На правах рукописи

Горбачева Анна Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕГУЛЯРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и оптимизации Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель: **Карамзин Дмитрий Юрьевич**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Федерального
исследовательского центра
"Информатика и управление"
Российской академии наук.

Официальные оппоненты: **Потапов Михаил Михайлович**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры оптимального управления
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего
образования "Московский Государственный
университет имени М. В. Ломоносова".

Куренной Алексей Святославович
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник научно-исследовательского
института математики, физики и информатики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего
образования "Тамбовский государственный
университет имени Р.Г. Державина".

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Центральный экономико-математический институт РАН"**

Защита диссертации состоится 14 февраля 2017 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан « » 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.27,
доктор физико-математических наук Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена изучению задач оптимального управления с различными типами ограничений, включая фазовые ограничения типа равенств и неравенств.

Актуальность работы. Актуальность диссертационной работы прежде всего обусловлена тем, что теория задач оптимального управления с фазовыми ограничениями является современным и широко исследуемым разделом математики. Значимым вопросом теории задач оптимального управления с фазовыми ограничениями является исследование экстремалей принципа максимума Понтрягина. Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями имеют широкий спектр различных инженерных приложений. Данная диссертационная работа посвящена исследованию свойств регулярных экстремалей в задачах с фазовыми ограничениями.

Цель диссертационной работы. Основной целью диссертационной работы является исследование необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств, свойств функции распределения меры-множителя Лагранжа и приложений полученных результатов к изучению свойств кратчайшей кривой.

Задачи диссертационной работы.

- Исследование достаточных условий непрерывности функции распределения меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств.

- Исследование достаточных условий липшицевости функции распределения меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств.

- Исследование свойств кратчайшей кривой в области, задаваемой регулярной системой ограничений типа равенств и неравенств.

- Исследование вариационных систем общего вида.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования диссертационной работы являются задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств, кратчайшая кривая, вариационная система. Предметом исследования являются необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств; свойства функции распределения мерымножителя Лагранжа; свойства кратчайшей кривой в сложной области; вариационные принципы; свойства вариационных систем.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы функционального анализа, вариационного анализа, многозначного анализа, выпуклого анализа, математического анализа, нелинейного анализа, теории функций вещественной переменной, теории экстремума.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми. В диссертационной работе получены новые результаты, касающиеся свойств регулярных экстремалей Понтрягина в задачах с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств, и свойств кратчайших кривых в области, задаваемой регулярной системой ограничений типа равенств и неравенств. Получены новые результаты, касающиеся исследования вариационных систем общего вида.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит в основном теоретический характер. В работе исследуются свойства функции распределения меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления в виде равенств и неравенств. Вопрос о непрерывности или абсолютной непрерывности мерымножителя Лагранжа является важным для различных приложений, в частности для некоторых проблем механики и задач кинематического управления (см. [1], [2], [3]). Скорость в таких задачах рассматривается как фазовая переменная. Если модуль скорости ограничен сверху какой-то константой (что вполне естественно для задач кинематического управления), то это приводит к фазовым ограничениям и к мере-множителю Лагранжа в необходимых условиях оптимальности. Методы, которые обычно используются для решения таких задач, как правило, подразумевают абсолютную непрерывность

[1]Alexandrov V. V., Budninskiy M.A. On Kinematic Control Extremals // European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland. 2013. P. 210 – 214.

[2]Bryson E. R., Yu-Chi Ho. Applied optimal control, 1969.

[3]Buskens C., Maurer H. SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 120. P. 85 – 108.

или даже гладкость этой меры. Поэтому предлагаемое направление исследования может представлять интерес не только с чисто теоретической точки зрения, но и оказаться полезным для инженерных приложений.

Степень достоверности. Достоверность обусловлена строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- научный семинар “Численные методы в оптимизации и теории управления” отдела методов нелинейного анализа ФИЦ ИУ РАН под руководством В. А. Березнева,

- научный семинар “Методы оптимизации” кафедры оптимального управления ВМК МГУ под руководством профессора Ф. П. Васильева,

- научный семинар “Экстремальные задачи и нелинейный анализ” кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук РУДН под руководством профессора А. В. Арутюнова,

- международная конференция “Воронежская зимняя школа С.Г. Крейна – 2016” (г. Воронеж, 2016),

- международная научная конференция “Ломоносов – 2016” (г. Москва, 2016),

- научная конференция “Ломоносовские чтения” (г. Москва, 2016).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ, 5 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 85 страницах, состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащего 78 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведено краткое изложение некоторых этапов развития вариационного исчисления и оптимального управления, обоснована актуальность исследования, описана его методика, отражена научная новизна диссертации, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, а также приведена информация об апробации результатов.

В **первой главе** исследуется свойства непрерывности и абсолютной непрерывности меры-множителя Лагранжа из принципа максимума для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. При определенных предположениях регулярности, наложенных на экстремальную траекторию, доказано, что функция распределения меры-множителя Лагранжа гельдерова. Если вдобавок к условиям регулярности предполагается выполненным усиленное условие Лежандра, то мера оказывается уже абсолютно непрерывной, а ее функция распределения даже липшицевой. Также рассматриваются примеры задач управления с фазовыми ограничениями, для которых можно гарантировать a priori (то есть без вычисления экстремального процесса), что соответствующая мера непрерывна.

Результаты этой главы развивают некоторые результаты работы [4] на более общий случай задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. В главе активно используется аппарат теории функций действительного переменного и в частности такое понятие, как замыкание измеримой функции по мере.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \varPhi(x_1, t_1, t_2, u(\cdot)) := e_0(p) + \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \varphi_0(x, u, t)dt \to \min, \\ \dot{x} = \varphi(x, u, t),\ t \in [t_1, t_2],\ t_1 < t_2, \\ g_1(x, t) = 0,\ g_2(x, t) \leqslant 0, \\ r(x, u, t) \leqslant 0, \\ e_1(p) = 0,\ e_2(p) \leqslant 0, \\ p = (x_1, x_2, t_1, t_2). \end{cases} \tag{1}$$

[4] Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu. On some continuity properties of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. 2015. V. 53, N 4. P. 2514 – 2540.

Будем считать, что вектор-функции r, e_i, g_i принимают значения в евклидовых пространствах размерности $d(r)$, $d(e_i)$, $d(g_i)$ соответственно, функции e_0, φ_0, φ являются скалярными, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in [t_1, t_2]$ – время (концы времени t_1 и t_2 не предполагаются фиксированными), x есть фазовая переменная из n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, и $u \in \mathbb{R}^m$ – переменная управления. Вектор $p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ называется *концевым*. Управляющая функция, или просто *управление*, есть измеримая существенно ограниченная функция $u(\cdot)$, т.е. элемент пространства $L_\infty([t_1, t_2])$.

Предположим, что функции e_0, e_i, φ_0, φ непрерывно дифференцируемы, функции g_i дважды непрерывно дифференцируемы, а функции φ, φ_0, r дважды непрерывно дифференцируемы по u для всех x, t.

Определение 1 *Пусть $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – управление, а $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – соответствующая этому управлению траектория, то есть $\dot{x} = \varphi(x(t), u(t), t)$, и p – соответствующий концевой вектор. Допустимым процессом будем называть тройку (p, x, u), если она удовлетворяет*

- *концевым ограничениям: $e_1(p) = 0$, $e_2(p) \leqslant 0$,*
- *смешанным ограничениям: $r(x(t), u(t), t) \leqslant 0$ для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, и*
- *фазовым ограничениям: $g_1(x(t), t) = 0$, $g_2(x(t), t) \leqslant 0$ $\forall\, t \in [t_1, t_2]$.*

Определение 2 *Концевые ограничения называются регулярными в точке $p = (x_1, x_2, t_1, t_2)$: $e_1(p) = 0$, $e_2(p) \leqslant 0$, если*

$$\operatorname{rank} \frac{\partial e_1}{\partial p}(p) = d(e_1),\ \exists\, d \in \ker \frac{\partial e_1}{\partial p}(p) :\ \left\langle \frac{\partial e_2^j}{\partial p}(p), d \right\rangle > 0\ \ \forall\, j :\ e_2^j(p) = 0.$$

(Верхние индексы означают координаты вектора или вектор-функции).

Определение 3 *Смешанные ограничения называются регулярными, если для любых (x, u, t): $r(x, u, t) \leqslant 0$ существует вектор $q = q(x, u, t)$ такой, что*

$$\left\langle \frac{\partial r^j}{\partial u}(x, u, t), q \right\rangle > 0\ \ \forall\, j : r^j(x, u, t) = 0. \tag{2}$$

Определение 4 *Фазовые ограничения называются регулярными, если для любых (x, t): $g_1(x, t) = 0$, $g_2(x, t) \leqslant 0$, имеет место*

$$\operatorname{rank} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t) = d(g_1), \quad \exists\, z = z(x, t) \in \ker \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t) :$$

$$\left\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x, t), z \right\rangle > 0 \quad \forall j : g_2^j(x, t) = 0.$$

Определение 5 *Фазовые ограничения называются согласованными с концевыми ограничениями в точке p^*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\{p \in \mathbb{R}^{2n+2} : \ |p^* - p| \leqslant \varepsilon, \ e_1(p) = 0, \ e_2(p) \leqslant 0\} \subseteq$$
$$\{p : \ g_1(x_1, t_1) = 0, \ g_2(x_1, t_1) \leqslant 0, \ g_1(x_2, t_2) = 0, \ g_2(x_2, t_2) \leqslant 0\}.$$

Пусть (p^*, x^*, u^*) допустимый процесс в задаче (1). Здесь $p^* = (x_1^*, x_2^*, t_1^*, t_2^*)$. Введем необходимые обозначения:

$$J(x,t) = \{j : g_2^j(x,t) = 0\}, \quad I(x,u,t) = \{i : \ r^i(x,u,t) = 0\},$$
$$\Gamma_i(x,u,t) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(x,t)\varphi(x,u,t) + \frac{\partial g_i}{\partial t}(x,t), \quad i = 1,2,$$
$$U(x,t) = \{u \in \mathbb{R}^m : \ r(x,u,t) \leqslant 0, \Gamma_1(x,u,t) = 0\},$$
$$T = [t_1^*, t_2^*], \quad \Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2), \quad g = (g_1, g_2).$$

Обозначим через $\mathcal{U}(t)$ замыкание по мере функции $u^*(t)$.

Определение 6 *Замыканием справа по мере функции $\xi(t)$ в точке τ называется множество $\Xi^+(\tau)$ таких векторов $u \in \mathbb{R}^m$ что*

$$\ell\Big(\{t \in [\tau, \tau + \varepsilon] : \ \xi(t) \in B_\varepsilon(u)\}\Big) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Здесь, $B_\varepsilon(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : \ |v - u| \leqslant \varepsilon\}$, и ℓ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Соответственно, замыкание слева – это множество $\Xi^-(\tau)$ таких векторов $u \in \mathbb{R}^m$ что

$$\ell\Big(\{t \in [\tau - \varepsilon, \tau] : \ \xi(t) \in B_\varepsilon(u)\}\Big) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Многозначное отображение $\Xi(t) := \Xi^-(t) \cup \Xi^+(t)$, где $t \in \mathbb{R}$, называется замыканием $\xi(t)$ по мере Лебега.

Будем считать, что $\mathcal{U}^-(t_1^*) = \mathcal{U}^+(t_1^*)$, $\mathcal{U}^+(t_2^*) = \mathcal{U}^-(t_2^*)$.

Введем определение регулярного процесса и регулярной точки.

Определение 7 *Допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) называется регулярным, если для любых $t \in T$, $u \in \mathcal{U}(t)$, векторы $\frac{\partial \Gamma_1^j}{\partial u}(x^*(t), u, t)$, $j = 1, ..., d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), \ u, t)$, $i \in I(x^*(t), u, t)$ линейно независимы, и существует вектор $d = d(u,t) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $d \in \ker \frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), u, t)$ $\forall i \in I(x^*(t), u, t)$, $d \in \ker \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x^*(t), u, t)$,*

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(x^*(t), u, t), d \right\rangle > 0 \ \ \forall j \in J(x^*(t), t). \tag{3}$$

Определение 8 *Назовем точку* $u \in U(x,t)$ *регулярной, если* $\operatorname{rank} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x,u,t) = d(g_1)$ *и существует вектор* $q \in \ker \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x,u,t)$ *такой, что*

$$\left\langle \frac{\partial r^i}{\partial u}(x,u,t), q \right\rangle > 0 \;\; \forall\, i \in I(x,u,t). \tag{4}$$

Подмножество всех регулярных точек множества $U(x,t)$ обозначим через $U_R(x,t)$. Положим $\Omega(x,t) := \operatorname{cl} U_R(x,t)$ (cl – замыкание). Отметим, что если процесс регулярен, то $\mathcal{U}(t) \subseteq U_R(x^*(t),t)$ $\forall\, t \in T$, и значит все близкие точки из некоторой его окрестности регулярны. В частности смешанные ограничения будут регулярными в некоторой окрестности регулярного процесса. Отсюда, поскольку $\mathcal{U}(t) \neq \varnothing$ $\forall\, t \in T$, также следует, что $\Omega(x^*(t),t) \neq \varnothing$ $\forall\, t \in T$.

Рассмотрим расширенную функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\bar{H}(x,u,\psi,\mu,\lambda^0,t) = \big\langle \psi, \varphi(x,u,t) \big\rangle - \big\langle \mu, \Gamma(x,u,t) \big\rangle - \lambda^0 \varphi_0(x,u,t),$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, и малый Лагранжиан

$$l(p,\lambda) = \lambda^0 e_0(p) + \big\langle \lambda^1, e_1(p) \big\rangle + \big\langle \lambda^2, e_2(p) \big\rangle, \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2).$$

Определение 9 *Будем говорить, что допустимый процесс* (p^*, x^*, u^*) *в задаче (1) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если существует вектор* $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2) : \lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^{d(e_1)}$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{d(e_2)}$, $\lambda^0 \geqslant 0$, $\lambda^2 \geqslant 0$, $\big\langle \lambda^2, e_2(p^*) \big\rangle = 0$, *абсолютно непрерывная функция* $\psi : T \to \mathbb{R}^n$, *функция* $\mu = (\mu_1, \mu_2) : T \to \mathbb{R}^{d(g)}$ *и измеримая ограниченная функция* ν*:* $T \to \mathbb{R}^{d(r)}$ *такие, что*

$$\text{либо} \;\; \lambda^0 + |\mu_2(t_1^*)| > 0, \;\; \text{либо} \;\; \psi(t) \notin \operatorname{im} \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t) \;\; \forall t \in T, \tag{5}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}(t) + \nu(t) \frac{\partial r}{\partial x}(t) \;\; \text{п.в.} \;\; t, \tag{6}$$

$$\psi(t_s^*) = (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda) + \mu_2(t_s^*) \frac{\partial g_2}{\partial x_s}(t_s^*), \;\; s = 1,2, \tag{7}$$

$$\max_{u \in \Omega(t)} \bar{H}(u,t) = \bar{H}(t) \;\; \text{п.в.} \;\; t, \tag{8}$$

$$\dot{h} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(t) - \nu(t) \frac{\partial r}{\partial t}(t) \;\; \text{п.в.} \;\; t, \tag{9}$$

$$h(t_s^*) = (-1)^s \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) - \mu_2(t_s^*) \frac{\partial g_2}{\partial t}(t_s^*), \;\; s = 1,2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t) = \nu(t) \frac{\partial r}{\partial u}(t) \;\; \text{п.в.} \;\; t, \tag{11}$$

$$\langle \nu(t), r(t) \rangle = 0, \; \nu(t) \geqslant 0 \;\; \text{п.в.} \;\; t, \tag{12}$$

где $h(t) := \max_{u\in\Omega(t)} \bar{H}(u,t)$*.*

Более того, функция $h(t)$ *абсолютно непрерывна на* T*, а вектор-функция* $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

а) каждая из функций μ_2^j *постоянна на каждом отрезке времени* $[a,b]$*, на котором траектория* $x^*(t)$ *целиком лежит во внутренности фазового множества, задаваемого* j*-ым фазовым ограничением-неравенством, т.е. когда* $g_2^j(t) < 0\ \forall\, t \in [a,b]$*;*

б) вектор-функция μ_2 *непрерывна слева на интервале* (t_1^*, t_2^*)*, и* $\mu_2(t_2^*) = 0$*;*

в) каждая из функций μ_2^j *(нестрого) убывает;*

г) вектор-функция μ_1 *измерима и ограничена на* T*.*

Процесс (p^*, x^*, u^*)*, удовлетворяющий принципу максимума называется экстремалью, а набор* $(\lambda, \psi, \mu, \nu)$ *– множителями Лагранжа, отвечающими процессу* (p^*, x^*, u^*) *в силу принципа максимума.*

Здесь и везде далее приняты следующие соглашения относительно обозначений. Если у отображений $\bar{H}, g, r, \varphi, \Omega$, и т.п., или их производных какие-нибудь из аргументов опущены, то вместо них подставлены значения $x^*(t)$, $u^*(t)$ или множители Лагранжа $\psi(t), \mu(t), \lambda$.

Будем говорить, что функция $\theta : T \to \mathbb{R}^k$ имеет корневой рост слева в точке $t_* \in T$, если существует число $c > 0$ такое, что $|\theta(t) - \theta(t_*)| \leqslant c\sqrt{|t - t_*|}$ $\forall\, t \in [t_1^*, t_*]$ и корневой рост справа, если это неравенство выполняется для любого $t \in [t_*, t_2^*]$. Рост называется линейным справа/слева, если $\sqrt{|t - t_*|}$ в оценке выше заменить на $|t - t_*|$.

Теорема 1 *Предположим, что допустимый процесс* (p^*, x^*, u^*) *является экстремальным. Пусть концевые ограничения регулярны в точке* p^**, фазовые ограничения согласованы с концевыми в* p^**, и процесс* (p^*, x^*, u^*) *регулярен. Тогда для любых множителей Лагранжа* λ, ψ, μ, ν*, отвечающих* (p^*, x^*, u^*) *в силу принципа максимума, выполняется:*

i) *условие нетривиальности*

$$\text{либо} \quad \lambda^0 > 0, \quad \text{либо} \quad \psi(t) - \mu_2(t)\frac{\partial g_2}{\partial x}(t) \notin \operatorname{im} \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t) \ \ \forall\, t \in T; \qquad (13)$$

ii) *в каждой точке* $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ *функция* $\mu_2(t)$ *непрерывна и более того имеет корневой рост справа и слева; если оптимальная траектория выходит негладко на границу* j*-ого фазового ограничения в точке* t_*, $j \in J(t_*)$, *тогда рост* μ_2^j *линеен справа; в случае негладкого схода с границы* j*-ого фазового ограничения, рост* μ_2^j *линеен слева;*

iii) *существует вектор* $\lambda_{\rm m} = (\lambda^0, \lambda_{\rm m}^1, \lambda_{\rm m}^2)$ *и функция* $\psi_{\rm m}(t)$ *такие что, набор* $\lambda_{\rm m}, \psi_{\rm m}, \mu_1, \bar{\mu}_2, \nu$, *где*

$$\bar{\mu}_2(t) = \begin{cases} \mu_2(t) - \mu_2(t_2^{*-}), & t \in (t_1^*, t_2^*), \\ \mu_2(t_1^{*+}) - \mu_2(t_2^{*-}), & t = t_1^*, \\ 0, & t = t_2^*. \end{cases}$$

удовлетворяет принципу максимума и условию (13); и

iv) *при дополнительном предположении, что* $d(g_2) = 1$, *функция* $\bar{\mu}_2(t)$ *является гельдеровой с показателем* $\alpha = \frac{1}{2}$, *т.е.*

$$|\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_2(s)| \leqslant \mathrm{const}\sqrt{|t-s|} \quad \forall\, t, s \in T. \tag{14}$$

Таким образом, в условиях регулярности, Теорема 1 гарантирует существование непрерывной меры-множителя Лагранжа $\mu_2(t)$, удовлетворяющей условию корневого роста всюду на (t_1^*, t_2^*).

Предположение A) Существует целое число $N > 0$ и точки $t_i \in (t_1^*, t_2^*)$, $i = 1, ..., N$ такие, что $t_1 < t_2 < ... < t_N$, отображение $J(t)$ постоянно для каждого интервала (t_1^*, t_1), (t_i, t_{i+1}), $i = 1, ..., N-1$ и (t_N, t_2^*). Точка t_i или t_1^*, t_2^* называется *точкой стыка*, если отображение $J(t)$ не является постоянным в любой из ее окрестностей.

Пусть

$$\mathcal{G}^+(t) := \{u \in U(t) : \Gamma_2^j(u,t) \geqslant 0 \;\forall\, j \in J(t)\},$$
$$\mathcal{G}^-(t) := \{u \in U(t) : \Gamma_2^j(u,t) \leqslant 0 \;\forall\, j \in J(t)\}.$$

Далее будем считать, что априори справедливы следующие условия:

$$\mathcal{U}^+(t) \cap \mathcal{G}^-(t) \neq \varnothing, \;\; \mathcal{U}^-(t) \cap \mathcal{G}^+(t) \neq \varnothing \;\; \forall\, t \in T. \tag{15}$$

Следующее определение является ослаблением условий регулярности по сравнению с Определением 7.

Определение 10 *Допустимый процесс* (p^*, x^*, u^*) *называется слабо регулярным, если для любых* $t \in T$, *и* $u \in \mathcal{U}(t)$, *векторы* $\frac{\partial \Gamma_1^j}{\partial u}(x^*(t), u, t)$, $j = 1, ..., d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), u, t)$, $i \in I(x^*(t), u, t)$ *линейно независимы, и существует вектор* $d = d(u, t) \in \mathbb{R}^m$ *такой, что* $d \in \ker \frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), u, t)\ \forall\, i \in I(x^*(t), u, t)$, $d \in \ker \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x^*(t), u, t)$,

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(x^*(t), u, t), d \right\rangle > 0 \;\; \forall\, j \in J(x^*(t), t):\; \Gamma_2^j(x^*(t), u, t) = 0. \qquad (16)$$

Замечание 1 *Любой допустимый процесс задачи (1) является слабо регулярным, если для любых* x, t *и любого* $u \in U(x, t)$, *векторы* $\frac{\partial \Gamma_1^j}{\partial u}(x, u, t)$, $j = 1, ..., d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x, u, t)$, $i \in I(x, u, t)$ *линейно независимы, и существует вектор* $d = d(x, u, t) \in \mathbb{R}^m$ *такой, что* $d \in \ker \frac{\partial r^i}{\partial u}(x, u, t)\ \forall\, i \in I(x, u, t)$, $d \in \ker \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x, u, t)$, *и*

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(x, u, t), d \right\rangle > 0 \;\; \forall\, j \in J(x, t):\; \Gamma_2^j(x, u, t) = 0.$$

Теорема 2 *Предположим, что допустимый процесс* (p^*, x^*, u^*) *экстремален. Пусть концевые ограничения регулярны в точке* p^*, *фазовые ограничения согласованы с концевыми ограничениями в точке* p^*, *процесс* (p^*, x^*, u^*) *слабо регулярен, выполнено условие (15), и имеет место хотя бы одно из следующих условий:*

1) выполняется Предположение (A);

2) $|J(t)| \leqslant 1\ \forall\, t$.

Тогда, для любых множителей Лагранжа λ, ψ, μ, v, *отвечающих* (p^*, x^*, u^*) *в силу принципа максимума, выполнено утверждение Теоремы 1.*

В случае, когда $d(g_2) = 1$, Теорема 2 не содержит никаких дополнительных предположений по сравнению с Теоремой 1. Условия слабой регулярности экстремального процесса используются вместо условий сильной регулярности в смысле Определения 7, что делает предположения Теоремы 2 слабее, чем отвечающие ей из Теоремы 1. Значит, в скалярном случае утверждение Теоремы 2 содержит в себе утверждение Теоремы 1.

Заметим, что благодаря Замечанию 1 можно априори (то есть не вычисляя экстремальный процесс) гарантировать для некоторых классов непрерывность и даже гельдеровость $\mu_2(t)$. Приведем несколько примеров таких классов задач управления.

Пример 1 *Пусть* $n = m$, r_1, r_2 *– заданные положительные числа,* $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x} = \theta(x) + u, \\ |u|^2 \leqslant r_1,\ |x|^2 \leqslant r_2, \\ x(0) = x_A,\ x(1) = x_B. \end{cases} \tag{17}$$

Предположим, что

$$|\big\langle \theta(x), x \big\rangle| < \sqrt{r_1 r_2}\ \ \forall\, x : |x|^2 = r_2. \tag{18}$$

Тогда любой допустимый процесс задачи (17) слабо регулярен.

Пример 2 *Пусть* $n = m$, r_1 *– заданное положительное число,* w *– заданный единичный вектор,* $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x} = \theta(x) + u, \\ |u|^2 \leqslant r_1,\ \big\langle w, x \big\rangle \leqslant 0, \\ x(0) = x_A,\ x(1) = x_B. \end{cases} \tag{19}$$

Предположим, что

$$|\big\langle \theta(x), w \big\rangle| < \sqrt{r_1}\ \ \forall\, x : \big\langle w, x \big\rangle = 0. \tag{20}$$

Тогда любой допустимый процесс задачи (19) слабо регулярен.

Пример 3 *Пусть* $n = m$, $k < m$, a *– заданное положительное число,* w *– заданный единичный вектор,* $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x} = \theta(x) + u, \\ |u^j| \leqslant a,\ j = 1, ..., k, \\ \big\langle w, x \big\rangle \leqslant 0, \\ x(0) = x_A,\ x(1) = x_B. \end{cases} \tag{21}$$

Предположим, что
$$\exists\, j_* > k:\ w^{j_*} \neq 0. \qquad (22)$$
Тогда любой допустимый процесс задачи (21) слабо регулярен.

Определение 11 *Будем говорить, что экстремаль (p^*, x^*, u^*) удовлетворяет усиленному условию Лежандра, если найдутся множители Лагранжа $(\lambda,\ \psi, \mu, \nu)$ такие, что для почти всех $t \in T$, верно следующее неравенство*
$$\Big(\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial u^2}(t) - \Big\langle \nu(t), \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}(t)\Big\rangle\Big)[\xi, \xi] \leqslant -\operatorname{const}|\xi|^2\ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m. \qquad (23)$$
Здесь, константа $\operatorname{const} > 0$ *не зависит от* t*.*

Следующее предположение регулярности есть небольшое усиление слабой регулярности из Определения 10.

Предположение P) Для любых $t \in T$, $u \in \mathcal{U}(t)$, векторы $\frac{\partial \Gamma_1^l}{\partial u}(u,t)$, $l = 1, ..., d(g_1)$, $\frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u,t)$, $j \in J(t)$: $\Gamma_2^j(u,t) = 0$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(u,t)$, $i \in I(u,t)$, линейно независимы.

Теорема 3 *Предположим, что (p^*, x^*, u^*) есть экстремаль и $(\lambda, \psi, \mu, \nu)$ суть соответствующие ей множители Лагранжа. Пусть процесс (p^*, x^*, u^*) удовлетворяет Предположениям A), P), и выполнено усиленное условие Лежандра (23). Кроме того, предположим, что имеет место (15).*

Тогда, $\mu_2(t)$ липшицева на (t_1^*, t_2^*).

Основные результаты первой главы опубликованы в [3], [4], [5], [7], [8].

Во **второй главе** некоторые результаты первой главы получают дальнейшее развитие и приложение к исследованию свойств кратчайшей кривой в области, задаваемой регулярной системой ограничений типа равенств и неравенств.

Рассмотрим область
$$M := \{x \in \mathbb{R}^n:\ g_1(x) = 0,\ g_2(x) \leqslant 0\},$$
и пусть A, B – две фиксированные точки из M, $A \neq B$. Будем считать, что g_1, g_2 – заданные вектор-функции, принимающие значения в $\mathbb{R}^{k_1}$ и $\mathbb{R}^{k_2}$ соответственно. Всюду ниже полагается, что векторы $\frac{\partial g_1^i}{\partial x}(x)$, $i = 1, .., k_1$, $\frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x)$, $j \in J(x)$ линейно независимы при любом x. Здесь $J(x) := \{j : g_2^j(x) = 0\}$.

Рассмотрим гладкую кривую $x(t) : [0,1] \to M$, целиком лежащую в M и соединяющую A и B, т.е. $x(0) = A$ и $x(1) = B$. (Область M будем полагать связной и тогда, в силу наложенных выше условий регулярности, такая кривая всегда существует.)

Кратчайшей на M будем называть непрерывно дифференцируемую, регулярную кривую $x_*(t)$ с естественной параметризацией, имеющую наименьшую длину среди всех гладких кривых $x(t)$, которые лежат на M и соединяют A и B.

Во второй главе выводится уравнение кратчайшей на M. В связи с этим важно отметить следующее. С одной стороны, из принципа оптимальности при определенных допущениях уравнение кратчайшей при наличии неравенств выводится тривиально. Действительно, любой кусок кратчайшей является снова кратчайшей, и тогда путем рассмотрения отдельных ее частей, лежащих на границе области $x : g_2(x) \leqslant 0$ и внутри нее (предположим, что $k_2 = 1$), придем к искомому результату. Однако такой метод применим, если эти части целиком лежат на границе или внутри области. Но такой части кратчайшей, которая бы целиком лежала на границе области может и не найтись, в то время как множество точек выхода кратчайшей на границу может являться, например, канторовым множеством положительной меры. Приведем соответствующий пример.

Пусть $C \subset [0,1]$ – канторово множество положительной меры. Поскольку C замкнуто, то по теореме Уитни существует гладкая неположительная функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi^{-1}(\{0\}) = C$. Возьмем $n = 2$, $g_2(x) = \varphi(x_1) - x_2$, и пусть ограничения типа равенств отсутствуют. Кратчайшая, соединяющая две точки $(0,0)$ и $(1,0)$ есть, очевидно, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $t \in [0,1]$. Легко видеть, что множество $C \times \{0\}$ лежит на границе указанной области, а множество $([0,1] \setminus C) \times \{0\}$ лежит в ее внутренности.

Заметим, что здесь также возникает и вопрос о том классе функций, к которому принадлежит кратчайшая кривая. Ясно, что при наличии неравенств она уже не класса $C_2([0,1])$, как в случае с геодезической. Соответствующий контрпример несложно построить.

В этой главе показано, что кратчайшая кривая для сложной области принадлежит пространству $W_{2,\infty}([0,1])$. При этом не делается никаких дополнительных предположений относительно множества точек выхода кратчайшей на границу области. (Если часть кратчайшей целиком лежит на границе или внутри, то там она, конечно, класса C_2.) Используя этот результат, получено уравнение кратчайшей кривой для рассматриваемой области в общем случае.

Если фазовые ограничения типа равенств отсутствуют, то задачу о кратчайшей для данной области еще называют задачей об обходе препятствия (см. [5]). На возможность вывода уравнения кратчайшей через ПМП указал Р.В. Гамкрелидзе в [6] и [7].

Рассмотрим задачу управления

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |u(t)|^2 dt \to \min, \\ \dot{x} = u, \\ g_1(x) = 0,\ g_2(x) \leqslant 0, \\ u \in \mathbb{R}^n,\ x(0) = A,\ x(1) = B. \end{cases} \tag{24}$$

Во второй главе были получены и доказаны следующие Леммы.

Лемма 1 *Кратчайшая кривая $x_*(t)$, соединяющая точки A и B, существует. Любая кратчайшая является решением задачи (24). Верно и обратное, любое решение (24) будет кратчайшей.*

Лемма 2 *Кратчайшая кривая $x_*(t)$ является функцией класса $W_{2,\infty}([0,1])$. В отсутствие ограничений типа неравенств она класса $C_2([0,1])$.*

Лемма 3 *Кратчайшая кривая $x_*(t)$ почти всюду на $[0,1]$ удовлетворяет уравнению*

$$\ddot{x} = -g_x'^*(x)P^*(x)[P(x)g_x'(x)g_x'^*(x)P^*(x)]^{-1}P(x)g_{xx}''[\dot{x},\dot{x}], \tag{25}$$

где $P(x)$ означает матрицу размерности $(k_1+k_2)\times(k_1+|J(x)|)$, которая вектор $y=(y_1,y_2,...,y_{k_1},y_{k_1+1},y_{k_1+2},...,y_{k_1+k_2})$ переводит в вектор $\tilde{y}=(y_1,y_2,...,y_{k_1},y_{k_1+j_1},y_{k_1+j_2},...,y_{k_1+j_k})$, где $j_1,j_2,...,j_k$ – это индексы, образующие множество $J(x)$.

[5]Арнольд В. И. Теория катастроф. М. : Наука, 1990. 128 С.

[6]Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, N 3. С. 475 – 478.

[7]Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

Замечание 2 *Наряду с (25), имеет место уравнение кратчайшей в более простой, геометрической форме:*

$$\ddot{x} \in N_M(x).$$

$N_M(x)$ – нормальный конус ко множеству M в точке x.

Основные результаты второй главы опубликованы в [1], [6], [9].

В **третьей главе** исследуются вариационные системы общего типа, доказывается некоторый модифицированный вариационный принцип Экланда, и с его помощью критерий метрической регулярности. Рассматриваются приложения к исследованию свойств управляемости дифференциальных управляемых систем с ограничениями.

Рассмотрим банахово пространство X, евклидово пространство Y, гладкое по Фреше отображение $\varphi : X \to Y$ и замкнутое множество $S \subseteq Y$, которое содержит точку $y = 0$. Пусть $x_* \in X$, $\varphi(x_*) = y_*$. В этой главе нас будет интересовать вопрос о существовании решения включения

$$\varphi(x) \in y + S \tag{26}$$

в окрестности точки (x_*, y_*). Включение вида (26) еще называют вариационной системой, поскольку необходимость решать подобного рода задачу приходит к нам из вариационного анализа, в связи, например, с негладким правилом множителей Лагранжа, см. подробнее в [8].

Определение 12 *Будем говорить, что функция φ является метрически регулярной в точке x_* относительно множества S, если существуют числа $c, \delta > 0$ такие, что для любых $(x, y) \in B_\delta(x_*) \times B_\delta(y_*)$ имеет место:*

$$d(x, \varphi^{-1}(y + S)) \leqslant c \cdot d(\varphi(x), y + S).$$

Здесь $B_\delta(x)$ – шар радиуса δ с центром в x, а $d(x, A)$ – расстояние до множества. Причем расстояние до пустого множества считается равным $+\infty$.

Определение 13 *Функция φ удовлетворяет условию Робинсона относительно множества S в точке x_*, если*

$$N_S \cap \ker \varphi'^*(x_*) = \{0\}. \tag{27}$$

[8] Mordukhovich B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation. (Vol. 1, 2). Springer, 2006.

Здесь N_S – нормальный конус Мордуховича ко множеству S в точке $y = 0$ (см. [9]). Если множество S выпуклое, то это определение превращается в классическое определение регулярности по Робинсону, которое говорит, что $N_S + \operatorname{im} \varphi'(x_*) = Y$.

Следующее утверждение было получено в [10].

Теорема 4 *Пусть функция φ удовлетворяет условию Робинсона (27) в точке x_*. Тогда φ является метрически регулярной в точке x_* относительно множества S.*

В работе приводится новое доказательство этого факта, которое опирается на модифицированный вариационный принцип Экланда. Идея этой модификации заключается в том, что если аргумент задачи распадается на две части, одна из которых конечномерна и ограничена, то возмущать в вариационном принципе достаточно лишь бесконечномерную часть. Приведем соответствующие формулировки.

Пусть $E = \mathbb{R}^n$, и M – замкнутое подмножество произведения $X \times E$. Элементы M будем обозначать через (x, t), где $x \in X$, $t \in E$. Пусть заданы полунепрерывные снизу и неотрицательные на M функции $f(x) : X \to \mathbb{R}^1$ и $r(t) : E \to \mathbb{R}^1$. Обозначим $\Phi(x, t) := f(x) + r(t)$.

Лемма 4 *Предположим, что существует такое ограниченное множество $B \subseteq E$, что $M \subseteq X \times B$. Пусть заданы числа $\varepsilon, \lambda > 0$ и точка $(x_0, t_0) \in M : \Phi(x_0, t_0) \leqslant \varepsilon$. Тогда существуют точка $(x_*, t_*) \in M$, а также функция $\psi(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$ такие, что:*

a) $\|x_* - x_0\| \leqslant \lambda$;

b) $\Phi(x_*, t_*) \leqslant \Phi(x_0, t_0)$;

c) $\psi(x_0) \leqslant \lambda$, *и* $|\psi(x') - \psi(x'')| \leqslant 2\|x' - x''\| \; \forall\, x', x'' \in X$;

d) функция $\Phi(x, t) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\psi(x)$ достигает своего абсолютного минимума на множестве M в точке (x_*, t_*).

[9] Mordukhovich B. S. Maximum principle in problems of time optimal control with nonsmooth constraints // Appl. Math. Mech. 1976. V. 40. P. 960 – 969.

[10] Mordukhovich B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation. (Vol. 1, 2). Springer, 2006.

Если предположить, что Y банахово или даже гильбертово, то утверждение Теоремы 4 уже неверно.

Естественные приложения приведенных выше утверждений лежат в области оптимального управления при изучении свойств управляемости динамических систем с различными типами геометрических ограничений. Такого рода приложения также были рассмотрены в работе.

Основные результаты третьей главы опубликованы в [2].

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

- Получены достаточные условия непрерывности функции распределения меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств.

- Получены достаточные условия липшицевости функции распределения меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств.

- Изучены свойства кратчайшей кривой в области, задаваемой регулярной системой ограничений типа равенств и неравенств, и, в частности, доказано, что кратчайшая кривая в этой области является функцией класса $W_{2,\infty}$. Получено уравнение кратчайшей кривой для этой области в общем случае.

- Доказан модифицированный вариационный принцип Экланда, и исследованы его применения к изучению свойств метрической регулярности отображения банахова пространства в евклидово пространство относительно замкнутого подмножества евклидового пространства. Изучены приложения к теории задач оптимального управления с геометрическими концевыми ограничениями.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК.

1. Горбачева (Давыдова) А. В., Карамзин Д. Ю. О некоторых свойствах кратчайшей кривой в сложной области // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, N 12. – С. 1647 – 1657.

2. Горбачева (Давыдова) А. В., Карамзин Д. Ю. Исследование вариационных систем общего вида // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 6. – С. 1755 – 1759.

3. Горбачева А. В. Непрерывность меры-множителя Лагранжа из принципа максимума для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств в условиях слабой регулярности экстремального процесса // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2016 – Т. 21, Вып. 1. – С. 28 – 39.

4. Горбачева А. В., Карамзин Д. Ю. Уточнение условий оптимальности в задачах управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2016 – Т. 21, Вып. 1. – С. 40 – 55.

5. Горбачева А. В., Карамзин Д. Ю. О некоторых классах задач управления с фазовыми ограничениями // Вестник РУДН, Серия: Математика, Информатика. Физика. – 2016. – N 1. – С. 11 – 18.

Прочие публикации.

6. Горбачева (Давыдова) А. В., Карамзин Д. Ю. Уравнение геодезической кривой как приложение теории принципа максимума // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. – М.: ВЦ РАН, 2014. – С. 138 – 147.

7. Горбачева А. В. Некоторые примеры задач управления с фазовыми ограничениями // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016" / под ред. В.А. Костина – Воронеж, 2016. – С. 131 – 133.

8. Горбачева А. В. Уточнение условий оптимальности в задачах управления с фазовыми ограничениями // Сборник тезисов XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2016" секция "Вычислительная математика и кибернетика", Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 11 – 15 апреля 2016 г. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2016. – С. 105 – 107.

9. Горбачева А. В., Карамзин Д. Ю. Некоторые свойства кратчайшей кривой в сложной области // Научная конференция “Ломоносовские чтения”. Тезисы докладов, 18 – 27 апреля 2016 г. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2016. – С. 66 – 67.

Горбачева А. В. Исследование свойств регулярных экстремалей в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями

Диссертационная работа посвящена изучению задач оптимального управления с различными типами ограничений, включая фазовые ограничения типа равенств и неравенств. В работе исследуется свойство непрерывности и абсолютной непрерывности меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач управления с фазовыми ограничениями. Исследуются свойства кратчайшей кривой в области, задаваемой регулярной системой ограничений типа равенств и неравенств. Устанавливается, что кратчайшая кривая является функцией класса $W_{2,\infty}$, находится уравнение кратчайшей, и исследуются некоторые другие свойства этой кривой. Изучаются вариационные системы общего геометрического вида. Доказывается, что условие Робинсона является достаточным для метрической регулярности отображения банахова пространства в евклидово относительно замкнутого подмножества евклидова пространства. Доказательство основано на некоторой модификации вариационного принципа Экланда. Обсуждаются приложения.

Gorbacheva A. V. Investigation of properties of regular extremals in optimal control problems with state constraints

PhD thesis is devoted to studying of optimal control problems with various types of constraints, including state constraints of equality and inequality type. The continuity and absolute continuity of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for control problems with state constraints are investigated. The properties of the shortest curve in the compound domain are studied. The compound domain is defined by a regular system of equality and inequality constraints. We show that the shortest curve is a function of the class $W_{2,\infty}$, derive an equation of the shortest curve, and study some other properties of this curve. General geometric type variational systems are investigated. It is proved that the Robinson condition is sufficient for metric regularity of a map of a Banach space into a Euclidean space w.r.t. a closed subset of the Euclidean space. The proof is based on a certain modification of the Ekeland variational principle. Some applications are discussed.