На правах рукописи

Нгуен Вьет Хоа

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕОРЕТИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2015

Работа выполнена на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН).

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Коняев Юрий Александрович**

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института общей физики им. А.М. Прохорова РАН **Егоров Александр Алексеевич**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент **Никитин Андрей Геннадьевич,** доцент кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

доктор физико-математических наук, профессор **Нестеров Андрей Владимирович,** профессор Московского городского педагогического университета.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «НИУ «МАИ».

Защита диссертации состоится «___»____________2015 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 в ФБГОУ ВПО Российском университете дружбы народов (РУДН) по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидже, д. 3, зал № __.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов (РУДН) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.34
кандидат физико-математических наук, доцент В.А. Попова

Введение. Представленная работа посвящена исследованию различных (в том числе и отличных от ранее известных) теоретико-механических моделей современных гироскопических и некоторых электромеханических систем, реализуемых в виде линейных и квазилинейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической матрицей (при наличии малых возмущений), а также нового класса систем с полиномиальной и полиномиально периодической матрицей.

Термин *гироскоп* (т.е. буквально – «прибор, обнаруживающий вращение») был введен в науку французским физиком Фуко (1852) для обозначения созданного им прибора, основной частью которого был быстро вращающийся ротор [1, 2]. С помощью гироскопа впервые удалось обнаружить факт суточного вращения Земли непосредственным лабораторным опытом.

Движение свободного твердого тела описывается при помощи шести обобщенных координат, например, трех декартовых координат одной из точек тела (чаще всего это – координаты центра масс) и трех углов Эйлера, определяющих положение твердого тела в заданной системе координат, связанной с одной из точек тела и движущейся поступательно [1, 2]. Для вывода уравнений движения свободного твердого тела используют теорему о движении центра масс и теорему об изменении момента количества движения системы относительно центра масс [1, 2]. Обычно ротор гироскопа выполняется в виде однородного тела вращения, и поэтому его экваториальные моменты инерции равны между собой.

Твердое тело, имеющее ось симметрии и вращающееся вокруг одной из точек на оси симметрии, называется гироскопом. В технических приложениях используются гироскопы, выполненные в виде тел вращения, которым сообщается большая начальная угловая скорость вокруг оси симметрии. Если у гироскопа центр масс совпадает с неподвижной точкой, то он называется *астатическим гироскопом*. В противном случае его называют *тяжелым гироскопом* или *волчком* [1]. Астатический гироскоп с тремя степенями свободы часто называют *свободным гироскопом*. Вращающийся вокруг вертикальной оси волчок называют «*спящим*».

При вращении гироскопа возможны следующие явления: *регулярная прецессия* – вращение гироскопа, совершающееся без нутаций (наблюдается в однородном силовом поле [1]); *Нутация* (от лат. Nūtāre – колебаться) – слабое нерегулярное движение вращающегося твёрдого тела, совершающего прецессию. *Прецессия* наблюдается спустя некоторое время после запуска гироскопа, когда его вращение начнёт замедляться. Первоначально ось вращения гироскопа вертикальна. Затем его верхняя точка постепенно опускается и движется по расходящейся спирали. Это и есть прецессия оси гироскопа. Для ее наблюдения можно также толкнуть ось вращающегося гироскопа – начнётся прецессия. *Нутация* напоминает «подрагивание» оси вращения и заключается в слабом изменении так называемого угла нутации между осями собственного и прецессионного вращения тела.

Ось фигуры астатического гироскопа сохраняет неподвижное направление в инерциальном пространстве (ось симметрии гироскопа остается все время неподвижной, если на астатический гироскоп не действуют никакие другие силы, кроме однородных сил тяжести и в начальный момент эта ось не была подвергнута возмущению). При аналогичных условиях ось симметрии тяжелого гироскопа описывает прямой круговой конус вокруг вертикальной оси. Угловая скорость прецессии зависит от величины смещения центра тяжести вдоль оси симметрии, веса гироскопа и его кинетического момента. Именно эти свойства гироскопов позволяют решить задачу определения местоположения объекта в пространстве [1, 2].

В гироскопе на кардановом подвесе информацию о положении объекта в (инерциальном) пространстве содержат в себе углы a и b поворотов кардановых колец: a – определяет поворот внешнего кольца относительно объекта, на котором установлен гироскоп, а угол b – определяет поворот внутреннего кольца вокруг заданной оси [1]. Как известно в астрономии и географии углам a и b соответствует долгота и широта места земной поверхности. Эти углы легко определяются по показаниям прибора (например, на основании данных потенциометрических или индуктивных датчиков связанных с наружным и внутренним кольцом карданова подвеса). При этом существует однозначная связь между углами a и b и углами Эйлера.

Совокупность динамических уравнений Эйлера и кинематических уравнений Эйлера позволяет получить систему уравнений, которая полностью определяет движение твердого тела с одной неподвижной точкой. К ним необходимо еще присоединить шесть начальных условий для угловых скоростей и их первых производных.

Уравнения движения твердого тела в рассматриваемом случае могут быть получены также в форме уравнений Лагранжа [1, 2]. В последних используются обобщенные координаты, кинетическая энергия и обобщенные силы. В случае твердого тела с одной неподвижной точкой за обобщенные координаты могут быть приняты углы Эйлера.

Использование уравнений Эйлера особенно полезно при исследовании движения изолированного твердого тела. Например, если пренебречь массой кардановых колец, то гироскоп можно рассматривать как одно тело – ротор.

Дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе (гироскоп установлен на неподвижном основании) в форме Лагранжа имеют следующий вид [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[P(\beta)\dot{\alpha} + C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)\sin\beta\right] = M_z(\dot{\alpha}),\\
&Q\ddot{\beta} - (B_1 - A - C_1)\sin\beta\cos\beta\dot{\alpha}^2 - C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\varphi})\dot{\alpha}\cos\beta = -\alpha G\cos\beta + M_x(\dot{\beta}),\\
&C\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\varphi}) = M_y(\varphi,\dot{\varphi}).
\end{aligned}\right\}$$

В этом уравнении: $\dot{\alpha}$ – угловая скорость вращения наружного кольца карданового подвеса вокруг оси Oz; $\dot{\beta}$ – угловая скорость внутреннего кольца (гирокамера участвует в переносном движении вместе с наружным кольцом и относительном движении с угловой скоростью $\dot{\beta}$ относительно наружного кольца); A, B, C – главные моменты инерции ротора относительно точки O; A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции гирокамеры для точки O; A_2, B_2, C_2 – главные моменты инерции гирокамеры для наружного кольца. При выводе полагается, что ротор симметричен относительно своей оси вращения и его экваториальные моменты инерции равны: $A = B$; C – момент инерции относительно оси Oy; $P(\beta) = C_2 + B_1\sin^2\beta + (A + C_1)\cos^2\beta$; $Q = A + A_1$; G – сила тяжести; M_x, M_z – моменты сил сопротивления в осях подвесах; M_y – суммарный момент, действующий на ротор, зависящий от угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$. Кроме того полагается, что главные оси инерции гирокамеры направлены по осям x, y, z.

Для реализации поставленных в диссертации целей особое внимание уделено разработке новых спектральных и асимптотических методов исследования теоретико-механических моделей гироскопических систем с периодической, полиномиальной и полиномиально периодической матрицей с учетом одного из вариантов метода расщепления.

Так, например, в 1-ой главе с помощью разработанных нами методов рассмотрено стационарное вращение бесконтактного гироскопа в переменном магнитном поле, которое описано с помощью линеаризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. А во 2-ой главе разработанные нами методы применены к анализу малых колебаний оси гироскопа (нутация), которые могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В настоящей диссертации разработаны эффективные методы анализа указанного класса систем, включая вопросы устойчивости, которые являются обобщением и развитием известных [3-18] и более современных методов [19-24]. Автор придерживался принятых в данной научной области обозначений, в частности таких, когда из текста понятно, где векторные величины, и поэтому их специально (шрифтом или стрелочками) не обозначают. Нумерация теорем и основных формул в автореферате и диссертации совпадают.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение значительной части современных гироскопических систем может быть сведено к анализу соответствующих модельных неавтономных линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений.

Исследование систем дифференциальных уравнений указанного класса с помощью известных [3-18] аналитических или асимптотических методов весьма затруднёно и не всегда эффективно и поэтому в последнее время такие системы стали изучаться с помощью численных методов, что имеет свои недостатки.

Для более тщательного анализа теоретико-механических моделей гироскопических систем и соответствующих вопросов теории дифференциальных уравнений, включая вопросы устойчивости, необходимо хорошо обоснованное сочетание аналитических и численных методов. Преобладание одного из этих методов будет только тормозить развитие данной теории.

В последние время в качественной и прикладной теории дифференциальных уравнений стал заметен дефицит аналитических и асимптотических методов.

В данной работе особое внимание уделено разработке новых аналитических спектральных и асимптотических методов для исследования теоретико-механических моделей гироскопических систем с периодической, полиномиальной и полиномиально периодической матрицей с учетом одного из вариантов метода расщепления, разработанного в работах [19-23].

Следует отметить, что известен только ряд теорем [6, 16] об исследовании систем вида $\dot{x} = \left(A_0 + B(t)\right)x$ с почти постоянной матрицей, где возможно применение спектрального метода.

Отметим также, известную теорему Флоке – Ляпунова [6, 16], в которой говорится о возможности преобразования линейной периодической системы $\dot{x} = A(t)x$ с помощью невырожденной замены $x = P(t)y$ к эквивалентной системе с постоянной матрицей вида $\dot{y} = Cy$, что позволяет судить о характере поведения её решения с учетом структуры спектра матрицы C, однако, данная теорема не является конструктивной, так как до настоящего времени не разработан алгоритм построения нужной замены.

Можно показать, что спектральный подход к анализу неавтономных систем вида $\dot{x} = A(t)x$ в общем случае, является неверным.

Например, анализ системы вида $\dot{x} = A(t)x;\quad x(t_0) = x_0$ [7, с. 123] с периодической матрицей $A(t) = \begin{pmatrix} (-1-2\cos 4t) & (-2+2\sin 4t) \\ (2+2\sin 4t) & (-1+2\cos 4t) \end{pmatrix}$, имеющей постоянный спектр $\lambda_{A1,2} = -1$, лежащей в левой полуплоскости, не гарантирует устойчивости её решения.

С помощью метода показателей Ляпунова доказано [7], что тривиальное решение этой системы является неустойчивым.

Заметим, что анализ даже простейшей линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ с периодической матрицей, описывающей многие циклические процессы, например (при некоторых допущениях) движение Луны (уравнение Матье или Хилла), различных гироскопических устройств вызывает заметные трудности.

Важнейшим моментом качественного анализа неавтономных динамических линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений являются вопросы устойчивости их решения.

Несмотря на заметное число классических и современных работ по теории устойчивости, основы которой изложены в трудах Пуанкаре А., Ляпунова А.М., Четаева Н.Г., Красовского И.Г., Меркина Д.Р. и ряда других авторов, в настоящее время имеется определенный дефицит достаточно эффективных и конструктивных аналитических методов исследования устойчивости.

Представленная диссертационная работа, посвящена анализу некоторых классов неавтономных систем дифференциальных уравнений, используемых в качестве теоретико-механических моделей ряда современных гироскопических устройств и некоторых других процессов, для изучения которых предложены достаточно эффективные методы и алгоритмы для анализа устойчивости решения квазилинейных неавтономных систем вида $\dot{x} = A(t)x + f(x,t);\quad x(t_0) = x_0$ для трех важнейших классов систем дифференциальных уравнений указанного типа с периодической, полиномиальной и полиномиально периодической матрицей [19-23].

Изучен ряд нетривиальных физических примеров.

1. Исследовано стационарное вращение бесконтактного гироскопа в переменном магнитном поле [19], которое может быть описано с помощью линеаризованной системы:

$$\dot{x} = \left(\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x; \qquad \left(x \in R^2\right);$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & -r(t) \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix}; \quad p(t) = (1-\chi)\Omega\sin^2\omega t + 0,5i\omega(\xi - 1)\sin 2\omega t;$$

$$r(t) = p(t) - \Omega\sin^2\omega t; \quad \chi = I_1 / I_3; \qquad \xi = \alpha_3 / \alpha_1; \qquad \varepsilon = \alpha_1 H_0^2 / L > 0; \qquad \Omega = L / I_1,$$

где ω - частота магнитного поля, H_0 - амплитуда колебаний магнитного поля, Ω - частота нутационных колебаний тела, I_j - моменты инерции относительно его осей $(j = 1,2,3)$, ξ - величина, определяемая поляризуемостью тела относительно его осей, $\varepsilon > 0$ - безразмерный малый параметр.

2. Малые колебания оси гироскопа (на стадии его разгона) с переменным кинетическим моментом (при наличии позиционных сил) могут быть описаны [20] (при некоторых допущениях) модельной неавтономной системой дифференциальных уравнений $\left\{\ddot{\alpha} + (h+t)\dot{\beta} + k_{11}\alpha + k_{12}\beta = 0;\ \ \ddot{\beta} - (h+t)\dot{\alpha} + k_{21}\alpha + k_{22}\beta = 0\right\}$, где α и β - малые углы отклонения оси гироскопа от некоторого невозмущённого положения, h - характеризует начальное значение вектора кинетического момента, слагаемые $(k_{11}\alpha + k_{12}\beta)$ и $(k_{21}\alpha + k_{22}\beta)$ - описывают действие позиционных сил.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является анализ современных теоретико-механических моделей гироскопических систем, реализуемых в виде систем дифференциальных уравнений с периодической матрицей (при наличии малых возмущений) и менее изученных систем с полиномиальной и полиномиально периодической матрицей, а также развитие и обобщение известных [3-18] и разработка более современных методов [19-23], отражающих поведение различных гироскопических систем и некоторых физических, биологических и социальных процессов.

Отметим, что предложенные в диссертации аналитические спектральные методы для изучения модельных систем дифференциальных уравнений с периодической, полиномиальной и полиномиально периодической матрицей (при наличии особенностей различного типа и матрицы A_0 различной жордановой структуры) удобны и эффективны как для приближенного качественного исследования таких систем, так и для более точного численного анализа [1-8, A].

То есть в диссертации предложено оптимальное сочетание аналитических спектральных и асимптотических методов для анализа указанных теоретико-механических моделей гироскопических систем, что является существенным развитием и обобщением известных классических методов [3-18] (например, метода усреднения) и метода расщепления [19-23].

Методы исследования. В представленной работе использованы, предложенные автором современные методы исследования теоретико-механических моделей гироскопических систем, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и наиболее существенные моменты последнего варианта метода расщепления (изложенного в работах [19-23]), важной составляющей теории регулярных возмущений.

Научная новизна основных результатов работы состоит в следующем.

1. Для неавтономных систем дифференциальных уравнений с периодической матрицей вида:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k \right) x + f(x,t); \qquad x(0,\varepsilon) = x_0; \qquad \left(x, f \in R^n; \qquad f(0,t) \equiv 0 \right) \quad (1)$$

(где матричный ряд $A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ из Т-периодических достаточно гладких матриц $A_k(t)$ сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме при достаточно малых ε ($|\varepsilon| << 1$) и при $t \ge 0$, функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega : \{ |x| < R; \quad t \ge 0 \}$ и матрица A_0 различной жордановой структуры), моделирующих динамику большого класса гироскопических систем, показана возможность приведение таких систем к более простым эквивалентным системам с почти постоянной диагональной или «блочно диагональной» матрицей [3, 6, 7, A].

Используемый при этом в работе метод можно считать спектральным аналогом известного метода усреднения [13, 15] и обобщением метода расщепления (на данный класс систем), изложенный в работах [19-23].

При анализе таких систем вида (1) получен ряд новых результатов [3, 6, 7, A], что обобщает или дополняет известные результаты [6, 13, 15, 16].

Построено асимптотическое представление решения для данного класса линейных систем (1) с периодической матрицей при наличии регулярных возмущений.

Исследовано стационарное вращение бесконтактного гироскопа в переменном магнитном поле [19], которое может быть описано с помощью линеаризованной системы дифференциальных уравнений: $\dot{x} = \left(\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t) \right) x; \quad \left(x \in R^2 \right); \qquad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & -r(t) \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix}; \; p(t) = (1-\chi)\Omega \sin^2 \omega t + 0{,}5 i\omega(\xi - 1)\sin 2\omega t; \; r(t) = p(t) - \Omega \sin^2 \omega t;$$

$$\chi = I_1 / I_3; \qquad \xi = \alpha_3 / \alpha_1; \qquad \varepsilon = \alpha_1 H_0^2 / L > 0; \qquad \Omega = L / I_1,$$

где ω - частота магнитного поля, H_0 - амплитуда колебаний магнитного поля, Ω - частота нутационных колебаний тела, I_j - моменты инерции относительно его осей $(j = 1,2,3)$, ξ - величина, определяемая поляризуемостью[1] тела относительно его осей, $\varepsilon > 0$ - безразмерный малый параметр. Изучены различные режимы его работы и найдены соответствующие области устойчивости.

2. Класс неавтономных систем дифференциальных уравнений с полиномиальной матрицей вида:

$$\dot{x} = \left(t^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-k} \right) x + f(x,t); \quad x(t_0) = x_0; \; \left(x, f \in R^n; \quad f(0,t) \equiv 0; \quad m \in N; \quad t \ge t_0 > 1 \right), \qquad (2)$$

(где матричный ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-k}$ сходится абсолютно и равномерно при $t \ge t_0 > 1$, функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega : \{ |x| < R; \quad t \ge 1 \}$) и матрица A_0 различной жордановой структуры) моделирует другие типы и режимы работы гироскопических систем, например, на стадии их разгона.

[1] Поляризуемость – физическое свойство веществ приобретать электрический или магнитный дипольный момент (поляризацию) во внешнем электромагнитном поле.

Для этого класса систем показана возможность его приведение к более простым эквивалентным системам с почти диагональной или «блочно диагональной» матрицей [1, 2, A].

Следует отметить, что к анализу системы с полиномиальной матрицей вида (2) сводится большой класс неавтономных дифференциальных однородных $(f \equiv 0)$ уравнений в теории гипергеометрических и специальных функций.

Предложенный метод преобразования систем вида (2) дал возможность для формулировки достаточных конструктивных условий устойчивости или асимптотической устойчивости решения указанных задач (2), что является обобщением теоремы Ляпунова [3, 6, 16] об асимптотической устойчивости по первому приближению для указанного класса неавтономных систем с полиномиальной матрицей и метода расщепления [1, 2, A].

Построена асимптотика решения (при $t \to +\infty$) исследуемого класса линейных систем с полиномиальной матрицей.

Проведен анализ реального гироскопа на стадии его разгона, движение которого описывается системой вида (4) с полиномиальной матрицей [20]:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + (h+t)\dot{\beta} + k_{11}\alpha + k_{12}\beta = 0; \\ \ddot{\beta} - (h+t)\dot{\alpha} + k_{21}\alpha + k_{22}\beta = 0, \end{cases}$$

где α и β - малые углы отклонения оси гироскопа от некоторого невозмущённого положения, h - характеризует начальное значение вектора кинетического момента, слагаемые $(k_{11}\alpha + k_{12}\beta)$ и $(k_{21}\alpha + k_{22}\beta)$ - описывают действие позиционных сил. Найдены условиях устойчивости.

3. Исследованы также и более общие классы модельных систем, у которых матрица $A(t)$ имеет полиномиально периодическую структуру вида:

$$\dot{x} = \left(t^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) t^{-k}\right) x + f(x,t); \quad x(t_0) = x_0; \ \left(x, f \in R^n; \quad f(0,t) \equiv 0; \quad m \in N; \quad t \ge t_0 > 1\right), \ (3)$$

(где матричный ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) t^{-k}$ из T- периодических и достаточно гладких квадратных матриц $A_k(t)$ сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при $t \ge t_0 > 1$, функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega : \{|x| < R; \quad t \ge 1\}$) и матрица $A_0(t)$ различной стабильной жордановой структуры), которые более полно описывает работу некоторых типов гироскопических устройств, например, при наличии вибрирующего основания.

Доказаны теоремы о приводимости нового класса неавтономных систем дифференциальных уравнений с полиномиально периодической матрицей вида (3) к более простым эквивалентным системам с почти диагональной или «блочно диагональной» матрицей, что является обобщением некоторых работ Ляпунова А.М., позволяя получить достаточные конструктивные условия устойчивости или асимптотической устойчивости решения указанного класса систем нового поколения (3) с полиномиально периодической матрицей [4, 5, 6, 8, A].

Предложен алгоритм построения асимптотики решения (при $t \to +\infty$) для указанного нового класса линейных систем с полиномиально периодической матрицей.

Практическая значимость представленной работы.

Теоретическая и практическая значимость данной работы заключается в следующем.

1. Диссертантом разработаны эффективные аналитические и приближенные методы исследования большого класса теоретико-механических моделей гироскопических систем с периодической матрицей (при наличии малых возмущений), которые позволяют (путем развития и обобщения некоторых известных методов [3-18] в частности метода усреднения)

исследовать стационарные режимы работа некоторых классов гироскопических систем и получить конструктивные спектральные достаточные условия устойчивости [3, 6, 7, А].

2. Показано, что теоретико-механические модели гироскопических систем с полиномиальной матрицей реально описывают различные режима работы гироскопических устройств на стадии их разгона. Для их исследования диссертантом предложен конструктивный метод их анализа, в частности, доказан целый ряд теорем о приводимости данного класса систем дифференциальных уравнений к более простым эквивалентным системам, например, к системам дифференциальных уравнений с почти диагональной матрицей, более удобным для их дальнейшего исследования и получения конструктивных спектральных достаточных условий устойчивости их решения и указан эффективный метод их исследования [1, 2, А].

Предложен алгоритм построения асимптотики решения указанных линейных систем с полиномиальной матрицей.

3. Построен более содержательный класс новых теоретико-механических моделей гироскопических систем, реализуемых в виде неавтономных систем дифференциальных уравнений с полиномиально периодической матрицей для описания некоторых классов гироскопических систем на вибрирующем основании.

Доказан новый класс теорем о приводимости систем указанного типа к более простым эквивалентным системам дифференциальных уравнений с почти диагональной матрицей.

Разработан метод построения асимптотики линейных систем с полиномиально периодической матрицей [4, 5, 6, 8, А].

Приведены достаточные и конструктивные спектральные условия устойчивости тривиального решения указанного вида неавтономных линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений, что можно считать обобщением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению на новый класс неавтономных квазилинейных систем дифференциальных уравнений [3, 6, 16].

4. Приведенные в диссертации конструктивные алгоритмы анализа указанных выше неавтономных модельных систем дифференциальных уравнений могут являться основой для построения новых классов математических моделей, более удобных для качественного приближенного анализа гироскопических устройств, а также для более точного численного анализа.

5. Проведены расчёты и построены соответствующе графики, подтверждающие справедливость доказанных в работе теорем и обоснованность полученных при этом выводов.

Достоверность полученных результатов основана на корректной и обоснованной постановке большого класса математических и прикладных задач, относящихся к исследованию некоторых теоретико-механических моделей гироскопических систем с периодической, полиномиальной и полиномиально периодической матрицей, описывающих работу различных типов гироскопических, а также некоторых электромеханических устройств.

Справедливость полученных результатов также следует из точного описания и анализа исследуемых теоретико-механических моделей гироскопических систем.

Для доказательства приведенных в диссертации нетривиальных теорем были использованы строгие математические методы, являющие развитием и обобщением некоторых известных методов [3-18], а также разработанных в работе достаточно новых и более современных математических методов [1-8, А].

Апробация работы. Результаты исследований, представленных в диссертации, многократно докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, проводимых под эгидой РУДН и других ведущих университетов и академий, на семинарах под руководством проф. Севастьянова Л.А. и проф. Рыбакова Ю.П., под руководством проф. Саниной Е.И. и проф. Коняева Ю.А. (РУДН), на семинаре под руководством проф. Кудряшова Н.А. (МИФИ), на семинаре под руководством проф. Бутузова В.Ф. и проф.

Нефедова Н.Н. (МГУ, Физфак), а также на семинаре под руководством проф. Сафонова В.Ф. и проф. Бободжанова А.А.

Публикации. Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в различных научных журналах, в тезисах докладов научных Всероссийских и Международных конференций, список которых приведён в конце автореферата [1-8, А].

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа изложена на .... страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из …. названий работ.

Содержание диссертации

Во введении дается краткий, но достаточно содержательный обзор работ [3-18], посвящённых исследованию наиболее важных теоретико-механических моделей гироскопических систем, в основе которых лежат различные линейные и квазилинейные неавтономные системы дифференциальных уравнений, рассмотрены некоторые вопросы теории устойчивости.

В первой главе «Спектральный вариант метода усреднения при анализе гироскопических систем, описываемых регулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений с периодической матрицей» исследованы модельные неавтономные системы дифференциальных уравнений с периодической матрицей (при наличии малых возмущений) и приведен их теоретический анализ с доказательством теорем [3, 6, 7, А] об асимптотической приводимости систем дифференциальных уравнений к более простым эквивалентным системам с почти постоянной диагональной матрицей (с учетом последних вариантов метода расщепления [19-23] и метода усреднения [13, 15]).

Структура полученных более простых эквивалентных систем дифференциальных уравнений позволяет конструктивно проводить качественный и более точный численный анализ, включая вопросы устойчивости.

С помощью предложенных методов анализа регулярно возмущенных указанных неавтономных систем дифференциальных уравнений изучены конкретные типы гироскопических устройств и некоторые физические процессы [3, 6, 7, А].

Для удобства изложения (следуя методу расщепления [19-23]) для произвольной квадратной матрицы $A=\left\{a_{jk}\right\}_1^n=\left\{A_{jk}\right\}_1^p$ введем обозначения $\overline{A}=diag\left\{a_{11},...,a_{nn}\right\}$, $\overline{\overline{A}}=A-\overline{A}$, $\hat{A}=diag\left\{A_{11},...,A_{pp}\right\}$, $\hat{\hat{A}}=A-\hat{A}$ $\left(1<p<n\right)$.

Теорема 1.1. Рассмотрим неавтономную систему:

$$\dot{x}=A\left(t,\varepsilon\right)x+f\left(x,t\right);\qquad x\left(0,\varepsilon\right)=x_0;\quad \left(x,f\in R^n;\qquad f\left(0,t\right)\equiv 0;\qquad t\geq 0\right),\quad (1.3)$$

где матричный ряд $A\left(t,\varepsilon\right)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(t\right)\varepsilon^k$ из Т - периодических достаточно гладких матриц $A_k\left(t\right)$ сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме (при достаточно малых $\left|\varepsilon\right|<1$ и при $t\geq 0$) и матрица A_0 имеет простой спектр $\left\{\lambda_{0j}\right\}_1^n$, удовлетворяющий условиям:

$$\sigma_{jk}\equiv\lambda_{0j}-\lambda_{0k}\neq i2\pi qT^{-1};\qquad \left(j\neq k;\quad j,k=\overline{1,n};\quad q=0,\pm1,\pm2,...\right),\qquad (1.4)$$

и функция $f\left(x,t\right)$ является достаточно гладкой в области $\Omega:\left\{\left|x\right|\leq R;t\geq 0\right\}$.

Тогда система (1.3) может быть с помощью невырожденной при достаточно малых $\left|\varepsilon\right|<1$ Т-периодической замены:

$$x=S_0H_{(N)}\left(t,\varepsilon\right)z;\;\;(H_{(N)}\left(t,\varepsilon\right)=E+\sum_{k=1}^{N}H_k\left(t\right)\varepsilon^k\;;\;\;S_0^{-1}A_0S_0=\Lambda_0=diag\left\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\right\}),\qquad (1.5)$$

приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot{z}=Q(t,\varepsilon)z+g(z,t,\varepsilon); \qquad z(0,\varepsilon)=z_0; \quad (Q(t,\varepsilon)=\Lambda_{(N)}(\varepsilon)+\varepsilon^{N+1}G_{(N+1)}(t,\varepsilon); \tag{1.6}$$
$$\left\|G_{(N+1)}(t,\varepsilon)\right\|\le C;\ \Lambda_{(N)}(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\Lambda_k\varepsilon^k=diag\left\{\lambda_1(\varepsilon),...,\lambda_n(\varepsilon)\right\}; \qquad t\ge 0\ ),$$

где диагональные матрицы Λ_k и T-периодические матрицы $H_k(t)$ однозначно определяются с помощью простого итерационного алгоритма.

Теорема 1.2. Если в условиях теоремы 1.1 спектр $\left\{\lambda_j(\varepsilon)\right\}_1^n$ матрицы $\Lambda_{(N)}(\varepsilon)$ в системе (1.6) удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(\varepsilon)\le-\sigma_0\varepsilon^q$; $\left(j=\overline{1,n};\ \ \sigma_0>0;\ \ q=\overline{0,N}\right)$, и для функции $f(x,t)$ справедлива оценка $\left|f(x,t)\right|\le C_0|x|^{1+\alpha}$; $\left(C_0,\alpha>0;\ \ |x|<R;\ \ t\ge 0\right)$, тогда тривиальное решение системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1.3. Квадрат евклидовой нормы решения линейной неавтономной системы ОДУ $\dot{x}=A(t)x \quad \left(x\in R^n\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: $\dfrac{d|x|^2}{dt}=2\operatorname{Re}\left(x^*A(t)x\right)$.

С помощью нового алгоритма исследован ряд нетривиальных примеров.

Пример 1.1. Взаимодействие двух связанных линейных осцилляторов [6, с. 191] при отсутствии резонансов может быть описано системой уравнений:

$$\begin{cases}\ddot{x}+a^2x=2\varepsilon y\sin t;\\ \ddot{y}+b^2y=2\varepsilon x\cos t;\end{cases} \qquad \left(a,b\in R;\quad a,b>0;\quad a\ne b;\quad |a\pm b|\ne 1\right), \tag{1.15}$$

которая после замены: $x_1=x;\quad x_2=\dot{x};\quad x_3=y;\quad x_4=\dot{y};\quad z_{1,2}=x_2\pm iax_1;\quad z_{3,4}=x_4\pm ibx_3;$ приводится к эквивалентной системе вида (1.1): $\dot{z}=\left(\Lambda_0+\varepsilon A_1(t)\right)z;\ \left(z=\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)^T\right)$, где $\Lambda_0=diag\left\{ia,-ia,ib,-ib\right\}$; $\quad A_1(t)=\begin{pmatrix}0 & b^{-1}F\sin t\\ a^{-1}F\cos t & 0\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. В силу теоремы 1.1 с помощью замены вида (1.5) получим эквивалентную систему:

$$\dot{v}=Q(t,\varepsilon)v; \qquad v(0,\varepsilon)=v_0; \quad (Q(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}\Lambda_k\varepsilon^k+0\left(\varepsilon^3\right)),$$

где $\Lambda_1=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{A}_1(t)dt=0$ и матрица $\Lambda_2=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{P}_2(t)dt=diag\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\}$ имеет спектр:

$$v_1=v_2=-v_3=-v_4=\frac{1}{2ab}\left(\frac{1}{1-(a+b)^2}-\frac{1}{1-(a-b)^2}\right).$$

С учетом того, что матрица Λ_0 имеет чисто мнимый спектр, матрица $\Lambda_1=0$, а спектр матрицы Λ_2 имеет спектр разного знака, можно сделать вывод о неустойчивости решения системы (1.15).

Получены графики евклидовой нормы решения $z(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ системы (1.15) ($a=1$; $b=3$; $\varepsilon=0{,}1$) или ($a=1$; $b=5$; $\varepsilon=0{,}01$), отражающие неустойчивый характер решения (рис. 1а; рис. 1б), что подтверждает справедливость теоремы 1.1.

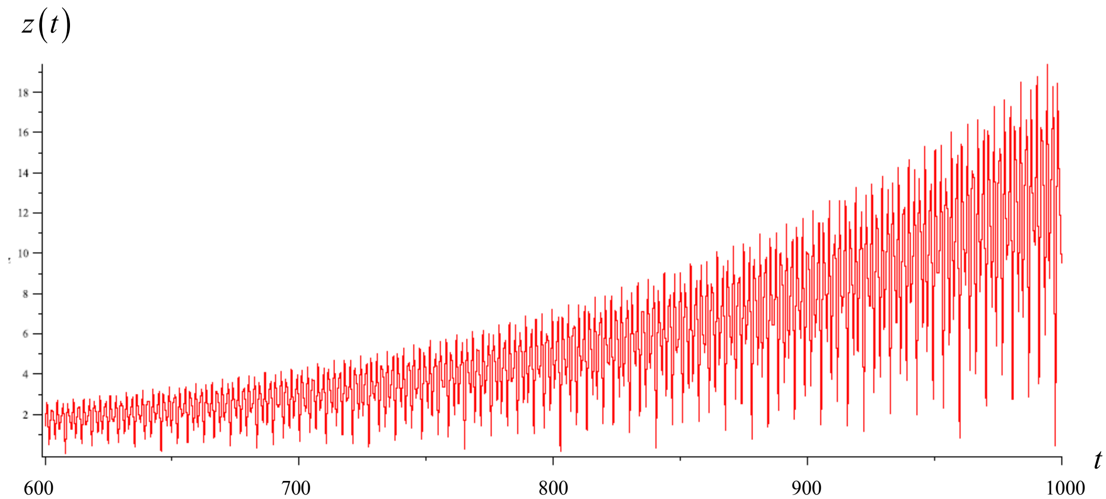

Рис. 1а. ($a = 1$; $b = 3$; $\varepsilon = 0,1$)

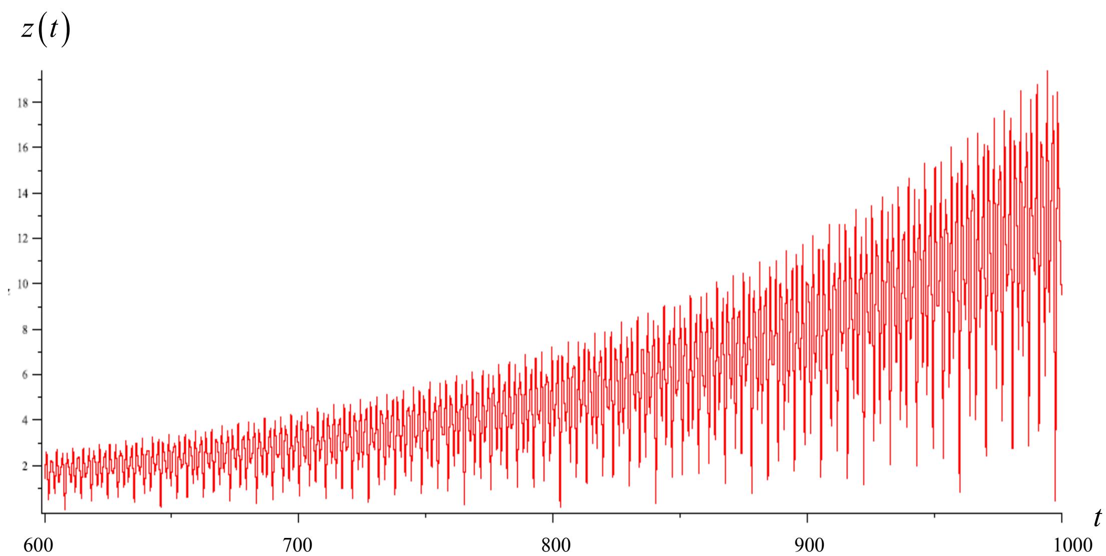

Рис. 1б. ($a = 1$; $b = 5$; $\varepsilon = 0,01$)

Пример 1.2. Стационарное вращение бесконтактного гироскопа в переменном магнитном поле [19] может быть описано с помощью линеаризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \left(\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x; \qquad \left(x \in R^2\right); \qquad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & -r(t) \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix}; \qquad (1.18)$$

$$p(t) = (1-\chi)\Omega \sin^2 \omega t + 0,5 i\omega(\xi - 1)\sin 2\omega t; \qquad r(t) = p(t) - \Omega \sin^2 \omega t;$$

$$\chi = I_1 / I_3; \qquad \xi = \alpha_3 / \alpha_1; \qquad \varepsilon = \alpha_1 H_0^2 / L > 0; \qquad \Omega = L / I_1,$$

где ω - частота магнитного поля, H_0 - амплитуда колебаний магнитного поля, Ω - частота нутационных колебаний тела, I_j - моменты инерции относительно его осей $(j = 1,2,3)$, ξ - величина, определяемая поляризуемостью тела относительно его осей, $\varepsilon > 0$ - безразмерный малый параметр.

В нерезонансном случае при $\Omega \neq 2\omega$ с учетом теоремы 1.1 после Т-периодической замены $x = \left(E + H_1(t)\right)y$; $\left(T = \pi / \omega\right)$ система (1.18) приводится к виду:

$$\dot{y} = \left(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + 0\left(\varepsilon^2\right)\right)y,\ \Lambda_0 = A_0; \qquad \Lambda_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{A}_1(t)\,dt = \frac{\Omega}{2I_3}\begin{pmatrix} I_1 - I_3 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}, \qquad (1.19)$$

позволяя сделать вывод об асимптотической её устойчивости, при $I_3 > I_1$, что следует из теоремы Ляпунова [6, 16].

Для анализа вращений гироскопа вблизи резонанса введем расстройку β, обозначив $\Omega = 2\omega + \varepsilon\beta$ ($\varepsilon > 0$ - малый параметр).

В этом случае после замены $x = \exp(\Lambda_0 t)v$ и обобщённого варианта теоремы 1.1 система (1.18) преобразуется к почти автономной системе:

$$\dot{z} = \left(\varepsilon C_1 + 0\left(\varepsilon^2\right)\right)z; \qquad C_1 = \begin{pmatrix} (1-\chi)\omega + i\beta & \frac{1}{4}\omega(1-\chi-\xi) \\ -\frac{1}{4}\omega(1-2\chi+\xi) & -\chi\omega \end{pmatrix},$$

что гарантирует устойчивость при выполнении неравенства:

$$\left(\frac{\chi - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{4+\zeta}{4(3+\zeta)}}}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{\sqrt{4+\zeta}}\right)^2 < 1; \qquad \left(\zeta = \frac{4\beta^2}{\omega^2} > 0\right).$$

Это позволяет сделать вывод, что стационарное движение гироскопа будет асимптотически устойчивым (вблизи резонанса) при $I_1 < 1{,}077 I_3$ при нулевой расстройке $(\beta = 0)$. При увеличении расстройки $(\beta > 0)$ мы имеем асимптотически устойчивое движение при $(I_1 < I_3, \quad \chi < 1)$.

Полученные выше результаты [3, 6, А] позволяют указать алгоритм построение асимптотики для решения соответствующих неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений с периодической матрицей, что дополняет известные ранее результаты [9-13].

Теорема 1.4. В условиях теоремы 1.1 асимптотика решения $(\varepsilon \to 0)$ линейной задачи Коши: $\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t)$; $x(0,\varepsilon) = x_0$; $\left(x, f \in R^n;\ t \ge 0\right)$, в случае, если спектр $\left\{\lambda_j(\varepsilon)\right\}_1^n$ матрицы $\Lambda_{(N)}(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\lambda_j(\varepsilon) \le -\sigma_0 < 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$, может быть представлена в форме:

$$x(t,\varepsilon) = S_0 H_{(N)}(t,\varepsilon) z_{(N)}(t,\varepsilon) + 0\left(\varepsilon^{N+1}\right); \qquad \left(z_{(N)}(t,\varepsilon) = e^{\Lambda_{(N)}(\varepsilon)t}\left(z_0(\varepsilon) + \int_0^t e^{-\Lambda_{(N)}(\varepsilon)s} g(s)\,ds\right)\right), \quad \text{где}$$

функции $\Lambda_{(N)}(\varepsilon)$ и $H_{(N)}(t,\varepsilon)$ определяются методами теоремы 1.1.

Далее исследован, случай, когда в системе вида (1.3) матрица A_0 имеет кратный спектр и полупростую структуру или эквивалентна матрице, имеющей верхне «блочно треугольную» структуру (теоремы 1.5-1.8).

Другие проблемы возникают в критическом случае, например, когда матрица $A_0 = 0$.

Теорема 1.9. Неавтономная квазилинейная система:

$$\dot{x} = \varepsilon A(t,\varepsilon)x + f(x,t); \quad x(0,\varepsilon) = x_0; \quad \left(x, f \in R^n; \quad f(0,t) \equiv 0\right), \qquad (1.42)$$

(где матричный ряд $A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ из достаточно гладких Т-периодических матриц $A_k(t) \quad (k \ge 0)$ сходится абсолютно и равномерно при достаточно малых $\varepsilon \quad \left(|\varepsilon| << 1\right)$, при

$t \ge 0$ и матрица $A_0(t)$ имеет произвольную жорданову структуру, а функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega: \{|x| < R;\ t \ge 0\}$), может быть с помощью невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon| << 1$ Т-периодической замены: $x = H_{(N)}(t,\varepsilon)\, y$; $H_{(N)}(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\varepsilon^k$ приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot{y} = \varepsilon B(t,\varepsilon)\, y + h(y,t); \qquad y(0,\varepsilon) = y_0, \qquad (1.44)$$

$$\left(B(t,\varepsilon) = B_{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1} G_{(N+1)}(t,\varepsilon); \qquad B_{(N)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} B_k \varepsilon^k; \qquad \left\| G_{(N+1)}(t,\varepsilon) \right\| \le C_1 \right),$$

где матрицы B_k и Т-периодические матрицы $H_k(t)$ $\left(k = \overline{1,N}\right)$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теорема 1.10. Если в условиях теоремы 1.9 для системы (1.42):

$$\dot{x} = \varepsilon A(t,\varepsilon)\, x + f(x,t); \quad x(0,\varepsilon) = x_0; \quad \left(x, f \in R^n; \quad f(0,t) \equiv 0\right),$$

и эквивалентной ей системы (1.44): $\dot{y} = \varepsilon B(t,\varepsilon)\, y + h(y,t); \qquad y(0,\varepsilon) = y_0$,

спектр $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $B_{(N)}(\varepsilon)$ в системе (1.44) удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(\varepsilon) \le -\sigma_0 \varepsilon^q$; $\left(j = \overline{1,n};\quad 0 \le q \le N;\quad \sigma_0 > 0\right)$ и для функции $f(x,t)$ в системе (1.42) справедлива оценка $|f(x,t)| \le C_2 |x|^{1+\alpha}$ ($\alpha, C_2 > 0;\ |x| < R;\ t \ge 0$), тогда тривиальное решение системы (1.42) асимптотически устойчиво.

Случаи, когда в системе вида (1.3) матрица A_0 эквивалентна некоторой жордановой матрице J_0, исследованы в теоремах 1.11 и 1.12.

Во второй главе «Асимптотический анализ теоретико-механических моделей гироскопических систем с полиномиальной матрицей» рассмотрены различные классы теоретико-механических моделей гироскопических систем с полиномиальной матрицей при наличии особенностей более общего вида, чем в работах [6, 16].

На основе одного из последних вариантов метода расщепления [19-23] доказаны нетривиальные теоремы и предложены алгоритмы асимптотического приведения исходной системы (с учетом спектральных характеристик определяющей матрицы A_0 различной жордановой структуры) к более простой эквивалентной системе с почти «диагональной» (или почти «блочно-диагональной») матрицей, что упрощает дальнейший приближенный качественный, или более точный численный анализ [1, 2, А].

К таким системам сводится большой класс уравнений гипергеометрического типа, включая уравнения Бесселя, Эрмита, Эйри и ряд других уравнений для специальных функций.

Доказаны аналоги теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению для указанного класса систем дифференциальных уравнений.

Разработан алгоритм построения асимптотики решения линейных систем указанного класса.

Теорема 2.1. Пусть неавтономная квазилинейная система с полиномиальной матрицей вида:

$$\dot{x} = t^m A(t)\, x + f(x,t); \quad x(t_0) = x_0; \quad \left(f, x \in R^n; \quad m \ge 0; \quad t \ge t_0 > 1; \quad f(0,t) \equiv 0\right), \qquad (2.1)$$

(где матричный ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-k}$ сходится абсолютно и равномерно при $t \ge t_0 > 1$, а функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega: \{|x| < R;\ t \ge t_0 > 1\}$), спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$

постоянной матрицы A_0 простой структуры удовлетворяет неравенствам $\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0; \quad \left(j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n} \right)$.

Тогда система (2.1) может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ замены $x = S_0 H_{(N)}(t) z$; ($S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\}$; $H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_k t^{-k}$) приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot{z} = t^m Q(t) z + g(z,t); \qquad z(t_0) = z_0; \tag{2.3}$$

$$(Q(t) = \Lambda_{(N)}(t) + t^{-N-m-1} G_{(N+m+1)}(t); \quad \Lambda_{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N+m} \Lambda_k t^{-k}; \quad \left\| G_{(N+m+1)}(t) \right\| \leq C)$$

где диагональные Λ_k и «бездиагональные» $\overline{\overline{H}}_k$ матрицы однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теорема 2.2. Если в условиях теоремы 2.1 для системы вида (2.3), спектр $\left\{ \lambda_j(t) \right\}_1^n$ матрицы $t^m \Lambda_{(N)}(t)$ ($\Lambda_{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda_k t^{-k}$) удовлетворяет дополнительным условиям $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\sigma_0 t^q$; ($q = \overline{0,m}$; $m \geq 0$; $j = \overline{1,n}$; $\sigma_0 > 0$; $t > t_0 > 1$) и для функции $f(x,t)$ справедлива оценка $\left| f(x,t) \right| \leq C_0 |x|^{1+\alpha}$; $\left(C_0, \alpha > 0; \quad |x| < R; \quad t > t_0 > 1 \right)$, тогда тривиальное решение системы (2.1) асимптотически устойчиво, а в случае $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq 0$; $\left(j = \overline{1,n}; \quad t > t_0 > 1 \right)$ или $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\sigma_0 t^{-q}$; ($N > q \geq 2$; $\sigma_0 > 0$; $j = \overline{1,n}$) тривиальное решение соответствующей однородной $\left(f \equiv 0 \right)$ системы (2.1) устойчиво, а при $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\sigma_0 t^{-1}$ ($\sigma_0 > 0$; $j = \overline{1,n}$) асимптотически устойчиво.

Результаты (теорем 2.1 и 2.2) позволили изучить малые колебания оси гироскопа на стадии его разгона.

Пример 2.1. Малые колебания оси гироскопа (на стадии его разгона) с переменным кинетическим моментом при наличии позиционных сил могут быть описаны [20] (при некоторых допущениях) теоретико-механической моделью с полиномиальной матрицей:

$$\left\{ \ddot{\alpha} + (h+t)\dot{\beta} + k_{11}\alpha + k_{12}\beta = 0; \quad \ddot{\beta} - (h+t)\dot{\alpha} + k_{21}\alpha + k_{22}\beta = 0 \right\} \tag{2.5}$$

где α и β - малые углы отклонения оси гироскопа от некоторого невозмущённого положения, h - характеризует начальное значение вектора кинетического момента, слагаемые $\left(k_{11}\alpha + k_{12}\beta \right)$ и $\left(k_{21}\alpha + k_{22}\beta \right)$ - описывают действие позиционных сил.

После обозначений: $x_1 = \alpha$; $\quad x_2 = \beta$; $\quad x_3 = \dot{\alpha}$; $\quad x_4 = \dot{\beta}$; $\quad x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 \right)^T$; система уравнений второго порядка (2.5) может быть записана в виде: $\dot{x} = \left(A_0 t + A_1 \right) x$, $\left(x \in R^4 \right)$, где матрицы A_0 и A_1 определяются равенствами: $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -K & hR \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$.

Для анализа применим обобщённый аналог теоремы 2.1, так как здесь мы имеем критический случай, ибо все точки спектра матрицы A_0 $\left(\lambda_{1,2} = 0; \quad \lambda_{3,4} = \pm i \right)$ лежат на мнимой оси при наличии двукратной нулевой точки спектра. При этом получаем систему:

$\dot{z}=\left(\Lambda_0 t+\Lambda_1+Q_2 t^{-1}+0\left(t^{-2}\right)\right)z$, где $\Lambda_0=S_0^{-1}A_0S_0=diag\{0,0,i,-i\}$; $\Lambda_1=h\Lambda_0$; $Q_2=\begin{pmatrix} Q_{21} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{22}\end{pmatrix}$;
$Q_{21}=\begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -k_{11} & -k_{12}\end{pmatrix}$; $\bar{Q}_{22}=\frac{1}{2}diag\left\{\left(\left(k_{12}-k_{21}\right)+i\left(k_{11}+k_{22}\right)\right),\left(\left(k_{12}-k_{21}\right)-i\left(k_{11}+k_{22}\right)\right)\right\}$.

Структура спектра матрицы Λ_0, Λ_1 и Q_2 даёт возможность сделать вывод об устойчивости малых колебаний оси гироскопа при условии $k_{12}=k_{21}$; $k_{11}k_{22}\geq k_{12}^2$ (см рис. 2).

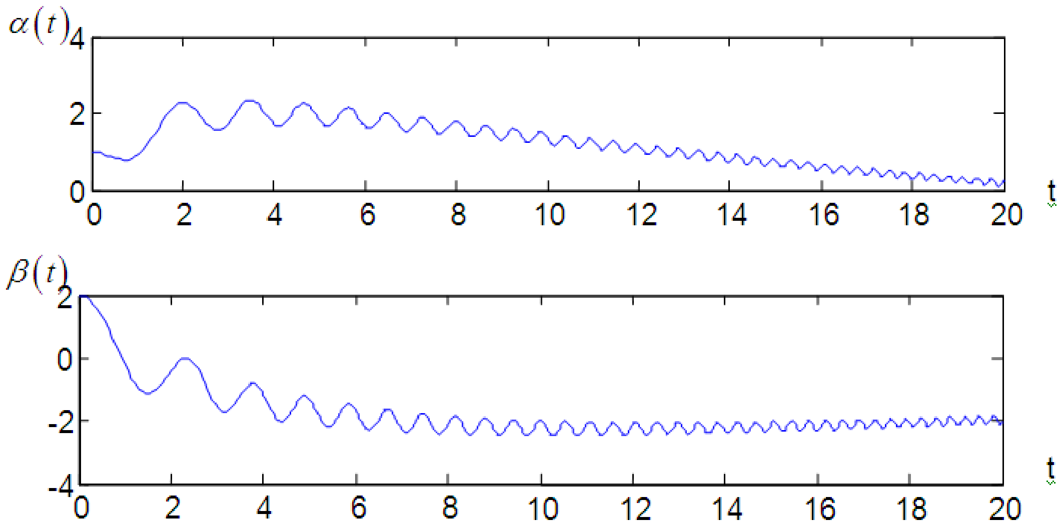

Рис. 2

График колебаний двух компонент ($\alpha(t)$ и $\beta(t)$) оси гироскопа при $h=1$; $k_{11}=1$; $k_{22}=2$; $k_{12}=k_{21}=1$.

Теорема 2.3. В условиях теоремы 2.1 асимптотика решения $(t\to+\infty)$ задачи Коши для линейной системы:

$$\dot{x}=t^m A(t)x+t^q f(t); \qquad x(t_0)=x_0; \qquad (2.9)$$

$$\left(A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k t^{-k}; \quad f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k t^{-k}; \quad x,f\in R^n; \quad m,q\geq 0; \quad t_0>1\right),$$

в случае, если спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $t^m\Lambda_{(N)}(t)$ удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\leq-\sigma_0<0$; $\left(t\geq t_0>1; \quad j=\overline{1,n}\right)$, может быть (при $m=q=0$) представлена в виде:

$$x(t)=S_0H_{(N)}(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda_{(N)}(s)ds\right)z_0+w_{(N)}(t)+0\left(t^{-N-1}\right);$$

$$\left(S_0^{-1}A_0S_0=\Lambda_0=diag\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\}; \quad H_{(N)}(t)=E+\sum_{k=1}^{N}\bar{\bar{H}}_k t^{-k}; \quad w_{(N)}(t)=\sum_{k=0}^{N}w_k t^{-k}\right)$$

где матрицы $\Lambda_{(N)}(t)$, $H_{(N)}(t)$ и векторная функции $w_{(N)}(t)$ однозначно определяются итерационным методом.

Принципиально другая ситуация при анализе системы (2.1) возникает, когда $m=-1$, или $m\leq-2$.

Теорема 2.4. Рассмотрим неавтономную квазилинейную систему:

$$\dot{x}=t^{-1}A(t)x+f(x,t); \quad x(t_0)=x_0; \quad \left(f,x\in R^n; \quad t\geq t_0>1; \quad f(0,t)\equiv 0; \quad m=-1\right), \quad (2.14)$$

(где матричный ряд $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k t^{-k}$ сходится абсолютно и равномерно при $t\ge t_0>1$ и функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области Ω: $\{|x|<R;\ t\ge 1\}$) в случае, когда спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет неравенствам:

$$\sigma_{jk}\equiv\lambda_{0j}-\lambda_{0k}\ne 0,\pm1,\pm2,...;\qquad \left(j\ne k;\qquad j,k=\overline{1,n}\right). \qquad (2.15)$$

Тогда система (2.14) может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t>t_0>1$ замены: $x=S_0H_{(N)}(t)z$; ($S_0^{-1}A_0S_0=\Lambda_0=diag\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\}$; $H_{(N)}(t)=E+\sum_{k=1}^{N}H_k t^{-k}$) приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot z=t^{-1}Q(t)z+g(z,t);\ z(t_0)=z_0;\left(Q(t)=\Lambda_0+t^{-N-1}G_{(N+1)}(t);\ \left\|G_{(N+1)}(t)\right\|\le C;\ (N\ge1)\right), \quad (2.16)$$

где матрицы H_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теорема 2.5. Если в условиях теоремы 2.4 (при $m=-1$ и $N\ge1$) спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет условиям (2.15) и неравенствам: $\operatorname{Re}\lambda_{oj}<-\sigma_0<0$; $\left(j=\overline{1,n}\right)$, тогда тривиальное решение однородной $(f\equiv0)$ системы (2.14) асимптотически устойчиво, а в случае $\operatorname{Re}\lambda_{0j}\le 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ устойчиво.

Теорема 2.6. Неавтономная система (2.1) при $m\le-2$ $(n=-m\ge2)$:

$$\dot x=t^{-n}A(t)x+f(x,t);\quad x(t_0)=x_0;\ \left(f,x\in R^n;\quad n=-m\ge2;\quad t\ge t_0>1;\quad f(0,t)\equiv0\right), \quad (2.18)$$

может быть приведена при наличии матрицы A_0 произвольной жордановой структуры с помощью невырожденной при достаточно больших $t>t_0>1$ замены $x=H_{(N)}(t)z$; ($H_{(N)}(t)=E+\sum_{k=n}^{N}H_k t^{-k}$) к системе вида:

$$\dot z=t^mB(t)z+g(z,t);\quad z(t_0)=z_0;\quad \left(B(t)=A_0+G_{(N+1)}(t)t^{-N-1};\quad g(0,t)\equiv0;\quad N\ge2\right), \quad (2.19)$$

где матрицы H_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$ определяются по итерационной схеме.

Теорема 2.7. В условиях теоремы 2.6 $(m\le-2)$ тривиальное решение однородной $(f\equiv0)$ системы (2.18) всегда устойчиво.

Дальнейшее исследование системы вида (2.1) в случае, когда матрица A_0 имеет кратный спектр и полупростую структуру или эквивалентна «верхней блочно треугольной» матрице F_0, приведено в теоремах 2.8-2.14.

В третьей главе «Исследование теоретико-механических моделей гироскопических систем с полиномиально периодической матрицей» разработаны аналитические и асимптотические методы анализа теоретико-механических моделей гироскопических систем с полиномиально периодической матрицей при наличии у матрицы $A_0(t)$ простого или кратного стабильного спектра и фиксированной жордановой структуре [4, 5, 6, 8, A].

В отличие от известного предложен конструктивный метод приведения данных неавтономных систем к более простым эквивалентным системам с почти «диагональной» или «блочно диагональной» матрицей, что дает возможность для их дальнейшего, качественного и более точного численного анализа, для формулировки конструктивных эффективных достаточных условий устойчивости или асимптотический устойчивости их тривиального решения, что дополняет или обобщает известные ранее результаты [19-23].

Предложенный новый класс таких систем может более полно описывать поведение некоторых классов гироскопических систем на вибрирующем основании.

Построена асимптотика решения некоторых линейных систем указанного класса.

Теорема 3.1. Пусть неавтономная квазилинейная система с полиномиально периодической матрицей вида:

$$\dot{x} = t^m A(t)x + f(x,t); \quad x(t_0) = x_0; \quad \left(x, f \in R^n; \qquad m \geq 1; \qquad t_0 > 1; \qquad f(0,t) \equiv 0\right), \quad (3.1)$$

(где матричный ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) t^{-k}$ из T-периодических и достаточно гладких квадратных матриц $A_k(t)$ сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при $t \geq t_0 > 1$ и функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega: \{|x| < R;\ t \geq 1\}$), и спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет неравенствам $\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0$; $\left(j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n}; \quad t \geq t_0 > 1\right)$.

Тогда система (3.1) может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ полиномиально периодической замены: $x = S_0(t) H_{(N)}(t) z$; ($S_0^{-1}(t) A_0(t) S_0(t) = \Lambda_0(t) = diag\{\lambda_{01}(t), ..., \lambda_{0n}(t)\}$; $H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_k(t) t^{-k}$; $N \geq 1$) приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot{z} = t^m Q(t) z + g(z,t); \qquad z(t_0) = z_0; \qquad (3.4)$$

$$\left(Q(t) = \Lambda_{(N)}(t) + t^{-N-1} G_{(N+1)}(t); \qquad \Lambda_{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k(t) t^{-k}; \qquad \left\|G_{(N+1)}(t)\right\| \leq C; \quad N \geq m\right),$$

где диагональные $\Lambda_k(t)$ и «бездиагональные» $\overline{\overline{H}}_k(t)$ $\left(k = \overline{1,N}\right)$ T-периодические матрицы однозначно определяются итерационным методом.

Теорема 3.2. Если в условиях теоремы 3.1 $(m \geq 1)$ спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $\left(t^m \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda_k(t) t^{-k}\right)$ удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leq -\sigma_0 t^q + \varphi(t)$; ($j = \overline{1,n}$; $q = \overline{0,m}$; $m \geq 1$; $\sigma_0 > 0$; $a(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \leq C$) и для функции $f(x,t)$ справедлива оценка $|f(x,t)| \leq C_0 |x|^{1+\alpha}$ $\left(\alpha, C_0 > 0; \quad |x| \leq R; \quad t \geq t_0\right)$, тогда тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво, а в случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leq \varphi(t)$; ($j = \overline{1,n}$; $a(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \leq C$; $t \geq t_0$), тривиальное решение соответствующей однородной $(f \equiv 0)$ системы вида (3.1) устойчиво.

Теорему 3.1 можно считать обобщением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению [4, 14] на данный класс систем.

Теорема 3.3. В условиях теоремы 3.1 асимптотика решения $(t \to +\infty)$ задачи Коши для линейной однородной системы: $\dot{x} = t^m A(t) x$; $x(t_0) = x_0$; ($t_0 > 1$; $m \geq 1$), в случае, если спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ вспомогательной матрицы $t^m \Lambda_{(N)}(t)$ удовлетворяет неравенствам:

$\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leq -\sigma_0 + \varphi(t)$ ($\sigma_0 > 0$; $a(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \leq C$; $j = \overline{1,n}$), может быть представлена в виде:

$$x(t)=S_0(t)H_{(N)}(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}s^m\Lambda_{(N)}(s)\,ds\right)x_0+0\left(t^{-N-1}\right);$$

($S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t)=\Lambda_0(t)=diag\left\{\lambda_{01}(t),...,\lambda_{0n}(t)\right\}$; $H_{(N)}(t)=E+\sum_{k=1}^{N}\bar{\bar{H}}_k(t)t^{-k}$; $N\geq 1$),

где матрицы $\Lambda_k(t)$ и $\bar{\bar{H}}_k(t)$ определяются единственным образом.

Теорема 3.4. Пусть неавтономная квазилинейная система (при $m=0$) с полиномиально периодической матрицей вида (3.1):

$$\dot{x}=A(t)x+f(x,t);\qquad x(t_0)=x_0;\ \left(x,f\in R^n;\qquad t_0>1;\qquad f(0,t)\equiv 0\right),\qquad (3.13)$$

(где матричный ряд $A(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)t^{-k}$ из Т-периодических и достаточно гладких квадратных матриц $A_k(t)$ $(k\geq 1)$ сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при $t\geq t_0>1$ и функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega:\ \left\{|x|<R;\ t\geq 1\right\}$) и спектр $\left\{\lambda_{0j}\right\}_1^n$ постоянной матрицы A_0 удовлетворяет неравенствам $\sigma_{jk}\equiv\lambda_{0j}-\lambda_{0k}\neq i\dfrac{2\pi q}{T}$; ($j\neq k$; $j,k=\overline{1,n}$; $q=0;\pm 1;\pm 2;\dots$).

Тогда система (3.13) может быть с помощью невырожденной (при достаточно больших $t>t_0>1$) полиномиально периодической замены: $x=S_0H_{(N)}(t)z$; ($S_0^{-1}A_0S_0=\Lambda_0=diag\left\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\right\}$; $H_{(N)}(t)=E+\sum_{k=1}^{N}H_k(t)t^{-k}$; $N\geq 1$) приведена к эквивалентной системе вида: $\dot{z}=Q(t)z+g(z,t)$; $\quad z(t_0)=z_0$;

$$\left(Q(t)=\Lambda_{(N)}(t)+t^{-N-1}G_{(N+1)}(t);\quad \Lambda_{(N)}(t)=\sum_{k=0}^{N}\Lambda_k t^{-k};\quad \left\|G_{(N+1)}(t)\right\|\leq C\right),$$

где диагональные матрицы Λ_k и Т-периодические матрицы $H_k(t)$ $\left(k=\overline{1,N}\right)$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теорема 3.5. Если в условиях теоремы 3.4 спектр $\left\{\lambda_j(t)\right\}_1^n$ матрицы $\Lambda_{(1)}(t)=\Lambda_0+\Lambda_1t^{-1}$ удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\leq-\sigma_0<0$; $\left(j=\overline{1,n}\right)$, и для достаточно гладкой функции $f(x,t)$ справедлива оценка: $\left|f(x,t)\right|\leq C_0|x|^{1+\alpha}$; $\left(\alpha,C_0>0;\ |x|<R;\ t\geq t_0\right)$, тогда тривиальное решение неавтономной квазилинейной системы (3.13) асимптотически устойчиво, а в случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\leq 0$; $\left(j=\overline{1,n}\right)$ тривиальное решение соответствующей однородной $(f\equiv 0)$ системы (3.13) устойчиво.

Теорема 3.6. Неавтономная квазилинейная система вида:

$$\dot{x}=t^{-1}A(t)x+f(x,t);\quad x(t_0)=x_0;\ \left(x,f\in R^n;\quad t>t_0>1;\quad f(0,t)\equiv 0;\quad m=-1\right),\quad (3.22)$$

(где полиномиально периодический матричный ряд $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(t)t^{-k}$ из Т - периодических и достаточно гладких квадратных матриц $A_k(t)$ сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при $t\geq t_0>1$ и функция $f(x,t)$ является достаточно гладкой в области $\Omega:\ \left\{|x|<R;\ t\geq 1\right\}$), при наличии у матрицы $A_0(t)$ произвольной жордановой структуры может быть приведена с помощью невырожденной при достаточно больших $t>t_0>1$

полиномиально периодической замены $x = H_{(N)}(t)\,y;$ $\left(H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\, t^{-k} \right)$, к эквивалентной системе вида:

$$\dot{y} = t^{-1}B(t)\,y + h(y,t);\ \ y(t_0) = y_0;\ (B(t) = \sum_{k=0}^{N} B_k t^{-k} + t^{-N-1}G_{(N+1)}(t);\ \left\| G_{(N+1)}(t) \right\| \le C;\ N \ge 2), \quad (3.24)$$

где Т-периодические матрицы $H_k(t)$ и матрицы B_k $\left(k = \overline{1,N}\right)$ определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теоремы 3.4 и 3.6 можно считать в некотором смысле обобщением метода усреднения [11, 13].

Теорема 3.7. Если в условиях теоремы 3.6, в системе (3.24) при $m = -1$ матрица B_0 имеет простой спектр $\left\{ \lambda_{0j} \right\}_1^n$, удовлетворяющий неравенствам: $\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \ne 0; \pm 1; \pm 2; ...$ $\left(j \ne k;\ \ j,k = \overline{1,n} \right)$, тогда с помощью невырожденного при достаточно больших $t > t_0 > 1$ полиномиального преобразования $y = S_0 H_{(N)}(t)\,z;$ ($S_0^{-1} B_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\left\{ \lambda_{01}, ..., \lambda_{0n} \right\};$ $H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=0}^{N} H_k t^{-k}$; $N \ge 1$), система (3.24) может быть приведена к эквивалентной системе вида:

$$\dot{z} = t^{-1}Q(t)\,z + g(z,t);\quad z(t_0) = z_0;\quad \left(Q(t) = \Lambda_0 + t^{-N-1}G_{(N+1)}(t);\qquad \left\| G_{(N+1)}(t) \right\| \le C \right), \quad (3.28)$$

где постоянные матрицы H_k однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Теорема 3.8. Если в условиях теоремы 3.6 (при $m = -1$) у преобразованной системы (3.24) спектр $\left\{ \lambda_{0j} \right\}_1^n$ матрицы B_0 произвольной жордановой структуры удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\lambda_{0j} \le -\sigma_0 < 0;$ $\left(j = \overline{1,n} \right)$, тогда тривиальное решение однородной $(h \equiv 0)$ системы (3.24) при $(m = -1)$ и эквивалентной однородной $(f \equiv 0)$ системы (3.22) асимптотически устойчиво.

Замечание. Если в условиях теоремы 3.8 матрица B_0 имеет простой спектр $\left\{ \lambda_{0j} \right\}_1^n$, удовлетворяющий условиям $\operatorname{Re}\lambda_{0j} \le 0$ $\left(j = \overline{1,n} \right)$, тогда тривиальное решение однородной $(h \equiv 0)$ системы (3.24) и эквивалентной ей системы (3.22) асимптотически устойчиво.

Теорема 3.9. Неавтономная однородная система вида (3.1) (при $m \le -2;\ \ n = -m \ge 2$):

$$t^n \dot{x} = A(t)\,x;\qquad x(t_0) = x_0;\ \left(x \in R^n;\ \ n = -m \ge 2;\ \ t_0 > 1 \right), \qquad (3.32)$$

при наличии у матрицы $A_0(t)$ произвольной жордановой структуры, может быть приведена с помощью невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ полиномиально периодической замены $x = H_{(N)}(t)\,y;$ ($H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=n}^{N} H_k(t)\, t^{-k};\ \ N > n \ge 2$) к эквивалентной системе вида: $t^n \dot{y} = B(t)\,y;\ \ y(t_0) = y_0;$ ($B(t) = \sum_{k=0}^{N} B_k t^{-k} + t^{-N-1}G_{(N+1)}(t);$ $\left\| G_{(N+1)}(t) \right\| \le C;$ $N > n \ge 2$), где Т-периодические матрицы $H_k(t)$ $\left(k = \overline{n,N} \right)$ и матрицы B_k $\left(k = \overline{1,N} \right)$ определяются с помощью итерационного алгоритма.

Замечание. В случае, когда $m \le -2$, тривиальное решение однородной неавтономной системы вида (3.32) всегда устойчиво.

Проведено также исследование для системы вида (3.35) при $m \ge 1$ и $m = 0$ в случае, когда матрица $A_0(t)$ имеет кратный спектр и полупростую структуру или эквивалентно «верхней блочно треугольной» матрице (теоремы 3.10-3.15).

Лемма. Квадрат евклидовой нормы решения неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(x,t)x,\quad x(0) = x_0 \quad (t \ge 0) \tag{3.58}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d|x|^2}{dt} = 2\,\mathrm{Re}\left(x^* A(x,t)x\right).$$

Теорема 3.16. Для квазилинейной автономной системы вида:

$$\dot{x} = A(x,t)x,\quad x(0) = x_0 \tag{3.59}$$

с непрерывной нелинейой нормальной в области $\Omega:\{|x| < R;\quad t \ge 0\}$.

Если спектр $\left\{\lambda_{A_j}(x,t)\right\}_1^n$ матрицы $A(x,t)$ в системе (3.59) удовлетворяет неравенствам:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(\varepsilon) \le \varphi_A(t) \quad \left(a(t) = \int_0^t \varphi_A(s)\,ds;\ |x| \le R;\ j = \overline{1,n};\ t \ge 0\right), \tag{3.60}$$

то решения системы (3.59) устойчиво при $a(t) \le C \quad (t \ge 0)$ и асимптотически устойчиво при $a(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$.

Замечания:

Для систем вида (3.59) с кососимметрической матрицей имеет место оценка $|x(t)| \le |x_0|$, так как $\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(\varepsilon) \equiv 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$.

В условии (3.60), равенство $\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(\varepsilon) = \varphi_A(t)$, ($j = \overline{1,n}$) переходит в равенство к оценкам $|x(t)| = |x_0|\exp\left(a(t)\right)$.

Рассмотрим еще два примера из теории гироскопов, описываемых системами с нормальной матрицей.

Пример 3.1. Проанализируем модельную систему ОДУ, описывающую малые колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа [11] с системой поддерживающих торсионов без учета демпфирования, имеющую нормальную нелинейную кососимметрическую матрицу $B(x,t)$:

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon}{8}B(x,t)x,\quad B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & -p & q & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ -q & 0 & 0 & -p \\ 0 & -q & p & 0 \end{pmatrix};\ x(0,\varepsilon) = x_0,$$

здесь $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $p = 3\xi|x|^2$, $q = 4\nu - \varepsilon b$, $b = 2(x_1x_4 - x_2x_3)$, коэффициент отражает наличие нелинейной упругости материала, ν - безразмерная угловая скорость основания гироскопа.

В работе [11] используются классические методы исследования устойчивости гироскопической системы. Однако основываясь на предложенном в данной алгоритме, можно сразу сделать вывод об устойчивости системы, избегая громоздких выкладок, т.к. нелинейная нормальная матрица $B(x,t)$, являясь в данном случае кососимметрической, имеет чисто мнимый спектр [25] при этом $|x(t,\varepsilon)| = |x_0|$.

Пример 3.2. В работе [10] показано, что малые колебания пространственного гирогоризонткомпаса описывается модельной линеаризованной неавтономной системой:

$$\dot{x} = A(t)x; \qquad x(0) = x_0; \qquad \left(x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^T\right)$$

с нормальной кососимметрической периодической матрицей:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & \Omega(t) \\ -\omega_0 & 0 & \Omega(t) & 0 \\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\omega_0 \\ -\Omega(t) & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

где имеют место обозначения:

$$x_1 = \delta_1 \frac{v(t)}{\sqrt{gR}}; \qquad x_2 = \delta_2; \qquad x_3 = \delta_3; \qquad x_4 = 2B\delta_4 \frac{\sin\varepsilon_0}{m\ell\sqrt{gR}}.$$

$v(t)$ - абсолютная скорость точки подвеса; R - радиус Земли; $\Omega(t)$ - проекция абсолютной угловой скорости чувствительного элемента гирогоризонткомпаса на направление геоцентрической вертикали; $\omega_0 = \sqrt{g/R}$; $B, m, \ell, \varepsilon_0$ - постоянные величины, определяемые конструкцией гирогоризонткомпаса; δ_j $(j = 1,2,3,4)$ - углы ориентации осей чувствительного элемента в неподвижной системе координат.

Данное модельное уравнение исследовано в работе [10] с помощью достаточно громоздкого метода и доказана устойчивость его решения при этом $|x(t)| = |x_0|$.

Один из важнейших выводов, который следует из нашей работы: линеаризация задач теории (в общем случае – нелинейных) колебаний приводит к отсутствию устойчивых состояний движения в зонах (областях) резонанса, что означает, по сути, потерю таких решений. Более того: идеи линеаризации абсолютно неприменимы для решения многих проблем, с которыми физика постоянно сталкивалась и продолжает сталкиваться. Вместе с тем данная проблема периодически возникает при решении различных прикладных задач в различных областях техники, механики, физики, электроники, биологии и медицины. Например, это следующие задачи: бесконтактное ориентирование, удержание и управление микрообъектов; селективное разделение различных порошков; взвешивание, удержание и перемещение различных объектов (одиночных молекул, гироскопов, транспорта на магнитном подвесе); получение автономных, устойчивых, осциллирующих систем, в частности: устойчивой плазмы, устойчивых треков мод в нестационарных тонкопленочных и жидкостных волноводах и др. Именно с этой точки зрения развитый нами метод исследования теоретико-механических моделей гироскопических систем, несомненно, является очень перспективным.

Следовательно, можно констатировать, что в настоящей диссертации представлен новый метод исследования задач теории линейных и квазилинейных колебаний в зонах близких к резонансу, позволяющий найти устойчивые состояния движения некоторых динамических систем в этих областях. Этим определяется актуальность, новизна и практическая значимость настоящей работы.

Заключение. В диссертации получены и обоснованы следующие результаты.

1. Предложен новый метод исследования теоретико-механических моделей гироскопических устройств и соответствующих систем дифференциальных уравнений с T-периодической матрицей (при наличии малых возмущений) и другой класс систем с полиномиальной и полиномиально периодической матрицей, описывающих различные режимы работы гироскопических систем.

2. Полученные в работе результаты является следствием анализа теорем о почти приводимости исследуемых систем уравнения их движения. Это позволило получить

достаточные условия устойчивости или асимптотической устойчивости решения указанного класса систем.

3. Для каждого класса исследуемых теоретико-механических моделей гироскопических линейных систем построены асимптотические представления их движения.

Публикации автора по теме диссертационной работы

1. ***Нгуен Вьет Хоа.*** Об асимптотической приводимости некоторых классов модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиполиномиальной матрицей // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2012. №2. с. 12-17.
2. *Коняев Ю.А., Мергия В.Б.,* ***Нгуен Вьет Хоа****.* О регулярных и сингулярных возмущенных модельных системах ОДУ полиномиального типа с особенностями // Вестник РУДН, серия: Математика. Информатика. Физика. 2012. №3. с. 20-24.
3. ***Нгуен Вьет Хоа.*** Алгебраические методы приводимости регулярно возмущенных модельных линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник РУДН, серия: Математика. Информатика. Физика. 2013. №2. с. 22-27.
4. ***Нгуен Вьет Хоа.*** Аналитические методы исследования устойчивости линейных и квазилинейных систем с полиномиально периодической матрицей // Вестник РУДН. серия: Математика. Информатика. Физика. 2013. №4. с. 18-23.
5. Konyaev Yu.A., Salimova A.F., **Nguyen Viet Khoa**. The Algorithm of Reducibility of Inhomogeneous Systems with Polynomially Periodic Matrix on the Basis of Spectral Method // Bulletin of PFUR. Series Mathematics. Information. Sciences. Physics. 2013. №4. c. 11-17.
6. *Коняев Ю.А.,* ***Нгуен Вьет Хоа****.* Спектральный анализ некоторых классов неавтономных систем с периодической и полиномиально периодической матрицами // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2014. Том 3. №3. с. 1-7.
7. ***Нгуен Вьет Хоа.*** Спектральной вариант метода усреднения для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической матрицей // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». РУДН. 2012. с 356-358.
8. ***Нгуен Вьет Хоа.*** Об устойчивости квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиально периодической матрицей // Сборник научных трудов участников международной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании». Москва. РУДН. 2013. с. 407 – 412.

Список цитируемой литературы

1. *Лунц Я.Л.* Введение в теорию гироскопов. – М.: Наука. 1972. 296 с.
2. *Николаи Е.Л.* Теория гироскопов. – Л., М.: ОГИЗ. Гос. Издат. Технико-теоретической литературы. 1948. 171 с.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. - М. Л.: ОНТИ. 1935. 386 с.
4. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука. 1987. 304 с.
5. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. - М.: Мир. 1984. 536 с.
6. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. - М.: Наука. 1971. 288 с.
7. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и её приложенния к вопросам устойчивости. - М.: Наука. 1966. 756 с.
8. *Воробьев В.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Погрешности волнового твердотельного гироскопа при учете нелинейных колебаний резонатора // Гироскопия и навигация. 2005. № 1 (48). С. 15-21.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука. 1972. 720 с.
10. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. - М.: Наука. 1976. 670 с.

11. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. - М.: Физматлит. 2009. 228 с.
12. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: МИР. 1998. 464 с.
13. *Волосов В.М., Моргунов Б.К.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. - М.: МГУ. 1971.
14. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. - М.: Наука. 1974. 336 с.
15. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. - М.: Наука. 1986. 256 с.
16. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука. 1998. 480 с.
17. *Донник А.С., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Влияние поступательной вибрации основания на динамику волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2007. № 1. С. 63-68.
18. *Коул Дж.* Методы возмущёний в прикладной математике. - М.: Мир. 1972. 276 с.
19. *Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г.* Об устойчивости стационарных вращений симметричного твердого тела в переменном магнитном поле // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 3. С. 375-381.
20. *Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г.* Исследование устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений квазиполиномиального типа // «Дифференциальные уравнения». 1999. Т. 34. № 10. С. 1427-1429.
21. *Коняев Ю.А.* Асимптотические и аналитические методы решения некоторых классов прикладных модельных задач. М.: Изд-во РУДН. 2005. 160 с.
22. *Коняев Ю.А.* О некоторых методах исследования устойчивости // «Математический сборник». 2001. Т. 192. № 3. С. 65-82.
23. *Коняев Ю.А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // «Математический сборник». 1993. Т. 184. № 12. С. 133-144.
24. *Широносов В.Г.* **Резонанс в физике, химии и биологии**. – Ижевск. Издательский дом “Удмуртский университет”, 2000/01. 92 с.
25. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука. 1978. 280 с.

АННОТАЦИЯ

Нгуен Вьет Хоа

Спектральные методы исследования теоретико-механических моделей гироскопических систем

Представленная работа посвящена исследованию различных (в том числе и отличных от ранее известных) теоретико-механических моделей современных гироскопических устройств и некоторых электромеханических систем, реализуемых в виде линейных и квазилинейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической матрицей (при наличии малых возмущений), а также нового класса систем с полиномиальной и полиномиально периодической матрицей.

ABSTRACT

Nguyen Viet Khoa

Spectral methods for studying the theoretical-mechanical models of gyroscopic systems

This work is devoted to the study of various (including other than previously known) theoretical and mechanical models of modern gyroscopic devices and some electromechanical systems, implemented in the form of linear and quasi-linear non-autonomous systems of ordinary differential equations with periodic matrix (in the presence of small perturbations), as well as new class of systems with polynomial and polynomially periodic matrix.