 \leq |\nu| \leq m$ *для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > a$.

[14] *Faminskii A. V.* Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov–Kuznetsov equation// J. Math. Sci., 2007. — *147*,№ 1. — С. 6524–6537.

Теоремы 6 и 7 являются аналогами Теорем 2 и 3 для рассматриваемой начально-краевой задачи.

В приведенных Теоремах 1–7 слабые ешения строятся как пределы последовательностей гладких быстро убывающих при $x \to \infty$ решений на основе соответствующих априорных оценок. В случае задачи Коши существование таких решений следует из результатов упомянутых выше работ А.В. Фаминского [12] и J.L. Levandosky [10] . В случае начально-краевой задачи подобный результат установлен в настоящей работе (гладкие решения, построенные в работе [15] не обладают свойствами быстрого убывания при $x \to +\infty$).

Введем дополнительные специальные функциональные пространства. Для любого натурального n пусть символ $K_n(\Pi_T^+)$ обозначает пространство функций $u(t,x,y)$ таких, что

$$\begin{aligned}
\partial_t^m u \in C\bigl([0,T]; H_+^{n-3m}\bigr), &\qquad m \leqslant [n/3],\\
\partial_x^l u \in C_b\bigl(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(n-l+1)/3, n-l+1}(B_T)\bigr), &\qquad l \leqslant n+1,\\
\partial_t^m \partial_x^l \partial_y^j u \in L_2\bigl(0,T; C_{b,+})\bigr), &\qquad 3m+l+j \leqslant n,\\
\partial_t^m \partial_x^l \partial_y^j u \in L_2\bigl(\mathbb{R}_+; C_b(\overline{B}_T)\bigr), &\qquad 3m+l+j \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

Определим также специальные пространства экспоненциально убывающих функций. Для любого $\beta > 0$ положим

$$Y_\beta(\Pi_T^+) = \{u(t,x,y) : ue^{\beta x} \in C([0,T]; L_{2,+}), |Du|e^{\beta x} \in L_2(\Pi_T^+)\}$$

и пусть для целых неотрицательных n

$$Y_{\beta,n}(\Pi_T^+) = \{u(t,x,y) : \partial_t^m \partial^\nu u \in Y_\beta(\Pi_T^+), \quad 3m + |\nu| \leq n\}.$$

Чтобы сформулировать условия согласования граничных данных на прямой $(t,x) = (0,0)$ введем соответствующие вспомогательные функции: пусть $\Phi_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а для $m \geqslant 1$

[15] *Faminskii A.V.* Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation// Electronic J. Differential Equ., 2008. — № 1. — С. 1–20.

положим

$$\Phi_m(x,y) \equiv \partial_t^{m-1} f(0,x,y) - (\partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)\Phi_{m-1}(x,y) - \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \Phi_l(x,y)\partial_x\Phi_{m-l-1}(x,y)\big)_x.$$

Приведем результат о разрешимости задачи (1)–(3) в пространствах гладких функций быстро убывающих функций.

Теорема 8. *Пусть* $u_0 e^{\beta x} \in H_+^n$ *для некоторого* $\beta > 0$, $n = 3k$ *и натурального* k, $u_1 \in H^{k,n}(B_T)$, $f \in Z_{\beta,n}(\Pi_T^+)$, *причем* $\Phi_m(0,y) \equiv \partial_t^m u_1(0,y)$ *для любого* $m < k$. *Тогда существует единственное решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* $K_n(\Pi_T^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)$.

Заметим, что в работе аналогичный результат установлен для более общего уравнения вида

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x + (g(t,x,y)u)_x = f(t,x,y).$$

Условия, накладываемые в Теоремах 4 и 6 на функцию u_1 можно считать естественными, так как они индуцированы свойствами дифференциального оператора $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$ в следующем смысле. Пусть $v(t,x,y)$ является решением задачи Коши из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^1(\mathbb{R}^2))$ для уравнения

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0$$

с начальной функцией $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда согласно результатам работы [11] для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\|v(\cdot,x,\cdot)\|_{\dot H^{2/3,2}(\mathbb{R}^2)} = \|(|\xi_1|^{2/3} + |\xi_2|^2)\widehat{v}(\xi_1,x,\xi_2)\|_{L_2^{\xi_1,\xi_2}(\mathbb{R}^2)} \sim \|\nabla v_0\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

В третьей главе диссертации установлены результаты о непрерывности производных рассматриваемых решений уравнения Захарова-Кузнецова.

Теорема 9. *Пусть* $u_0 \in L_2^\alpha$, $f \in L_\infty(0,T; L_2^\alpha)$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что число* $(2\alpha - 1/2)$ *— нецелое,* $\partial^\nu f \in L_\infty(\delta_0, T; L_2^{\alpha-|\nu|/2})$ *для* $1 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha$ *и некоторого* $\delta_0 \in [0,T)$, $m = [2\alpha - 1/2]$, $\nu_0 = [2\alpha]$ *при* $\alpha \neq 1$, $\nu_0 = 1$ *при* $\alpha = 1$. *Тогда существует слабое решение задачи (1), (2)* $u(t,x,y) \in X^\alpha(\Pi_T)$, *обладающее свойством (4) при* $1 \leqslant |\nu| \leqslant \nu_0$, *которое при* $t > \delta_0$ *непрерывно и обладает непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m - 1$, *причем для любых $\delta \in (\delta_0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{(t,x,y)\in\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0}} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1. \tag{7}$$

Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, то для любых $\delta \in (\delta_0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ при $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ и $t \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \quad \forall \sigma \in (0,\varepsilon); \tag{8}$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, то для любых $\delta \in (\delta_0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ при $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ и $t, \tau \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{\frac{\varepsilon-\sigma}{3}} \quad \forall \sigma \in (0,\varepsilon), \tag{9}$$

где константы зависят от x_0, δ_0, σ, α.

Теорема 10. *Пусть $u_0 \in H^{1,\alpha}$, $f \in L_\infty(0,T;H^{1,\alpha})$ для некоторого $\alpha > 3/4$ такого, что число $(2\alpha+1/2)$ — нецелое, $\partial^\nu f \in L_\infty(\delta_0,T;L_2^{\alpha-|\nu|/2+1/2})$ для $2 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha+1$ и некоторого $\delta_0 \in [0,T)$, $m = [2\alpha+1/2]$. Тогда слабое решение задачи (1), (2) $u(t,x,y) \in K_1(\Pi_T)$ при $t > \delta_0$ непрерывно и обладает непрерывными производными $\partial^\nu u$ порядка $|\nu| \leqslant m-1$, причем для любых $\delta \in (\delta_0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ справедлива оценка* (7). *Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2$, то для любых $\delta \in (\delta_0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ при $x_1,x_2 \geqslant x_0$, $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ и $t \in [\delta,T]$ справедливо неравенство* (8), *а если $|\nu| = m-1-j$, $j=0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2 + j$, то для любых $\delta \in (\delta_0,T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ при $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ и $t,\tau \in [\delta,T]$ справедливо неравенство* (9), *где константы зависят от x_0, δ_0, σ, α.*

Идея доказательства основана на обращении линейной части уравнения и использовании ранее установленных свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial^3_{xxx} + \partial^3_{xyy}$, что позволяет получить свойства (7) и (8). Оценка (9) следует из этих свойств на основе общих результатов статьи [16] об оценке модуля непрерывности решения по времени через известный

[16] *Кружков С.Н., Фаминский А.В* О свойствах непрерывности решений некоторых классов неста-

модуль непрерывности по пространственным переменным для эволюционных уравнений дивергентного вида 1-го порядка по времени.

В данной главе также устанавливаются результаты о существовании непрерывных производных решений рассматриваемойначально-краевой задачи строго внутри области Π_T^+. Эти результаты полностью аналогичны случаю задачи Коши.

Теорема 11. *Пусть* $u_0 \in L_{2,+}^\alpha$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_\infty(0,T;L_{2,+}^\alpha)$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что число* $(2\alpha - 1/2)$ *— нецелое,* $\partial^\nu f \in L_\infty(\delta_0,T;L_{2,+}^{\alpha-|\nu|/2})$ *при* $1 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha$ *для некоторого* $\delta_0 \in [0,T)$, $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* $X^\alpha(\Pi_T^+)$, *такое что* $u_x, u_y \in X^{\alpha-1/2}\big(\Pi_T^{\delta,0}\big)$ *для любого* $\delta \in (\delta_0,T)$. *При* $t > \delta_0$ *и* $x > 0$ *это решение непрерывно и обладает непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$, *причем для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > 0$ *для* $0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1$ *справедливо неравенство* (7). *Более того, если* $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$, $x_0 > 0$ *при* $x_1,x_2 \geqslant x_0$, $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta,T]$ *справедливо неравенство* (8), *а если* $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t,\tau \in [\delta,T]$ *справедливо неравенство* (9).

Теорема 12. *Пусть* $u_0 \in H_+^{1,\alpha}$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $u_0(0,y) \equiv u_1(0,y)$, $f \in L_\infty(0,T;H_+^{1,\alpha})$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что число* $(2\alpha+1/2)$ *— нецелое,* $\partial^\nu f \in L_\infty(\delta_0,T;L_{2,+}^{\alpha-|\nu|/2+1/2})$ *для* $2 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha+1$ *и некоторого* $\delta_0 \in [0,T)$, $m = [2\alpha+1/2]$. *Тогда слабое решение задачи* (1)–(3) $u(t,x,y) \in K_1(\Pi_T^+)$ *при* $t > \delta_0$ *и* $x > 0$ *непрерывно и обладает непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$, *причем для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > 0$ *для* $0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1$ *справедливо неравенство* (7). *Более того, если* $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2$, *то для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > 0$ *при* $x_1,x_2 \geqslant x_0$, $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta,T]$ *справедливо неравенство* (8), *а если* $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2 + j$, *то для любых* $\delta \in (\delta_0,T)$ *и* $x_0 > 0$ *при* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t,\tau \in [\delta,T]$ *справедливо неравенство* (9).

Если $\alpha \geqslant 1$, то в силу единственности решений в классе $X^\alpha(\Pi_T^+)$ построенное в Теореме 11 решение рассматриваемой задачи обладает также свойствами решения из Теоремы 5 для $a = 0$. Аналогично решение из Теоремы 12 обладает свойствами решений из Теорем 6 и 7 для $a = 0$.

ционарных уравнений// Вестник Моск. ун-та, сер. 1, Математика, Механика., 1983. — *3.* — С. 29–34.

Публикации по теме диссертации.

Статьи в научных изданиях

1. *Антонова А.П., Фаминский А.В.* О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в нормах Гёльдера// Матем. заметки., 2015. — Т. 97, вып. 1. — С. 13–22.

2. *Антонова А.П., Фаминский А.В.* О внутренней регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова// Вестник Тамбовского ун-та, 2015. — Т. 20, вып. 5. — С. 999–1006.

3. *Антонова А.П., Фаминский А.В.* О регулярности решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова–Кузнецова// Современная математика. Фундаментальные направления., 2015. — Т. 58. — С. 5–21.

4. *Faminskii A.V., Antonova A.P* On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation// Progress in Partial Differential Equations, M. Reissig, M. Ruzhansky (eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics., 2013. — V. 44. — P. 53–74.

Прочие публикации

5. *Антонова А.П.* On the Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation// Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, РУДН, 23–26 апреля 2013 г.), 2013 — С. 45.

6. *Antonova A.P.* On Interior Regularity of Solutions to Zakharov-Kuznetsov Equation// The Seventh International Conference on Differential Equations, Moscow, Russia, August 22-29, 2014, Abstarcts, 2014 — P. 6-7.

Антонова А.П.

Свойства решений краевых задач для уравнения Захарова-Кузнецова

Аннотация

В работе рассмотрен вопрос о повышении внутренней гладкости решений задачи Коши и начально-краевой задачи для уравнения Захарова-Кузнецова. Были доказаны теоремы о существовании обобщенных производных решений и их непрерывности.

Antonova A.P.

Properties of solutions of boundary value problems for the equation of Zakharov-Kuznetsov

Abstract

The paper considers the issue of enhancing the internal smoothness of solutions of the Cauchy problem and initial-boundary value problem for the equation of Zakharov-Kuznetsov. Were proved theorems on the existence of generalized derivatives of solutions and their continuity.