На правах рукописи
УДК 517.95

Сипайло Павел Андреевич

СЛЕДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва - 2020

Работа выполнена в математическом институте им. С.М. Никольского
факультета физико-математических и естественных наук
Российского университета дружбы народов.

Научный руководитель: Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н.,
профессор Математического института им. С.М. Никольского
Российского университета дружбы народов

Официальные оппоненты: Данилов Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н.,
профессор-исследователь
Департамента прикладной математики
Московского института прикладной математики
Высшей школы экономики

Кордюков Юрий Аркадьевич, д.ф.-м.н.,
ведущий научный сотрудник
Института математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук

Шафаревич Андрей Игоревич, д.ф.-м.н.,
профессор, член-корреспондент РАН,
декан Механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 15.12.2020 в 15.30 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.003 на базе Российского университета дружбы народов, расположенного по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 219.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 (отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу) или на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru/.

Автореферат разослан 13 ноября 2020г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Актуальность темы

След оператора на подмногообразии[1,2] — центральное понятие *относительной эллиптической теории*[3,4], т.е. теории операторов на гладком многообразии, на котором в качестве дополнительной структуры выделено некоторое подмногообразие. По своему происхождению относительная теория восходит к одной важной задаче в теории дифференциальных уравнений с частными производными (и по-прежнему находит в ней одно из своих главных применений) — *задаче Соболева*[5,6], которая ставится как (псевдо)дифференциальная задача на гладком замкнутом многообразии с граничными условиями, заданными на некотором подмногообразии произвольной коразмерности. Конструкция следа оператора оказывается ключевой при исследовании такой задачи — а именно, следы возникают при сведении её на границу (в частности, участвуют в формулировке условий её фредгольмовости). Здесь одним из первых результатов явилось наблюдение о том, что след псевдодифференциального оператора на подмногообразии снова является псевдодифференциальным оператором, и это позволило построить эллиптическую теорию задач Соболева в достаточно завершённом виде. Однако в ситуации, когда граничные условия отличаются от псевдодифференциальных (являются нелокальными)[7,8] или когда на граничном подмногообразии имеются особенности[9,10,11,12], следы на подмногообразии могут оказаться операторами совсем иной природы, чем псевдодифференциальные. Например, след на подмногообразии оператора сдвига (при некоторых условиях типа трансверсальности) является сосредоточенным на инвариантном относительно отображения сдвига подпространстве. (Оператор называется сосредоточенным на заданном множестве, если он является компактным вне любой окрестности этого множества.) Таким образом, следы нелокальных операторов требуют дополнительных исследований.

Одним из наиболее широких классов операторов на гладких многообразиях (включающим в себя и псевдодифференциальные операторы как частный случай) являются *интегральные*

---

[1] Новиков С.П. и Стернин Б.Ю., “Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория,” *Докл. АН СССР,* 170:6, 1966, 1265–1268.

[2] Новиков С.П. и Стернин Б.Ю., “Эллиптические операторы и подмногообразия,” *Докл. АН СССР,* 171:3, 1966, 525–528.

[3] Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е., “Относительная эллиптическая теория и задача Соболева,” *Матем. сборник,* 187:11, 1996, 115–144.

[4] Nazaikinskii V.E. and Sternin B.Yu., “Relative elliptic theory,” *Aspects of boundary problems in analysis and geometry,* Operator Theory: Advances and Applications, 151, eds. Gil, Juan (ed.) et al., Birkhäuser, Basel, 2004, 495–560.

[5] Стернин Б.Ю., “Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности,” *Труды Моск. Мат. общ-ва,* 15, 1966, 346–382.

[6] Стернин Б.Ю., “Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева,” *Докл. АН СССР,* 230:2, 1976, 287–290.

[7] Нгуен Л.Л., “Задачи Соболева для действий конечных групп,” *Труды МФТИ,* 4:4, 2012, 125–133.

[8] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., “О нелокальных задачах Соболева,” *Докл. АН*, 451:3, 2013, 259–263.

[9] Стернин Б.Ю., *Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями,* МИЭМ, Москва, 1974.

[10] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., “Эллиптические трансляторы на многообразиях с точечными особенностями,” *Дифф. уравн.,* 48:12, 2012, 1612–1620.

[11] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., “Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями,” *Дифф. уравн.*, 49:4, 2013, 513–527.

[12] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., “Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями,” *Дифф. уравн.*, 50:2, 2014, 229–241.

операторы Фурье[13,14,15,16,17] (далее — ИОФ). Помимо псевдодифференциальных операторов (далее — ПДО) этот класс содержит операторы, индуцированные отображениями многообразий (такие как оператор ограничения на подмногообразие), разрешающие операторы гиперболических уравнений, различные интегральные преобразования и многие, многие другие. Особо важную роль играют *квантованные канонические преобразования*[18] — ИОФ, ассоциированные с каноническими преобразованиями (т.е. однородными диффеоморфизмами кокасательного расслоения с удалённым нулевым сечением в себя, сохраняющими стандартную симплектическую форму). Эти последние операторы являются одними из наиболее хорошо изученных видов ИОФ, а также исключительно важны для приложений: именно они наиболее часто возникают в задачах дифференциальных уравнений и математической физики. Кроме того, они обладают рядом свойств, для общих ИОФ выполненных не всегда: в частности, они действуют ограниченно во всей шкале пространств Соболева и замкнуты относительно композиции. Отметим, что изначально эти операторы возникли в математической физике как квантование канонических преобразований в фазового пространства[19] (чему и обязаны своим названием). Они также естественно возникают в микролокальном анализе псевдодифференциальных операторов[20].

ИОФ часто участвуют в нелокальных условиях для самых различных краевых задач. Естественно ставить и задачи Соболева с нелокальными граничными условиями, заданными с помощью ИОФ. И здесь, поскольку исследование задачи Соболева существенно опирается на теорию следов, возникает общая задача об описании следов ИОФ на подмногообразиях. Эта задача ранее не исследовалась.

В диссертационной работе изучается ситуация, когда след ИОФ на подмногообразии снова является ИОФ. Ввиду обширности класса ИОФ такая постановка представляется весьма актуальной и интересной. Помимо общих условий, когда это выполнено, отдельно рассматриваются и специальные случаи, которые включают следы квантованных канонических преобразований, следы ИОФ, ассоциированных с конормальными расслоениями (в частности, ПДО), а также следы, являющиеся сосредоточенными на конечном множестве точек. Последние операторы известны как *операторы Фурье–Меллина*; они естественно возникают на многообразиях с точечными особенностями, а также в задачах Соболева с граничными условиями, отвечающими сдвигам с конечным числом неподвижных точек, лежащих на подмногообразии[21,22]. В диссертации также рассматриваются приложения к некоторым задачам Соболева с нелокальными граничными условиями. Отдельно рассматривается задача Соболева

---

[13] Маслов В.П., *Теория возмущений и асимптотические методы*, Москва, 1965.

[14] Hörmander L., “Fourier integral operators. I,” *Acta Math.*, 127, 1971, 79–183.

[15] Duistermaat J. J., *Fourier Intergral Operators,* Birkhäuser, 1996.

[16] Трев Ф., *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Том 2,* Мир, Москва, 1984.

[17] Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. *Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора,* Наука, Москва, 1978.

[18] Назайкинский В.Е., Ошмян В.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е., “Интегральные операторы Фурье и канонический оператор,” *Успехи матем. наук*, 36:2, 1981, 81–140.

[19] Fock V., “On the canonical transformation in classical and quantum mechanics,” *Acta Physica Acad. Scient. Hungaricae*, 27:1–4, 1969, 219–224.

[20] Егоров Ю.В., “Канонические преобразования и псевдодифференциальные операторы,” *Труды Моск. Мат. общ-ва*, 24, 1971, 3–27.

[21] Стернин Б.Ю., *Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями,* МИЭМ, Москва, 1974.

[22] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., “Эллиптические трансляторы на многообразиях с точечными особенностями,” *Дифф. уравн.,* 48:12, 2012, 1612–1620.

на римановом многообразии с граничными условиями, заданными оператором взвешенного сферического среднего. Установленные результаты обобщают и расширяют многие результаты относительной эллиптической теории, полученные ранее Б.Ю. Стерниным и его школой.

Цель работы

Целью работы является исследование следов на подмногообразиях интегральных операторов Фурье в ситуации, когда эти следы снова являются интегральными операторами Фурье; более детальное изучение структуры этих операторов в некоторых специальных случаях; приложения полученных результатов к задачам Соболева с нелокальными условиями.

Методы исследования

В работе широко используется аппарат микролокального анализа, классические результаты теории ИОФ, теории канонического оператора Маслова, методы дифференциальной геометрии. Для исследования задач Соболева используются результаты и методы относительной эллиптической теории и функционального анализа.

Основные результаты. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1) Получены условия, при которых след на подмногообразии ИОФ снова является ИОФ.

2) Получены условия, при которых след квантованного канонического преобразования является ИОФ, сосредоточенными на конечном множестве точек. Получено представление такого следа в виде оператора Фурье–Меллина.

3) Получены условия, при которых след квантованного канонического преобразования также является квантованным каноническим преобразованием.

4) Результаты предыдущего пункта применены к задачам Соболева с нелокальными граничными условиями.

5) Исследована задача Соболева на римановом многообразии с граничными условиями, заданными с помощью оператора сферического среднего. В рамках решения такой задачи было получено представление оператора сферического среднего в виде ИОФ, ассоциированного с двусторонним геодезическим потоком.

Теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в относительной эллиптической теории (в том числе, для операторов на многообразии с особенностями и для операторов, ассоциированных со сдвигами), теории ИОФ и в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Семинар под руководством Э. Шроэ в институте Анализа университета Ганновера (дважды — в 25.07.2017 и 23.08.2018).
- Научный студенческий семинар по дифференциальным уравнениям под руководством Б.Ю. Стернина и А.Ю. Савина, РУДН (неоднократно, 2016–2019).
- Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А.Л. Скубачевского, РУДН, 07.11.2017.
- Научный семинар “Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование,” руководители: А.Б. Жеглов, Ф.Ю. Попеленский, Г.И. Шарыгин, А.И. Шафаревич, В.Л. Чернышев; МГУ, 11.03.2019.
- Научный семинар “Перспективные математические технологии” под руководством В.Г. Данилова, МИЭМ НИУ ВШЭ, 13.03.2019.
- Научный семинар лаборатории механики природных катастроф института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского “Асимптотические методы в математической физике” под руководством С. Ю. Доброхотова, 19.03.2019.
- Научный семинар “Некоммутативная геометрия и топология,” руководители: А.С. Мищенко, И.К. Бабенко, В.М. Мануйлов, А.А. Ирматов; МГУ, 12.12.2019.

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях.

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 10–14 апреля 2017.
- Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, Воронеж, 13–19 ноября, 2017.
- 60-я Научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 20–26 ноября, 2017.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018», Москва, 9–13 апреля, 2018.
- VIII международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VIII», Ростов-на-Дону, 22–27 апреля, 2018.
- Конференция 'Analysis and PDE', Leibniz Universität Hannover, October 7–9, 2019.
- Конференция «Понтрягинские чтения – XXXI» в рамках Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3-9 мая 2020.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 4 статьи в научных журналах и 5 — в тезисах докладов на международных конференциях. Их список приведён в конце автореферата. Результаты совместной работы[23], включённые в диссертацию, получены автором лично.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы из 78 наименований. Общий объем диссертации составляет 167 страниц.

Краткое содержание работы

Глава 1. Предварительные сведения

В первой главе вводятся основные понятия и конструкции, а также доказываются простейшие результаты, которые используются в дальнейшем. Среди прочего здесь устанавливается связь между ИОФ и операторами Фурье–Меллина.

В главе 1 также вводится понятие следа оператора на подмногообразии. Более точно, пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — гладкое вложение замкнутых многообразий коразмерности $\operatorname{codim}_M X = \nu$, A — оператор на объемлющем многообразии M.

Определение 1. *След* $i^!(A)$ оператора A на подмногообразии X есть композиция

$$i^!(A) = i^*\, A\, i_*,$$

где i^* — *граничный оператор*, сопоставляющий функции на M её сужение на X, а i_* — *кограничный оператор*, определённый двойственным образом к i^* и сопоставляющий функции на X распределение на M, сосредоточенное на X.

Отметим, что если A — ограниченный оператор в пространствах Соболева $H^s(M) \to H^{s-\lambda}(M)$, где $s+\nu/2 < 0$, $s-\lambda-\nu/2 > 0$, то след $i^!(A)$ корректно определён как ограниченный оператор

$$i^!(A)\colon H^{s+\nu/2}(X) \longrightarrow H^{s-\lambda-\nu/2}(X). \tag{1}$$

В завершение главы 1 приводятся условия на непрерывный линейный оператор $A\colon C^\infty(M) \to \mathcal{D}'(M)$, при которых его след $i^!(A)$ существует как оператор $C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$.

Глава 2. Следы интегральных операторов Фурье на подмногообразиях

Во второй главе содержатся результаты о следах, ассоциированных с вложением $i\colon X \hookrightarrow M$, для различных видов ИОФ на M.

В **§2.1** исследуются следы квантованных канонических преобразований, сосредоточенные на конечном множестве точек (и являющиеся операторами Фурье–Меллина). Пусть на объемлющем многообразии M задана система координат (x, y), в которой $X = \{y = 0\}$, и пусть на подмногообразии X выделена точка $x_0 \in X$, в указанных координатах заданная

[23] Nazaikinskii V.E., Savin A.Yu., and Sipailo P.A. “Sobolev problems with spherical mean conditions and traces of quantized canonical transformations,” *Russ. J. Math. Phys.*, 26:4, 2019, 483–498.

как $x_0 = (0,0)$. Предположим также, что X является подмногообразием средней размерности, т.е. $\dim X = \operatorname{codim}_M X = \dim M/2$. Рассмотрим однородное каноническое преобразование $g\colon T_0^*M \to T_0^*M$ (здесь и далее индекс "0" обозначает выбрасывание в расслоении нулевого сечения), удовлетворяющее условиям:

A) преобразование g оставляет инвариантным слой над точкой x_0, иначе говоря, выполнено $g(T_0^*M|_{\{x_0\}}) = T_0^*M|_{\{x_0\}}$;

B) выполнено соотношение $g(T_0^*M|_X) \cap T_0^*M|_X = T_0^*M|_{\{x_0\}}$, причём пересечение указанных подмногообразий трансверсально;

C) выполнено соотношение $g(N_0^*X|_{\{x_0\}}) \cap N_0^*X|_{\{x_0\}} = \emptyset$ (здесь и далее N_0^*X — конормальное расслоение, отвечающее вложению $X \hookrightarrow M$).

Пусть $\Phi = \Phi(\operatorname{graph} g)$ — квантованное каноническое преобразование на M, ассоциированное с g, т.е. ИОФ, ассоциированный с графиком $\operatorname{graph} g = \{\, (g(w'), w') \mid w' \in T_0^*M \,\}$. Ставится задача об описании следа Φ на подмногообразии X.

Теорема 2. *Пусть преобразование g удовлетворяет условиям A)-C). Тогда след $i^!(\Phi)$ корректно определён как непрерывный линейный оператор $i^!(\Phi)\colon C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$ и является ИОФ, ассоциированным со слоем $T_0^*(X \times X)|_{\{x_0\}\times\{x_0\}}$ расслоения $T_0^*(X \times X)$ над точкой $x_0 \times x_0 \in X \times X$. В случае, если порядок $d = \operatorname{ord}\Phi$ исходного ИОФ Φ удовлетворяет условию $d < -\dim X$, то при s, удовлетворяющих неравенствам $d + \dim X < s < \dim X/2$, след $i^!(\Phi)$ продолжается до оператора, ограниченного в пространствах Соболева $H^s(X) \to H^{s-d-\dim X}(X)$, и является в этих пространствах оператором Фурье–Меллина, сосредоточенным в точке x_0.*

Параграф **§2.2** посвящён общей ситуации, когда след ИОФ на подмногообразии снова является ИОФ. Здесь аналогом условий A), B) предыдущего параграфа является понятие чистого пересечения.

Напомним, что для подмногообразий M_1 и M_2, вложенных в многообразие M_3, пересечение $M_1 \cap M_2$ называется *чистым*, если оно само является подмногообразием в M_3 и, кроме того, для любой точки $w \in M_1 \cap M_2$ выполнено

$$T_w(M_1 \cap M_2) = T_w M_1 \cap T_w M_2.$$

Целое неотрицательное число e называется *эксцессом* чистого пересечения $M_1 \cap M_2 \subset M_3$, если

$$\operatorname{codim} M_1 + \operatorname{codim} M_2 = \operatorname{codim}(M_1 \cap M_2) + e.$$

В частности, значение $e = 0$ даёт условие трансверсальности.

Следующая теорема есть основной результат параграфа **§2.2**.

Теорема 3. *Пусть $\Phi\colon C^\infty(M) \to \mathcal{D}'(M)$ — ИОФ на M, ассоциированный с коническим лагранжевым подмногообразием $\Lambda \subset T_0^*(M \times M)$, и пусть Λ удовлетворяет условиям:*

A) пересечение $\Lambda|_{X\times X} = \Lambda \cap T^*(M \times M)|_{X\times X}$ является чистым в $T^*(M \times M)$;

B) выполнено $\Lambda \cap N_0^*(X \times X) = \emptyset$.

Тогда след $i^!(\Phi)$ *корректно определён как непрерывный линейный оператор в пространствах* $C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$ *и является ИОФ, ассоциированным с лагранжевым подмногообразием в* $T_0^*(X \times X)$*, равным множеству*

$$\pi_{X\times X}(\Lambda \cap T^*(M \times M)|_{X\times X}).$$

Здесь $\pi_{X\times X}$ *— проекция* $T^*(M\times M)|_{X\times X} \to T^*(X\times X)$*, индуцированная вложением* $i\times i\colon X\times X \hookrightarrow M \times M$*.*

Кроме того, в **§2.2** приводится формула для вычисления амплитуды (в локальных координатах) ИОФ $i^!(\Phi)$, а также обсуждается частный случай квантованных канонических преобразований.

В параграфе **§2.3** изучается ситуация, когда условие A) теоремы 3 не выполнено, вместо этого подмногообразие Λ устроено специальным образом: именно, требуется, чтобы Λ отвечало конормальному расслоению некоторого подмногообразия в $M \times M$ (или, что то же самое, обладало структурой линейного подпространства при ограничении на слои расслоения $T^*(M \times M)$). Более точно, для подмногообразия в $S \subset X \times X$ обозначим через $\widetilde{N}_0^*S$ расслоение, которое получается из N_0^*S обращением знака у копеременных во втором множителе в $X \times X$: если (x, x') — координаты в $X \times X$, а (p, p') — двойственные координаты в слоях $T^*(X \times X)$, то положим

$$\widetilde{N}_0^*S = \{\, (x, p;\, x', p') \mid (x, p; x', -p') \in N_0^*S \,\}.$$

Далее обозначим $\nu = \operatorname{codim}_M X$.

Теорема 4. *Пусть* Φ *— ИОФ на* M*, ассоциированный с расслоением* $\widetilde{N}_0^*S$*, где* $S \subset M \times M$ *— подмногообразие, и пусть пересечение* $S|_{X\times X} = S \cap X \times X$ *является чистым в* $M \times M$ *с эксцессом* e*. Предположим также, что* Φ *действует ограниченно в пространствах Соболева* $\Phi\colon H^s(M) \to H^{s-\lambda}(M)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, для* s*, удовлетворяющих неравенствам* $s + \nu/2 < 0$*,* $s - \lambda - \nu/2 > 0$*, и что порядок оператора* Φ *удовлетворяет соотношению* $\operatorname{ord}\Phi < (\dim M - \dim S)/2 - e$*. Тогда след* $i^!(\Phi)$ *действует ограниченно в пространствах* $i^!(\Phi)\colon H^{s+\nu/2}(X) \to H^{s-\lambda-\nu/2}(X)$ *и является ИОФ, ассоциированным с расслоением* $\widetilde{N}^*(S|_{X\times X} \hookrightarrow X \times X)$*.*

Условиям теоремы 4 (но не теоремы 3!) удовлетворяют ПДО (в этом случае S — диагональ в произведении $M\times M$). Так, из неё непосредственно следует, что след ПДО порядка d на подмногообразии X является ПДО порядка $d + \nu$. Это — классический результат относительной эллиптической теории.

Последний в главе 2 параграф **§2.4** посвящён ситуации, когда след квантованного канонического преобразования снова является квантованным каноническим преобразованием. Пусть $g\colon T_0^*M \to T_0^*M$ — однородное каноническое преобразование на M. Наложим на g следующие условия:

A) подмногообразия $T_0^*M|_X$ и $g(T_0^*M|_X)$ в T_0^*M пересекаются трансверсально;

B) естественная проекция $\pi_X\colon T^*M|_X \to T^*X$ индуцирует диффеоморфизмы

$$T_0^*M|_X \cap g^{-1}(T_0^*M|_X) \xrightarrow{\simeq} T_0^*X, \qquad T_0^*M|_X \cap g(T_0^*M|_X) \xrightarrow{\simeq} T_0^*X.$$

Определение 5. Преобразованию g, удовлетворяющему условиям A) и B), сопоставим отображение $i^!(g)\colon T_0^*X \to T_0^*X$, равное композиции

$$i^!(g)\colon T_0^*X \xrightarrow{\pi_X^{-1}} T_0^*M|_X \cap g^{-1}(T_0^*M|_X) \xrightarrow{g} T_0^*M|_X \cap g(T_0^*M|_X) \xrightarrow{\pi_X} T_0^*X,$$

в которой стрелки π_X^{-1} и π_X суть обратный и прямой диффеоморфизмы из условия B), а средняя стрелка — преобразование g. Отображение $i^!(g)$ будем называть *следом* преобразования g.

Ясно, что след $i^!(g)$ является однородным диффеоморфизмом $T_0^*X \to T_0^*X$.

Теорема 6. *Пусть преобразование g удовлетворяет условиям определения 5. Тогда его след $i^!(g)$ является однородным каноническим преобразованием $T_0^*X \to T_0^*X$. Если $\Phi = \Phi(g)$ — квантованное каноническое преобразование на M, ассоциированное с g, то след $i^!(\Phi)$ является квантованным каноническим преобразованием на X, ассоциированным с $i^!(g)$. Порядки операторов $i^!(\Phi)$ и Φ связаны друг с другом соотношением*

$$\operatorname{ord} i^!(\Phi) = \operatorname{ord} \Phi + \frac{\nu}{2}.$$

Замечание 7. Оператор $i^!(\Phi)$ из теоремы 6, будучи квантованным каноническим преобразованием порядка $\operatorname{ord}\Phi + \nu/2$, действует в шкале пространств Соболева с соболевским порядком, равным также $\operatorname{ord}\Phi + \nu/2$; тем самым в пространствах

$$H^{s+\nu/2}(X) \longrightarrow H^{s-\operatorname{ord}\Phi-\nu/2}(X),$$

предписанных формулой (1) (где теперь $\lambda = \operatorname{ord}\Phi$), он оказывается сглаживающим оператором. Мы наблюдаем эффект *падения порядка*: соболевский порядок следа $i^!(\Phi)$ оказывается меньше, чем сумма соболевских порядков операторов, входящих в композицию, определяющую след. Это существенно отличает ситуацию, описываемую теоремой 6, от случая, когда рассматриваются следы ПДО, и оказывает значительное влияние на теорию задач Соболева с соответствующими нелокальными граничными условиями.

Оставшаяся часть **§2.4** отводится вычислению следа квантованного канонического преобразования, отвечающего геодезическому потоку на вполне геодезическом подмногообразии. Именно, пусть на многообразии M задана риманова метрика ϱ_M, и пусть

$$G_M^{\pm t}\colon T_0^*M \longrightarrow T_0^*M$$

— геодезический поток на M за время $\pm t$. Рассматриваются *полуволновые операторы* — квантованные канонические преобразования, ассоциированные с $G_M^{\pm t}$ и амплитудой (главным символом), тождественно равной 1. Напомним, что эти операторы совпадают с унитарными в $L^2(M, \varrho_M)$ операторами однопараметрической группы $e^{\mp it\sqrt{\Delta_M}}$, порождённой (самосопряжённым) оператором $\sqrt{\Delta_M}$, где Δ_M — положительный оператор Лапласа на M. Итак, положим

$$\Phi_M^{\pm t} = \Phi(G_M^{\pm t}, 1) = e^{\mp it\sqrt{\Delta_M}},$$

где $t > 0$ мало. Напомним, что подмногообразие X называется *вполне геодезическим*, если всякая геодезическая на X (в индуцированной метрике) является геодезической и на M.

Пусть A — ПДО на M с главным символом $\sigma(A)$. *Метрическим следом*[24] $i_m(A)$ оператора A на подмногообразии X называется ПДО на X, заданный главным символом $\sigma[i_m(A)] = i_m^*\sigma(A)$, где $i_m\colon T_0^*X \hookrightarrow T_0^*M$ — естественное вложение, индуцированное римановой метрикой.

Предложение 8. *Пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — вполне геодезическое подмногообразие коразмерности ν, A — ПДО на M. Тогда при малых $t > 0$ по модулю операторов меньшего порядка справедливо равенство*

$$i^!\big(A\Phi_M^{\pm t}\big) = (2\pi t)^{-\nu/2}\, e^{\mp i\pi\nu/4}\, \Delta_X^{\nu/4}\, i_m(A)\, \Phi_X^{\pm t}.$$

Здесь Δ_X — положительный оператор Лапласа на X.

Глава 3. Приложения к нелокальным задачам Соболева

Последняя глава посвящена эллиптической теории нелокальных задач Соболева.

В **§3.1** рассматривается общая постановка задач Соболева с нелокальными условиями. Именно, пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — гладкое вложение замкнутых многообразий. Положим $\dim M = n$ и $\operatorname{codim}_M X = \nu$. Для пары (M, X) рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} Du = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus X, \\ i^*Bu = h \in H^{s-b}(X), \end{cases} \tag{2}$$

где

- неизвестная функция u ищется в пространстве $H^s(M)$;
- D — ПДО на M порядка d;
- B — квантованное канонические преобразование порядка b, ассоциированное с каноническим преобразованием, удовлетворяющим условиям определения 5;
- $h \in H^{s-b}(X)$ — заданная функция.

Также предполагается, что числа d, s удовлетворяют соотношениям

$$0 < d - s - \nu/2 \le 1.$$

Замечание 9. Задача (2) отличается от *классической задачи Соболева*[25,26], в которой функция h принадлежит пространству $H^{s-b-\nu/2}(X)$ (что, казалось бы, естественно, поскольку граничный оператор i^* понижает соболевский порядок гладкости на $\nu/2$). Однако в силу эффекта падения порядка, описанного выше в замечании 7, задача с $h \in H^{s-b-\nu/2}(X)$ оказывается некорректно поставленной. Поэтому требуется новая постановка.

---

[24] Nazaikinskii V.E. and Sternin B.Yu., “Relative elliptic theory,” *Aspects of boundary problems in analysis and geometry,* Operator Theory: Advances and Applications, 151, eds. Gil, Juan (ed.) et al., Birkhäuser, Basel, 2004, 495–560.

[25] Стернин Б.Ю., “Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности,” *Труды Моск. Мат. общ-ва,* 15, 1966, 346–382.

[26] Стернин Б.Ю., “Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева,” *Докл. АН СССР,* 230(2), 1976, 287–290.

Определение 10. Задача (2) называется *фредгольмовой*, если фредгольмов оператор

$$i^*B\colon\ \ker(QD) \longrightarrow H^{s-b}(X),$$

где ПДО D рассматривается в пространствах $H^s(M) \to H^{s-d}(M)$, а Q есть проекция на фактор-пространство

$$Q\colon H^{s-d}(M) \longrightarrow H^{s-d}(M) \Big/ \{u : \operatorname{supp} u \subset X\}.$$

Следующая теорема является основным результатом параграфа **§3.1**.

Теорема 11. *Пусть B — квантованное каноническое преобразование, ассоциированное с каноническим преобразованием, удовлетворяющим условиям определения 5, а D — эллиптический ПДО. Если след $i^!(B)$ является эллиптическим ИОФ порядка $b+\nu/2$, то задача* (2) *фредгольмова.*

Теорема 11 и предложение 8 дают

Следствие 12. *Пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — вполне геодезическое подмногообразие. Пусть число $t>0$ мало и операторы D и $i_m(A)$ являются эллиптическими ПДО. Тогда задача* (2) *с $B = A\Phi^t_M$ фредгольмова.*

В **§3.2** изучается задача Соболева, в которой граничный оператор B включает в себя (взвешенный) оператор сферического среднего. Остановимся на этом операторе подробнее (временно не касаясь структуры подмногообразия).

Пусть (X,ϱ) — замкнутое риманово многообразие размерности n, ρ — функция расстояния на X. *Оператор сферического среднего* $\mathcal{M}^t(\mu)$ с весом $\mu \in C^\infty(X\times X)$, отвечающий радиусу $t>0$, определяется по формуле

$$\big[\mathcal{M}^t(\mu)\, u\big](x) = \int\limits_{S^t(x)} \mu(x,x')\, u(x')\; dV_{t,x}(x'), \qquad u \in C^\infty(X),$$

где $S^t(x) = \{x' \in X \mid \rho(x,x') = t\}$ — геодезическая сфера на X радиуса t с центром в точке $x \in X$, $dV_{t,x}$ — форма объёма на $S^t(x)$, индуцированная римановой метрикой.

Ниже, для работы с этим оператором в контексте нелокальных задач Соболева, нам понадобится его представление в виде ИОФ, ассоциированного с (двусторонним) геодезическим потоком. Этот результат представляет интерес и сам по себе. Отметим, что тот факт, что такое представление существует, хорошо известен[27]. Однако формулу для коэффициентов этого представления в случае общих римановых многообразий найти в литературе автору не удалось. Поэтому искомая формула была получена отдельно.

Пусть $\Phi^{\pm t} = \Phi(G^{\pm t}, 1)\colon L^2(X,\varrho) \to L^2(X,\varrho)$ — полуволновые операторы на X. Обозначим через $J\colon TX \to \mathbb{R}$ — гладкую функцию, для каждой точки $x \in X$ заданную в слое T_xX формулой

$$J(x,\cdot) = \frac{\exp_x^* d\mathrm{vol}}{dv_x},$$

где $d\mathrm{vol}$ — форма объёма на X, dv_x — мера Лебега на T_xX (обе меры — индуцированные римановой структурой), $\exp_x\colon T^*_xX \to X$ — экспоненциальное отображение в точке x. Подразумевая канонический изоморфизм $TX \simeq T^*X$, далее будем считать, что отображения J и $\exp$ заданы на T^*X, а не TX.

[27]Zelditch S., *Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian Manifold,* AMS, 2017

Теорема 13. *При малых $t>0$ имеет место равенство*

$$\mathcal{M}^t(\mu) = P^+\Phi^t + P^-\Phi^{-t},$$

где $P^\pm$ — ПДО с главными символами

$$\sigma\big(P^\pm\big)(x,p) = (2\pi t)^{(n-1)/2}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}(n-1)}\, J\left(x, \mp\frac{tp}{|p|_x}\right)^{1/2} \mu\left(x, \exp_x\left(\mp\frac{tp}{|p|_x}\right)\right) |p|_x{}^{-(n-1)/2}.$$

Здесь $|p|_x$ — модуль ковектора $p\in T_x^*X$ относительно римановой метрики.

Теперь пусть $i\colon X\hookrightarrow M$ — вложение замкнутых римановых многообразий, $\dim M = n$, $\operatorname{codim}_M X = \nu$. Для пары (M,X) рассмотрим задачу Соболева

$$\begin{cases} Du \equiv 0 \quad \text{на} \quad M\setminus X, \\ i^*\big[B + A\mathcal{M}^t_M(\mu)\big]\, u = h \in H^{s-b-\nu/2}(X), \end{cases} \tag{1}$$

где

- $u\in H^s(M)$ — неизвестная функция, $h\in H^{s-b-\nu/2}(X)$ — заданная функция.
- D — ПДО на M порядка d;
- $\mathcal{M}^t_M(\mu)$ — оператор сферического среднего на M с весом $\mu\in C^\infty(M\times M)$;
- B — ПДО на M порядка b, A — ПДО на M порядка $b+\nu/2+(n-1)/2$.

Предполагается, что выполнены неравенства

$$0 < d - s - \nu/2 \le 1, \qquad s - b - \nu/2 > 0.$$

Задаче (1) сопоставляется оператор

$$i^*\big[B + A\mathcal{M}^t_M(\mu)\big]\colon\ \ker(QD) \longrightarrow H^{s-b-\nu/2}(X) \tag{2}$$

и ставится вопрос о фредгольмовости этого оператора.

Теорема 14. *Пусть вложение $i\colon X\hookrightarrow M$ является вполне геодезическим. Тогда оператор (2) фредгольмов, если ПДО D эллиптичен и фредгольмов оператор*

$$\mathcal{A} = i^!\big(BD^{-1}\big) + i^!\big(A\mathcal{M}^t_M(\mu)D^{-1}\big) = C_0 + C^+\Phi^t_X + C^-\Phi^{-t}_X, \tag{3}$$

где C_0,$C^\pm$ — ПДО на X (чьи главные символы явно вычисляются с помощью результатов выше).

Оператор (3) представляет собой $\mathbb{Z}$-оператор в смысле работы[28]. В указанной работе приводятся условия фредгольмовости такого оператора в терминах главных символов коэффициентов C_0,$C^\pm$. Тем самым последняя теорема даёт условия фредгольмовости задачи (1).

В заключительном параграфе **§3.3** явно вычисляются два числовых примера.

[28]Savin A., Schrohe E., and Sternin B., “Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations,” *Bull. Sci. Math.*, 155, 2019, 141–167.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — двумерный тор с координатами (x, y), $X = \mathbb{S}^1$ — окружность, вложенная в M как подмногообразие $\{y = 0\}$. Рассматривается задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus X, \\ \int\limits_0^{2\pi} \mu(\varphi)\, u(x + t\cos\varphi, t\sin\varphi)\, d\varphi = h(x) \in H^{s+1/2}(X), \end{cases} \tag{4}$$

где u ищется в пространстве $H^s(M)$, $\mu(\varphi)$ — гладкая функция на $X = \mathbb{S}^1$, $0 < t < 1$ и выполнены неравенства $1/2 \leq s < 3/2$.

Предложение 15. *Пусть* $|\mu(0)| \neq |\mu(\pi)|$. *Тогда задача* (4) *фредгольмова.*

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{T}^n$ — n-мерный тор, $X = \mathbb{T}^{n-\nu}$. Снова предполагается, что на M зафиксированы локальные координаты (x, y), в которых $X = \{y = 0\}$. Рассматривается задача

$$\begin{cases} \Delta_M^k u = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus X, \\ i^*(1 + A\Phi_M^t)\, u = h \in H^{s-\nu/2}(X), \end{cases} \tag{5}$$

где $\Delta_M = -\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$ — положительный оператор Лапласа на M, Φ_M^t — полуволновой оператор, отвечающий геодезическому потоку за время t, A — ПДО на M порядка $\nu/2$. Предполагается, что выполнены равенства

$$0 < 2k - s - \nu/2 \leq 1, \qquad s - \nu/2 > 0.$$

Предложение 16. *Пусть A является ПДО с постоянными коэффициентами (т.е. его главный символ в локальных координатах имеет вид $\sigma(A)(p, q)$). Тогда, если число $t > 0$ мало и выполнено соотношение*

$$\left|\sigma(A)(p, 0)\right| \neq \frac{\Gamma(k - \nu/2)}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu/2} |p|^{\nu/2} \qquad \forall p \neq 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, то задача (5) *фредгольмова.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность В.Е. Назайкинскому и А.Ю. Савину за постоянный интерес к работе, плодотворные обсуждения и неоценимую помощь, без чего подготовка настоящей работы не была бы возможна. Автор благодарен Б.Ю. Стернину за постановку задачи, поддержку и внимание к работе. Автор также выражает благодарность директору Института анализа Ганноверского университета Э. Шроэ за гостеприимство и интерес к работе.

Работа выполнена при поддержке Программы РУДН “5-100”, а также при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Сипайло П. А., “О следах интегральных операторов Фурье на подмногообразиях,” *Мат. заметки*, 104:4, (2018), 588-603.

2. Сипайло П. А., “Следы квантованных канонических преобразований, сосредоточенные на конечном множестве точек,”*Дифф. уравнения*, 54:5 (2018), 701-712.

3. Sipailo P. A., “Traces of Quantized Canonical Transformations on Submanifolds and Their Applications to Sobolev Problems with Nonlocal Conditions,” *Russ. J. Math. Phys.*, 26:1 (2019), 135–138.

4. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sipailo P. A., “Sobolev Problems with Spherical Mean Conditions and Traces of Quantized Canonical Transformations,” *Russ. J. Math. Phys.*, 26:4 (2019), 483–498.

Тезисы конференций

1. Сипайло П. А. “О следах интегральных операторов Фурье, сосредоточенных на конечном множестве точек,” *Материалы международного молодежного научного форума “Ломоносов–2017”*, ISBN 978-5-317-05504-2.

2. Сипайло П. А. “О естественности операции взятия следа в классе интегральных операторов Фурье,” *Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна (13-19 ноября 2017 г.): сборник материалов*, Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2017, ISBN 978-5-9273-2535-1.

3. Сипайло П. А. “О естественности операции взятия следа в классе интегральных операторов Фурье,” *Труды 60-й Научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика*, М.: МФТИ, 2017, ISBN 978-5-7417-0652-7.

4. Сипайло П. А. “Следы интегральных операторов Фурье, ассоциированных с линейными лагранжевыми многообразиями,” *Материалы международного молодежного научного форума “Ломоносов–2018”*, 2018, ISBN 978-5-317-05504-2.

5. Сипайло П. А. “О следах интегральных операторов Фурье на подмногообразиях,” *Материалы VIII международной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VIII”*, 2018, ISBN 978-5-6040259-4-9.

Павел Андреевич Сипайло

Следы интегральных операторов Фурье на подмногообразиях и их приложения

В диссертационной работе исследуется операция взятия следа на подмногообразии в классе интегральных операторов Фурье. Даны общие условия, при которых след интегрального оператора Фурье на подмногообразии снова является интегральным оператором Фурье. Отдельно рассмотрены случаи следов квантованных канонических преобразований, следов, являющихся операторами Фурье–Меллина, и следов интегральных операторов Фурье, ассоциированных с конормальными расслоениями. Полученные результаты применены к исследованию вопросов о фредгольмовой разрешимости некоторых задач Соболева с нелокальными условиями. Отдельно исследована задача Соболева на римановом многообразии с граничными условиями, заданными с помощью оператора взвешенного сферического среднего.

Pavel Andreevich Sipailo

Traces of Fourier integral operators on submanifolds and their applications

The dissertation is devoted to exploring the operation of taking the trace on the submanifold within the class of Fourier integral operators. We give general conditions on a Fourier integral operator which guarantee that its trace on the submanifold is a Fourier integral operator again. In addition, we study traces of quantized canonical transformations, traces which are Fourier–Mellin operators, and traces of Fourier integral operators associated with conormal bundles. We further use the obtained results to investigate the Fredholm property of some nonlocal Sobolev problems. In particular, we study the Sobolev problem on a Riemannian manifold in which the boundary conditions include the weighted spherical means operator.