На правах рукописи

Тасевич Алла Львовна

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с ортотропными сжатиями

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естестенных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент **Россовский Леонид Ефимович**
Официальные оппоненты:	**Антоневич Анатолий Борисович,** доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, профессор
	Коньков Андрей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, профессор
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Защита состоится 11 октября 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 на базе Российского университета дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан «   » июля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.203.27, д.ф.-м.н. Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Эллиптические функционально-дифференциальные операторы, ассоциированные с группой диффеоморфизмов многообразия, рассматривались в работах[1,2,3,4,5]. Были доказаны теоремы об однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева, получена формула индекса, при этом методы и результаты существенно зависели от свойств группы.

В теории упругости[6], теории многомерных диффузионных процессов[7], а также в связи с нелокальными краевыми задачами типа А. В. Бицадзе, А. А. Самарского возникают эллиптические функционально-дифференциальные уравнения, в которых преобразования аргументов могут отображать некоторые точки границы внутрь области. Так, например, упругие модели конструкций, содержащих многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем, могут быть сведены к сильно эллиптическим системам дифференциально-разностных уравнений. Необходимость исследования краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений появляется и в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи[8].

Впервые эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сдвигами по пространственным переменным в ограниченных областях рассматривались А. Л. Скубачевским[9,10], создавшим теорию краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Им были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева, а также весовых пространствах, изучена гладкость обобщенных решений. Было показано, что даже при бесконечно дифференцируемой правой части гладкость может нарушаться, при этом обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений на некотором множестве точек, находящихся как на границе, так и внутри области. В дальнейшем исследование теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений продолжалось в

[1] *Антоневич А. Б.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1973. — *37*, № 3. —С. 663–675.

[2] *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН — 1978. — *243*, № 5. —С. 1134–1137.

[3] *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Мн.: Университетское, 1988.

[4] *Antonevich A. B., Lebedev A. V.* Functional Differential Equations. V.1. C^*-theory. Harlow, England, 1994.

[5] *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений// Матем.сб. — 2011. — *202*, № 10. —С. 99–103.

[6] *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.

[7] *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. акад. наук СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–292.

[8] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos, Solitons, and Fractals. — 1994. — *4*. — P. 1701–1716.

[9] *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом// Мат. замет. — 1985. — *38*, № 4. — С. 587–598.

[10] *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. of Differential Equations. — 1986. — *63*. — P. 332–361.

работах его учеников Е. Л. Цветкова, В. В. Подъяпольского, М. А. Скрябина, В. А. Попова и др.

В работах Л. Е. Россовского[11,12] исследовались функционально-дифференциальные уравнения со сжатиями, одинаковыми по всем координатам. При этом краевые задачи рассматривались в ограниченных областях, содержащих неподвижную точку оператора сжатия, что создавало принципиальную трудность в их изучении и приводило к ряду новых свойств. Так, ядро краевой задачи могло быть бесконечномерным и содержать лишь негладкие функции, а гладкость решения равносильна его единственности.

Стоит отметить, что в одномерном случае функционально-дифференциальные уравнения со сжатием аргумента моделируют самые разные явления. Так, уравнение пантографа

$$y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$$

возникает в астрономии[13], в электротехнике[14] и в биологии[15]. В работе Като Т. и Маклеода Дж. Б.[16] было исследовано асимптотическое поведение решений уравнения пантографа.

Данная диссертация посвящена изучению линейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих в старшей части ортотропные сжатия координат, т.е. сжатия с разными коэффициентами по разным координатам, в том числе сжатие по одной переменной и растяжение по другой.

Значительное место уделяется вопросу сильной эллиптичности рассматриваемого уравнения, или проблеме коэрцитивности, решенной для дифференциальных операторов в работах М. И. Вишика и Л. Гординга. Проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями была изучена в работах А. Л. Скубачевского и Л. Е. Россовского, соответственно.

Цель работы заключается в изучении принципиально нового класса функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями, а именно таких его свойств, как сильная эллиптичность, разрешимость краевых задач в соболевских пространствах и в пространствах с весом, структура спектра и гладкость обобщенных решений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Подробное изучение эллиптического функционально-дифференциального уравнения, содержащего ортотроп-

[11] *Кук К, Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом// Дифференц. уравнения. — 1995. — *31*, № 3. — С. 1366–1370.

[12] *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. замет. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.

[13] *Амбарцумян В. А.* К теории флуктуаций яркости в млечном пути// Докл. акад. наук СССР. — 1944. — *44*. — С. 244–247.

[14] *Ockendon J. R. and Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. R. Soc. Lond. A. — 1971. — *322*. — P. 447–468.

[15] *Hall A. J. and Wake G. C.* A functional differential equation arising in the modelling of cell growth// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1989. — *30*. — P. 424–435.

[16] *Kato T. and McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*. — P. 891–937.

ные сжатия аргументов искомой функции, проводится впервые. Среди представленных результатов можно выделить следующие:

1. получен ряд необходимых и достаточных условий сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями;
2. доказана теорема о фредгольмовой разрешимости и о структуре спектра первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями;
3. исследована гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями;
4. получены достаточные условия однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах В. А. Кондратьева на плоскости;
5. получены достаточные условия обратимости конечно-разностного оператора с переменными коэффициентами на прямой.

Все полученные в диссертации результаты являются конструктивными, условия теорем выражаются непосредственно через коэффициенты уравнений и легко проверяются для конкретных примерах.

Методика исследования. Изучение функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями основано на комбинации методов, развитых для дифференциально-разностных уравнений и для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями, в том числе на сведении к сильно эллиптическим системам дифференциальных уравнений, на методе аппроксимации обобщенных производных конечными разностями, на теории функциональных пространств и методах гармонического анализа. В то же время стоит отметить, что ни те, ни другие подходы напрямую не переносятся на рассматриваемый случай. Новым элементом исследования является преобразование уравнения, основанное на виде орбит точек области под действием ортотропного сжатия. Хорошо известно, что свойства краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения во многом определяются структурой орбит точек области под действием группы, порожденной присутствующими в уравнении преобразованиями. Для преобразований вида

$$v(x_1,x_2) \longmapsto v(qx_1,qx_2). \tag{1}$$

орбиты располагаются на лучах, выходящих из начала координат. Для функционально-дифференциальные уравнения, содержащие преобразования вида

$$v(x_1,x_2) \longmapsto v(q^{-1}x_1,px_2) \quad q,p > 1, \tag{2}$$

орбиты лежат на “гиперболах” $|x_1|^{\ln p}|x_2|^{\ln q} = const$, и естественно предположить, что задачи с ортотропными сжатиями вида (2) по своим свойствам должны отличаться от задач с изотропными сжатиями вида (1).

Теоретическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер и ее результаты дополняют теорию краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Наличие в старшей части уравнения преобразований, отображающих точки границы внутрь или во внешность области, порождающих при этом бесконечное число конечных орбит, приводит к принципиальным отличиям от теории краевых задач для уже изученных дифференциально-разностных уравнений или функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями. Кроме того, полученные результаты позволяют выделить новый класс сильно эллиптических уравнений, для которых имеет положительный ответ известная гипотеза Т. Като о совпадении квадратных корней из m-аккретивного оператора и сопряженного к нему[17].

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы излагались в Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова: на семинаре “Спектральная теория дифференциальных операторов” под руководством академика В. А. Садовничего, на семинаре под руководством А. А. Шкаликова, на семинаре под руководством А. С. Шамаева; в Вычислительном центре РАН на семинаре “Методы решения задач математической физики” под руководством А. А. Абрамова и В. И. Власова; в Московском Энергетическом университете на семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством А. А. Амосова и Ю. А. Дубинского; в Российском университете дружбы народов на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А. Л. Скубачевского; в Свободном университете г. Берлина (Германия) на семинаре под руководством Б. Фидлера; в Гейдельбергском университете (Германия) на семинаре под руководством В. Егера; на Шестой и Седьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2011, 2014); на Международной конференции “Differential Equations and Related Topics”, посвященной И. Г. Петровскому (Москва, 2011); на Международных конференциях “Science and Progress” (Санкт-Петербург, 2012, 2013); на Международной конференции “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.”, посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2013); на Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2013); на Воронежской весенней математической школе “Понтрягинские чтения - XXV” (Воронеж, 2014); на Международной конференции “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвященной 100-летию Б. М. Левитана (Москва, 2014); на XXV Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Судак, 2014); на Международной конференции “Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования.” (Москва, 2014); на Воро-

[17] *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13*, № 3. — P. 246–274.

нежской зимней математической школе “Современные методы теории функций и смежные проблемы.” (Воронеж, 2015), на Воронежской зимней математической школе С. Г. Крейна (Воронеж, 2016).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 13 — в тезисах докладов [4–16].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 90 страниц с 3 рисунками. Список литературы содержит 67 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, смежных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Диссертация посвящена исследованию свойств одного функционально-дифференциального уравнения в частных производных

$$A_R u(x_1, x_2) \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_i})_{x_j}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \tag{3}$$

где функциональный оператор R_{ij} с постоянными комплексными коэффициентами задается по следующей формуле

$$R_{ij}v(x_1,x_2) = a_{ij0}v(x_1,x_2) + a_{ij1}v(q_1^{-1}x_1,q_2^{-1}x_2) + a_{ij,-1}v(q_1x_1,q_2x_2).$$

В отличие от уже изученного случая, когда параметры $q_1 = q_2 \in \mathbb{R}_+$, рассматривается случай различных положительных параметров преобразования. При этом возможен как случай разных сжатий по разным переменным, так и случай растяжения по одной переменной и сжатия по другой. В диссертации такие преобразования называются *преобразованиями ортотропного сжатия*.

В **первой главе** рассматривается задача Дирихле для уравнения (3) в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ и изучается вопрос сильной эллиптичности оператора, порожденного задачей. Полагаем, что область Ω содержит начало координат, функция $f \in L_2(\Omega)$ является комплекснозначной, а также если для некоторой точки $(x_1,x_2) \in \Omega$ преобразованная точка $(q_1^{\pm 1}x_1,q_2^{\pm 1}x_2)$ оказывается вне области, то $v(q_1^{\pm 1}x_1,q_2^{\pm 1}x_2) = 0$.

Уравнение (3) будем называть *сильно эллиптическим уравнением*, а соответствующий оператор A_R — *сильно эллиптическим оператором*, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство типа Гординга

$$\mathrm{Re}(A_R u,u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4}$$

Задачу о нахождении алгебраических условий на коэффициенты уравнения (3), при которых оператор A_R будет сильно эллиптическим, называют *проблемой коэрцитивности*.

В **параграфе 1.1** изучаются свойства оператора ортотропного сжатия.

Параграф 1.2 посвящен геометрическим конструкциям, связанным с преобразованием ортотропного сжатия и рассматриваемой областью. Показано, что для случая $q_1 > 1$, $q_2 < 1$ ограниченная область, содержащая начало координат — неподвижную точку оператора сжатия, разбивается на бесконечное число подобластей, которые, однако, можно сгруппировать в конечные классы.

Параграфы 1.3 и **1.4** посвящены решению проблемы коэрцитивности.

В **параграфе 1.3** показывается, что неравенство типа Гординга для (3) сводится к проверке положительной определенности действующего в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженного разностного оператора с гладкими коэффициентами, имеющими конечные пределы на $\pm\infty$.

Теорема 1. *Неравенство* (4) *выполнено тогда и только тогда, когда* $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$ *и самосопряженные разностные операторы*

$$I + g^{\pm}(\tau)T + T^{-1}\bar{g}^{\pm}(\tau) : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{5}$$

где

$$g^{\pm}(\tau) = \frac{\alpha_{11}e^{2\tau} + \alpha_{21}e^{-2\tau} \pm \beta_1}{2\sqrt{(\alpha_{10}e^{2\tau} + \alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)((q_2/q_1)\alpha_{10}e^{2\tau} + (q_1/q_2)\alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)}}, \tag{6}$$

положительно определены.

Здесь операторы $Tw(\tau) = w(\tau - \ln\sqrt{q_1/q_2}), T^{-1}w(\tau) = w(\tau + \ln\sqrt{q_1/q_2})$ являются операторами сдвига, а коэффициенты α_{ij}, β_j, $i = 1{,}2$, $j = 0{,}1$, явно выписываются через коэффициенты исходного уравнения (3) следующим образом

$$\alpha_{i0} = \operatorname{Re} a_{ii0}\ (i = 1{,}2), \quad \alpha_{11} = q_2 a_{111} + \frac{\bar{a}_{11,-1}}{q_1}, \quad \alpha_{21} = q_1 a_{221} + \frac{\bar{a}_{22,-1}}{q_2},$$

$$\beta_0 = \operatorname{Re}(a_{120} + a_{210}), \quad \beta_1 = q_1 a_{121} + \frac{\bar{a}_{12,-1}}{q_1} + q_2 a_{211} + \frac{\bar{a}_{21,-1}}{q_2}.$$

Далее приведены некоторые вытекающие из теоремы 1 условия сильной эллиптичности в явной форме. Так, достаточным условием будет $\sup_{\tau\in\mathbb{R}} |g(\tau)| < 1/2$, а необходимым $|g(\tau)| < 1$, $\tau \in \mathbb{R}$. Другое, более тонкое достаточное условие формулируется в виде неравенства $\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \Big(|g(\tau)| + |g(\tau + \ln\sqrt{q_1/q_2})|\Big) < 1$.

Параграф 1.4 посвящен исследованию сильной эллиптичности в случае, когда $q_1 > 1$, $q_2 < 1$. Тогда можно применить подход, используемый для дифференциально-разностных уравнений, основанный на переходе к сильно эллиптическим системам.

Пусть s — некоторое натуральное число и матрица $\mathbf{R}_{ijs}\,(s \times s)$ состоит из элементов

$$\rho_{kl}^{ijs} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{l-k}{2}} a_{ij,l-k}, & |l-k| \leqslant 1; \\ 0, & |l-k| > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Показано, что неравенство типа Гординга для (3) эквивалентно сильной эллиптичности матричных дифференциальных операторов второго порядка

$$\mathbf{A}_s = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{Q}_{js} \mathbf{R}_{ijs} \mathbf{Q}_{is} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $\mathbf{Q}_{is}$ — это диагональные матрицы порядка $s \times s$, на диагонали которых стоят элементы $1, q_i, q_i^2, \ldots, q_i^{s-1}$, $i = 1{,}2$. В **параграфе 1.4** обсуждается частный случай, для которого получен простой критерий сильной эллиптичности.

Теорема 2. *Уравнение*

$$A_R u(x_1,x_2) \equiv -\sum_{i=1}^{2} (R_{ii} u_{x_i})_{x_i}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Omega, \tag{9}$$

является сильно эллиптическим в области $\overline{\Omega}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re} a_R(\lambda, \xi) = \sum_{i=1}^{2} \left(\xi_i^2 \mathrm{Re} \left(a_{ii0} + a_{ii1}\lambda + a_{ii,-1}\frac{1}{\lambda} \right) \right) > 0, \quad |\lambda| = \sqrt{q_1 q_2}, \, |\xi| = 1. \tag{10}$$

Результаты первой главы опубликованы в статье [1].

Вторая глава посвящена исследованию свойств обобщенных решений задачи Дирихле для (3) в случае, когда уравнение является сильно эллиптическим.

В **параграфе 2.1** доказаны теоремы о разрешимости и спектральных свойствах рассматриваемой задачи.

Под *обобщенным решением* задачи Дирихле для (3) понимается всякая функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)} \tag{11}$$

для любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Вводится неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \left\{ u \in \mathring{H}^1(\Omega) : \mathcal{A}_R u \in L_2(\Omega) \right\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$. Функцию u назовем *обобщенным решением* задачи (3), если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ и $\mathcal{A}_R u = f$.

С задачей (3) свяжем непрерывную на пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ полуторалинейную форму

$$a_R[u,v] = \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u,v]| \leqslant M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Кроме того, неравенство (4) обеспечивает оценку

$$\mathrm{Re}\, a_R[u,u] \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad (u \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Это позволяет ввести на $\mathring{H}^1(\Omega)$ эквивалентное скалярное произведение

$$(u,v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2}\left(a_R[u,v] + \overline{a_R[v,u]}\right).$$

Стандартными методами функционального анализа выводятся фредгольмовость оператора $\mathcal{A}_R$, дискретность и секториальная структура его спектра.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача* (3) *имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, причем $\|u\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(\Omega)}$.*

Спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ оператора $\mathcal{A}_R$ дискретный и содержится во множестве

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0, |\arg\lambda| \leqslant \operatorname{arctg}(M/c_1)\}.$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ фредгольмов. Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$, то резольвента $(\lambda I - \mathcal{A}_R)^{-1}$ есть компактный оператор в $L_2(\Omega)$.

В **параграфе 2.2** исследуется гладкость обобщенных решений. Удается доказать гладкость лишь в подобластях, описанных в параграфе 1.2. Для простоты рассматривается круг B с центром в начале координат.

Конечное число подобластей в каждом классе позволяет применить подход, разработанный для дифференциально-разностных уравнений А. Л. Скубачевским и основанный на переходе к сильно эллиптическим системам для исследования локальной гладкости (**пункт 2.2.1**) и на методе аппроксимации дифференциальных операторов разностными для исследования гладкости вблизи границы (**пункт 2.2.2**). Сложности при изучении гладкости связаны с наличием на границе и внутри области точек, вблизи которых у решения возникают особенности.

Через ${}^kB$ обозначаем множество

$${}^kB = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | (q_1^k x_1, q_2^k x_2) \in B\},$$

а через B_r — открытую связную компоненту множества $B \setminus \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \partial({}^kB)\right)$. Подобласти B_{r_1}, B_{r_2} принадлежат одному классу, если $\exists k \in \mathbb{Z}$, что ${}^kB_{r_1} = B_{r_2}$. Обозначим подобласти B_r через B_{sl}, где s является номером класса, а l — номером подобласти в s-ом классе, $l = \overline{1,N(s)}$. Здесь $N(s)$ — число подобластей в s-ом классе.

Введем множество $\mathcal{K}$ по следующей формуле

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}\ k_1\neq k_2} \{\overline{B} \cap \left(\partial({}^{k_1}B)\right) \cap \left(\partial({}^{k_2}B)\right)\}. \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть уравнение* (3) *является сильно эллиптическим в $\overline{B}$. Предположим, что функция u является обобщенным решением первой краевой задачи для* (3)*, а функция $f \in L_2(B) \cap H^m_{loc}(B_{sl}), \quad s \in \mathbb{N}, l = \overline{1,N(s)}$. Тогда $u \in H^{m+2}_{loc}(B_{sl})$ для всех $s \in \mathbb{N}, l = \overline{1,N(s)}$.*

Теорема 5. *Пусть уравнение* (3) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением первой краевой задачи для* (3)*, а функция* $f \in L_2(B) \cap H^m(B_{sl})$, $s \in \mathbb{N}, l = \overline{1,N(s)}$. *Тогда* $u \in H^{m+2}(B_{sl} \backslash \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для всех* $\varepsilon > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $l = \overline{1,N(s)}$, *где* $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x,\mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

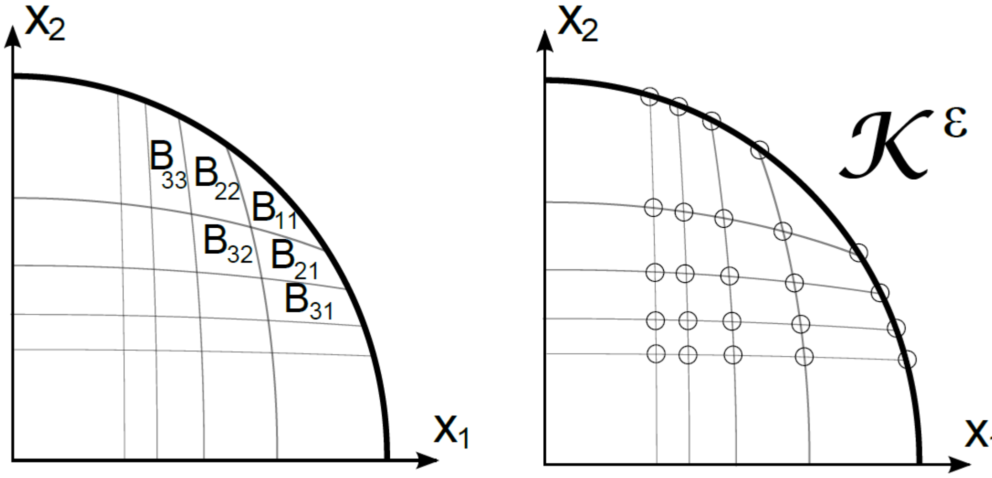

Рис. 1: Множества B_{sl} и $\mathcal{K}^\varepsilon$.

В **параграфе 2.3** рассмотрен специальный случай уравнения (3), когда $q_1, q_2 > 1$. Тогда можно выделить класс ограниченных областей на плоскости, удовлетворяющих условию

$$\overline{\Omega} \subset \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1/q_1, x_2/q_2) \in \Omega\right\}, \quad q_1, q_2 > 1,$$

т.е. инвариантных относительно преобразования сжатия. Рассматривается задача

$$-\Delta R_1 R_2 u(x_1, x_2) = f(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Относительно оператора $R_1 v(x_1,x_2) = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j v\left(q_1^{-j} x_1, q_2^{-j} x_2\right)$ предполагается, что

$$\operatorname{Re} \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j q_1^{-j} \lambda^j > 0 \ \text{ и } \ \operatorname{Re} \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j q_2^{-j} \lambda^j > 0 \ \text{ при } \ |\lambda| = \sqrt{q_1 q_2},$$

а оператор $R_2 v(x_1,x_2) = \sum_{j=-N_2}^{N_1} \beta_j v\left(q_1^{-j} x_1, q_2^{-j} x_2\right)$ таков, что $N_1 > 0$ и все корни выражения $\sum_{j=-N_2}^{N_1} \beta_j \lambda^j$ по модулю меньше, чем $\min\left\{\sqrt{q_1/q_2}, \sqrt{q_2/q_1}\right\}$. Доказано, что краевая задача (13) разрешима для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, причем при $f = 0$ соответствующая однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых обобщенных решений. В конце **параграфа 2.3** дается пример уравнения, иллюстрирующий полученные результаты.

Результаты **второй главы** опубликованы в статье [2].

В **третьей главе** исследуется разрешимость уравнения (3) в весовых пространствах Кондратьева на всей плоскости.

Параграф 3.1 содержит известные результаты о пространствах Кондратьева и их свойствах.

В. А. Кондратьевым весовые пространства $H^s_\beta(\mathbb{R}^2)$, определенные при целом неотрицательном s и $\beta \in \mathbb{R}$ как пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha_x u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \tag{14}$$

были предложены для исследования разрешимости эллиптических задач в областях с угловыми или коническими особенностями. Позже оказалось удобным использовать те же пространства и при решении краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Это вызвано существованием обобщенных решений, имеющих степенные особенности как на границе, так и внутри области. Для функционально-дифференциальных уравнений со сжатием эффект появления особенностей дополнительно связан с наличием в области неподвижной точки преобразования сжатия — начала координат.

В первой части **параграфа 3.2** исходное уравнение (3) приводится при помощи ряда преобразований к разностному уравнению на прямой

$$\gamma_0(\tau)v(\tau) + \gamma_1(\tau)v(\tau - h) + \gamma_2(\tau)v(\tau - 2h) = g(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

которое решается в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Разрешимость уравнений вида (15), содержащих преобразование сдвига, исследовалась многими авторами, в том числе Антоневичем А. Б. и его учениками. При помощи аппарата банаховых алгебр им были получены результаты об обратимости, нетеровости и спектральных свойствах многих классов операторов взвешенного сдвига. Однако, необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения вида (15), напрямую выраженные через коэффициенты γ_0, γ_1 и γ_2, не были получены.

Во второй части **параграфа 3.2** получены достаточные условия разрешимости уравнения (15) в виде

$$\sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\pm\infty)\lambda^j \neq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1), \qquad \gamma_0(\tau) \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}).$$

Стоит подчеркнуть, что эти условия совпадают с необходимыми в случае, когда сумма содержит только два слагаемых[18].

Теорема 6. *Пусть для оператора* $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H_0^s(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$, *из* (3) *выполнены условия*

$$a_{111}q_1 e^{2l_1\tau} \pm (a_{121}q_1 + a_{211}q_2)\, e^{(l_1 - l_2)\tau} + q_2 a_{221} e^{-2l_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right); \tag{16}$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q_1^{s+1}/\sqrt{q_1 q_2}); \tag{17}$$

$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q_2^{s+1}/\sqrt{q_1 q_2}). \tag{18}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1}.

[18] *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Мн.: Университетское, 1988.

Важным результатом является наличие параметра s в условии разрешимости уравнения (3). В случае, когда $q_1 > 1, q_2 < 1,$ увеличение этого параметра позволяет нам ослабить условие на коэффициенты $a_{22k}, k = 0, \pm 1$: уменьшается круг, где не должны лежать корни выражения в (18). Но, в то же время, ужесточаются условия на коэффициенты $a_{11k}, k = 0, \pm 1,$ т. к. увеличивается круг, где выражение из (17) не должно обращаться в нуль. При этом можно обратить внимание на то, что коэффициенты при смешанных производных уравнения (3) содержаться только в условии (16).

В конце параграфа приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Основные результаты третьей главы опубликованы в статье [3].

Публикации автора по теме диссертации

1. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. замет. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.

2. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// СМФН. — 2015. — *58*. — С. 153–165.

3. *Тасевич А. Л.* Достаточные условия разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах// Вестник РУДН. — 2015. — № 4. — С. 8–15.

4. *Тасевич А. Л.* Коэрцитивность и гладкость решений функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Тезисы докладов, Институт математики СО РАН, 2013. С. 265.

5. *Тасевич А. Л.* Условия коэрцитивности функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Тезисы докладов международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.Д.Кудрявцева, Издательство РУДН, 2013. С. 251-252.

6. *Тасевич А. Л.* Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXV», Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. С. 169-170.

7. *Тасевич А. Л.* Об одном классе сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященная 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов, М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2014. С. 127-128.

8. *Тасевич А. Л.* О сильной эллиптичности одного класса функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов. Симферополь: ТНУ, 2014. С. 57.

9. *Тасевич А. Л.* Новый класс сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений// Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тезисы и тексты докладов международной конференции, Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014г. – Москва: РУДН, 2014. С. 102-103.

10. *Тасевич А. Л.* О гладкости сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 2 февраля 2015г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. С. 137.

11. *Тасевич А. Л.* О разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах Кондратьева// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (25–31 января 2016г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. С. 397–399.

12. *Rossovskii L.E. and Tasevich A. L.* On the Gårding inequality for a class of functional differential equations// Abstracts of the Int. Conf. “Differential Equations and Related Topics”, dedicated to Ivan G. Petrovskii, Moscow, May 30 – June 4, 2011. P. 100-101.

13. *Tasevich A. L.* The Garding-Type Inequality for Some Class of Functional-Differential Equations// 6-th Int. Conf. on Diff. and Functional Diff. Equations. Abstracts, M., Steklov Math. Institute, 2011. P. 71-72.

14. *Tasevich A. L.* Coerciveness conditions for the functional-differential equations with orthotropic contractions// International Student Conference “Science and Progress”. Abstracts, SPb.:SOLO, 2012. p. 65.

15. *Tasevich A. L.* On strongly elliptic functional-differential equation with orthotropic contractions// International Student Conference “Science and Progress”. Abstracts, SPb.:SOLO, 2013. p. 37.

16. *Tasevich A. L.* Coerciveness Conditions for the Functional-Differential Equations with Orthotropic Contractions// 7-th Int. Conf. on Diff. and Functional Diff. Equations. Abstracts, M., PFUR, 2014. P. 115-116.

Тасевич А.Л.

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с ортотропными сжатиями.

Аннотация

В работе изучается функционально-дифференциальное уравнение второго порядка с ортотропными сжатиями переменных в старших производных. Получен ряд явных необходимых и достаточных условий выполнения неравенства типа Гординга для рассматриваемого уравнения. Доказана теорема о фредгольмовой разрешимости и о дискретности и секториальной структуре спектра задачи Дирихле для сильно эллиптического уравнения, а также исследован вопрос о гладкости обобщенных решений. Получены достаточные условия однозначной разрешимости уравнения в весовых пространствах на плоскости.

Tasevich A.L.

Elliptic functional differential equations with orthotropic contractions.

Abstract

In this thesis a functional differential equation of second order with orthotropic contractions in the principal part is studied. Several explicit necessary and sufficient conditions of the Gårding-type inequality are obtained. The Fredholm solvability, discreteness and sectorial structure of the spectrum of the Dirichlet problem for a strongly elliptic equation with orthotropic contractions are established, and the regularity of generalized solutions is studied. Sufficient conditions for the unique solvability of the considered equation in weighted spaces on the plane are obtained.