

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

---

*На правах рукописи*  
УДК 517.518.23



**Трушин Борис Викторович**

**НЕПРЕРЫВНЫЕ И КОМПАКТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ  
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА  
АНИЗОТРОПНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ**

01.01.01 — математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008



Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН,  
профессор О.В. Бесов.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Г.А. Калябин,  
  
кандидат физико-математических наук,  
доцент А.В. Скориков.

Ведущая организация: Институт математики  
им. С.Л. Соболева СО РАН.

Защита диссертации состоится 23 декабря 2008 г. в 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117923, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495<sup>а</sup>.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 19 ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук, доцент

 Л.Е. Россовский.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию непрерывности и компактности вложения весовых пространств Соболева на нерегулярных областях. При этом характер вырождения рассматриваемых областей не является изотропным.

Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-е годы прошлого века благодаря работам С.Л. Соболева<sup>1, 2, 3</sup>. Эта теория изучает связи дифференциальных свойств функций в различных метриках. Кроме самостоятельного интереса с точки зрения теории функций, она имеет также различные приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В 60-е годы в ряде статей В.Г. Мазыа<sup>4, 5, 6, 7</sup> были получены необходимые и достаточные, а также более простые достаточные условия справедливости некоторых теорем вложения пространств Соболева  $W_p^1(G)$ . Он установил также необходимые и достаточные условия вложения для ряда модельных “плохих” областей, в частности, для одиночного внешнего пика. Однако, в общем случае проверить, удовлетворяет ли область всем необходимым условиям, довольно трудно.

С.Л. Соболев установил свои теоремы вложения с помощью интегральных представлений функций через их производные. Этот метод получил затем развитие в работах В.П. Ильина<sup>8</sup>. Позднее О.В. Бесовым построены интегральные представления по гибкому рогу. Метод интегральных представлений состоит в том, что представление функции в данной точке  $x$  строится по значениям этой

<sup>1</sup> Соболев С.Л. О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // Докл. АН СССР. 1936. Т. 1. С. 267–270.

<sup>2</sup> Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4, №3. С. 471–497.

<sup>3</sup> Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950; 2-е изд. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962; 3-е изд. М.: Наука, 1988.

<sup>4</sup> Мазыа В.Г. Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, №3. С. 527–530.

<sup>5</sup> Мазыа В.Г.  $p$ -проводимость и теоремы вложения некоторых функциональных пространств в пространство  $C$  // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, №2. С. 299–302.

<sup>6</sup> Мазыа В.Г. Об отрицательном спектре многомерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, №4. С. 721–722.

<sup>7</sup> Мазыа В.Г. О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами // Сб. мат. о-ва. 1968. Т. 2. С. 1322–1350.

<sup>8</sup> Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975; 2-е изд. М.: Наука, 1996.

функции в точках ограниченного конуса (или рога) с вершиной в точке  $x$ . Тем самым создается возможность для изучения функциональных пространств функций, заданных на открытом множестве достаточно общего вида (области, звездной относительно шара, открытого множества с условием конуса, с условием  $\lambda$ -рога, с  $\sigma$ -условием Джона и т.п.).

В 1980 г. Ю.Г. Решетняк<sup>9, 10</sup> перенес результат С.Л. Соболева на области с условием Джона, а в 1983 г. О.В. Бесов — на области с условием гибкого конуса с соболевским предельным показателем.

В определенном смысле класс областей с условием гибкого конуса — самый широкий класс областей, для которого верна теорема вложения с соболевским предельным показателем. В 1995 г. Бакли и Коскела<sup>11</sup> показали, что если  $G \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная односвязная область и пространство  $W_p^1(G)$  вложено в  $L_{\frac{2p}{2-p}}(G)$  при некотором  $p \in [1, 2)$ , то область  $G$  удовлетворяет условию Джона.

В 90-х годах теорема вложения С.Л. Соболева обобщалась на весовые пространства Соболева в работах Чуа<sup>12</sup>, Хурри–Сюръянен<sup>13, 14</sup>, Килпелайнена и Малы и др. В 1990 г. Смит и Стегенга<sup>15</sup> при  $q = p$ , в 1998 г. Хайлаш и Коскела<sup>16</sup> при  $q$  сколь угодно близком к максимально возможному, в 2000 г. Килпелайнен и Малы<sup>17</sup> для максимально возможного  $q$  установили неравенство Соболева–Пуанкаре для областей с  $\sigma$ -условием Джона при  $s = 1$ .

Еще из результатов В.Г. Мазьи 60-х годов стало очевидным, что величина предельного показателя в теоремах вложения при фиксированных показателях  $p$  и  $s$  существенно зависят от геометрических особенностей области. В 1997 г. Д.А. Лабутин<sup>18</sup> установил вложение с максимальным показателем  $q$ , отличным от предельного показателя Соболева, при  $s \in \mathbb{N}$  для областей с условием непрерывно гибкого  $\sigma$ -конуса. В 1999 г. при  $s = 1$  он распространил этот результат на

<sup>9</sup> Решетняк Ю.Г. Интегральные представления функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журнал. 1980. Т. 21, №6. С. 108–116.

<sup>10</sup> Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

<sup>11</sup> Buckley S., Koskela P. Soplev–Poincaré implies John // Math. Reserch Letters. 1995. V. 2. P. 577–594.

<sup>12</sup> Chua S.K. Weighted Sobolev inequalities on domains satisfying the chain condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117. P. 449–457.

<sup>13</sup> Hurri R. The weighted Poincaré inequalities // Math. Scand. 1990. V. 67. P. 145–160.

<sup>14</sup> Hurri–Syrjänen R. An improved Poincaré inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 213–232.

<sup>15</sup> Smith W., Stegenga D.A. Holder domains and Poincaré domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 319. P. 67–100.

<sup>16</sup> Haglash P., Koskela P. Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains // J. London Math. Soc. (2). 1998. V. 58, №185. P. 425–450.

<sup>17</sup> Kilpeläinen T., Malý J. Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwendungen. 2000. V. 19, №2. С. 369–380.

<sup>18</sup> Лабутин Д.А. Интегральное представление функций и вложение пространства Соболева на областях с нулевыми углами // Мат. заметки. 1997. Т. 61, №2. С. 201–219.

гельдеровы области<sup>19</sup>. В 2001 г. О.В. Бесов<sup>20</sup> установил теорему вложения Соболева с максимальным показателем  $q$  при  $s \in \mathbb{N}$  для областей с условием гибкого  $\sigma$ -конуса.

В 2001 г. Лабутин<sup>21</sup> показал, что в невесовом случае предельный показатель в этой теореме не может быть увеличен.

В 1945 г. В.И. Кондрашов<sup>22</sup> при  $p > 1$ , а в 1958 г. Гальярдо<sup>23</sup> при  $p = 1$  доказали, что вложения пространства Соболева в пространство Лебега компактно при допредельном показателе  $q$ , для ограниченной области с регулярной границей. Ранее, в 1930 г., Реллихом<sup>24</sup> был рассмотрен случай  $p = q$ . В.Г. Мазья<sup>25</sup> установил необходимые и достаточные условия компактности вложения при  $s = 1$  для области  $G$  с нерегулярной границей, формулируемые в терминах емкостных и изопериметрических неравенств. В случае  $s \geq 2$ , последовательным применением теоремы, установленной для  $s = 1$ , им получены достаточные условия компактности вложения. В 2001 г. О.В. Бесов<sup>26</sup> доказал теорему о компактности вложения в случае ограниченной области с условием гибкого  $\sigma$ -конуса и почти степенными весами.

## Цель работы

Цель работы состоит в том, чтобы

1. построить теорию непрерывности и компактности весового вложения пространства Соболева в пространство Лебега на новом классе областей, степенное вырождение которых может зависеть от направления;
2. исследовать вопрос о неулучшаемости полученных результатов.

## Методика исследования

В диссертационной работе получены и использованы новые интегральные представления и оценки функций через старшие производные, оценки сильного и слабого типов для линейных интегральных операторов, интегральные неравенства, а также классические методы анализа.

<sup>19</sup> Лабутин Д.А. Вложение пространства Соболева на гильбертовых областях // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 170–179.

<sup>20</sup> Бесов О.В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Мат. сборник. 2001. Т. 192, №3. С. 3–26.

<sup>21</sup> Лабутин Д.А. Неулучшаемость неравенства Соболева для класса нерегулярных областей // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 218–222.

<sup>22</sup> Кондрашов В.И. О некоторых свойствах функций из пространства  $L_p^\sigma$  // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48, №8. С. 563–565.

<sup>23</sup> Gagliardo E. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // Ric. Mat. 1958. V. 7. P. 102–137.

<sup>24</sup> Rellich F. Ein Satz über mittlere Konvergenz // Nachr. Akad. Wiss. Cöttingen. 1930. S. 30–35.

<sup>25</sup> Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

<sup>26</sup> Бесов О.В. О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 72–93.

## Основные результаты. Научная новизна

1. В работе введен новый класс областей — области с  $\lambda$ -анизотропным условием гибкого  $\sigma$ -конуса — который, по сути, является детализацией класса областей с условием гибкого  $\sigma$ -конуса. Однако, эта детализация позволяет существенно усилить известные ранее результаты о непрерывности и компактности весового вложения пространства Соболева в пространство Лебега.
2. Для введенного класса областей построена теория весовых вложений пространств Соболева в пространства Лебега и в пространство непрерывных функций со степенными весами.
3. Установлены достаточные условия компактности изученных вложений в случае почти степенных весов.
4. В невесовом случае при  $s = 1$  доказано, что вложение пространства Соболева в пространство Лебега невозможно ни при каких параметрах суммируемости, если область имеет “нулевые углы” более чем степенного порядка вырождения.
5. Для всех полученных результатов доказана их неулучшаемость на рассматриваемом классе областей.

Новизна результатов заключается в возможности отслеживать зависимость параметров суммируемости и гладкости, достаточных для вложения исследуемых пространств от анизотропных геометрических особенностей вырождения границы области. Для этого понадобилось разработать новую технику поточечной оценки функций через старшие производные, а также оценки сильного и слабого типов интегральных операторов для функций заданных на некотором классе анизотропно нерегулярных областей.

## Теоретическая и практическая ценность

Результаты работы имеют теоретическое значение. Методы и результаты работы, кроме самостоятельного интереса с точки зрения теории вложения пространств функций многих переменных, могут иметь различные применения в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

## Апробация результатов

В 2003 г. получена медаль Российской Академии Наук за лучшую студенческую работу по математике. Результаты работы были доложены на:

1. XLV научной конференции “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук” [7] (Долгопрудный, 2002 г., ноябрь)
2. Международной конференции “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященной 100-летию академика С.М. Никольского [8] (Москва, 2005 г., май)
3. XLVIII научной конференции “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук” [9] (Долгопрудный, 2005 г., ноябрь)
4. семинаре факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института, под руководством проф. А.А. Шананина (Долгопрудный, 2006 г., декабрь)
5. семинаре отдела теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН, под руководством академика С.М. Никольского и чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2007 г., май)
6. Международной конференции “Теория функций и вычислительные методы”, посвященной 60-летию проф. Н. Темиргалиева [10] (Боровое, Казахстан, 2007 г., июнь)
7. семинаре института математики университета им. Ф. Шиллера, под руководством проф. Х. Трибеля (Йена, Германия, 2007 г., июль)
8. Международной конференции “Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения”, посвященной 60-летию проф. Р. Ойнарова (Астана, Казахстан, 2007 г., сентябрь)
9. семинаре факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института, под руководством проф. А.А. Шананина (Долгопрудный, 2008 г., март)
10. Международной конференции “Function Spaces and Applications” (Фрайбург-на-Унштруте, Германия, 2008 г., июль)
11. Международной конференции “Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений”, посвященной 100-летию со дня рождения академика С.Л. Соболева [11] (Новосибирск, 2008 г., октябрь)

## Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 6 статей в научных журналах и 5 тезисов докладов на научных конференциях.

# Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из пяти глав и списка литературы из 55 наименований. Общий объем диссертации составляет 116 страниц.

## Содержание работы

### Глава 1. Введение

В первой главе обсуждается краткая история исследуемого вопроса, а также даются следующие основные определения и обозначения.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (0, \infty)^n, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \lambda_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i.$$

При  $|\lambda| = n$ ,  $d > 0$   $\lambda$ -кубом  $\lambda$ -диаметра  $d$  будем называть открытый параллелепипед вида

$$Q_\lambda(x, d) = x + (-d^{\lambda_1}, d^{\lambda_1}) \times (-d^{\lambda_2}, d^{\lambda_2}) \times \dots \times (-d^{\lambda_n}, d^{\lambda_n}),$$

$\lambda$ -длиной вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  будем называть величину

$$|x|_\lambda = \max_i |x_i|^{\frac{1}{\lambda_i}} = \inf \{d : x \in Q_\lambda(0, d)\}.$$

При  $x \in G$  положим

$$\rho_\lambda(x) = \min \left\{ 1, \inf_{y \in \mathbb{R}^n \setminus G} |x - y|_\lambda \right\}.$$

Определим еще два специальных класса параллелепипедов

$$\begin{aligned} Q_\lambda(x, d, k) &= x + kQ_\lambda(0, d) = \\ &= x + (-kd^{\lambda_1}, kd^{\lambda_1}) \times \dots \times (-kd^{\lambda_n}, kd^{\lambda_n}), \quad k \in (0, \infty), \\ Q(x, \bar{r}) &= Q(x, \{r_i\}_{i=1}^n) = x + (-r_1, r_1) \times \dots \times (-r_n, r_n). \end{aligned}$$

Обозначим

$$G_\delta = \{x \in G : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \delta\} \neq \emptyset,$$

где  $\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) = \inf\{|x - y| : y \in \mathbb{R}^n \setminus G\}$  — евклидово расстояние от точки  $x \in G$  до границы области  $G$ ,  $\delta > 0$  достаточно мало.

Пусть  $\chi_E$ ,  $\chi$ ,  $\chi_\lambda(\cdot, d)$ , — характеристические функции соответственно измеримого множества  $E$ , интервала  $(0, 1)$  и  $\lambda$ -куба  $Q_\lambda(0, d)$ .

Через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будем обозначать неотрицательные локально суммируемые весовые функции. Для измеримого множества  $E$  и весовой функции  $w$  определим

$$|E|_w = \int_{E \cap G} w(x) dx.$$

Через  $p'$  обозначают показатель, сопряженный показателю  $p$ , то есть

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

В работе изучается весовое пространство Соболева  $W_{p,v;r,u}^s(G)$ , определяемое, как совокупность функций с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{p,v;r,u}^s(G)} = \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_{p,v}(G)} + \|f\|_{L_{r,u}(G_\delta)} \right)$$

при некотором  $\delta > 0$ . При этом будем обозначать

$$W_{p,v;r}^s = W_{p,v;r,1}^s, \quad W_{p;r}^s = W_{p,1;r,1}^s.$$

Вводится новый класс областей с  $\lambda$ -анизотропным условием гибкого  $\sigma$ -конуса, а также еще один, более общий класс областей, и доказаны некоторые связи между ними.

**Определение 1.** Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\sigma > 1, \quad 0 < t^* < 1, \quad \kappa > 0, \quad \lambda = (0, \infty)^n, \quad |\lambda| = n, \quad \lambda_0 \geq \sigma^{-1}.$$

Пусть для каждой точки  $x \in G$  существует кусочно гладкий путь

$$\gamma : [0, t^*] \rightarrow G, \quad \gamma(0) = x, \quad Q_\lambda(\gamma(t), \kappa t^\sigma) \subset G, \\ \left| \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} \right| \leq \kappa^{-1} \rho_\lambda(\gamma(t))^{\lambda_i - \lambda_0} \quad \text{для п. в. } t \in [0, t^*].$$

Тогда будем говорить, что область  $G$  является областью с  $\lambda$ -анизотропным условием гибкого  $\sigma$ -конуса.

## Глава 2. Вспомогательные утверждения

Основными результатами второй главы являются интегральная оценка функции через старшие производные и некоторые оценки для ядер линейных интегральных операторов.

**Лемма 1.** Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\varepsilon \in (0, 1), \quad R > 0, \quad C \geq 1, \quad \lambda \in (0, \infty)^n, \quad |\lambda| = n,$$

$\gamma : [0, t_x] \rightarrow G$  — кусочно гладкий путь,  $r : [0, t_x] \rightarrow (0, \infty)$  — непрерывная кусочно гладкая функция со свойствами

$$0 < r(t) \leq \varepsilon \rho_\lambda(\gamma(t)), \quad \left| (r(t)^{\lambda_0})' \right| \leq C \quad \text{для п. в. } t \in [0, t_x], \quad r(t_x) \geq \varepsilon^2,$$

$\gamma(0) = x, \quad \rho_\lambda(\gamma(t_x)) \geq \varepsilon, \quad t_x \leq R, \quad |\gamma'(t)| \leq C \quad \text{для н. в. } t \in [0, t_x],$   
 Тогда

$$|f(x)| \leq CA_1 \left( \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + CA_2 \left( \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + CA_3 f(x),$$

где

$$A_1 g(x) = r(0)^{n(1-\lambda_0)} \int_0^{r(0)^{\lambda_0}} t^{s-1-n} \int_{y \in Q_\lambda(x, r(0), tr(0)^{-\lambda_0})} g(y) dy dt,$$

$$A_2 g(x) = \int_0^{t_x} (t + r(0)^{\lambda_0})^{s-1} r(t)^{-n} \int_{y \in Q_\lambda(\gamma(t), r(t))} g(y) dy dt,$$

$$A_3 f(x) = \int_{y \in Q_\lambda(\gamma(t_x), r(t_x))} |f(y)| dy,$$

где  $C$  не зависит от  $f, x$ .

Рассмотрим оператор

$$Kf(x) = \int_G k(x, y) f(y) dy, \quad x \in G,$$

где измеримое множество  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая неотрицательная функция.

Введем при  $1 \leq p < q < \infty$ ,  $x \in G$ ,  $E \subset G$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $d > 0$

$$k_d(x, y) = \chi_\lambda(x - y, d) k(x, y),$$

$$k(x, y, d) = (1 - \chi_\lambda(x - y, d)) k(x, y),$$

$$|||k|||_x = |||k|||_{p, v; q, w; x} = \sup_{d > 0} \left\| k(x, \cdot, d) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} |L_{p'}(G)| \right\| |Q_\lambda(x, d)|^{\frac{1}{q}},$$

$$|||k|||_E = |||k|||_{p, v; q, w; E} = \sup_{x \in E} |||k|||_{p, v; q, w; x}.$$

**Лемма 2.** Для интегрального оператора  $K$  с ядром  $k$  существует постоянная  $C > 0$  такая, что при любых  $d > 0$ ,  $E \subset G$ ,  $f \in L_{p, v}(G)$

$$\sup_{\eta > 0} \eta |\{x \in E: |Kf(x)| > \eta\}|_w^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C \left( \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{p}{q}} |||k_d|||_E + |||k|||_E |E|_w^{\frac{1}{q}} \sup_{x \in E} |Q_\lambda(x, d)|_w^{-\frac{1}{q}} \right) \|f\|_{L_{p, v}(G)}.$$

### Глава 3. Вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций

В третьей главе устанавливаются весовые теоремы вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций для областей с  $\lambda$ -анизотропным условием гибкого  $\sigma$ -конуса, а также некоторые их обобщения.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — область с условием  $\lambda$ -анизотропного гибкого  $\sigma$ -конуса,  $a \geq \lambda_0 - n$ ,  $b \geq 0$ , и выполнены условия

$$1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \quad s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_0) + 1}{p} + \frac{n + b}{\lambda_0 q} \geq 0. \quad (1)$$

Пусть, более того, одно из неравенств (1) строгое.

Тогда имеет место вложение  $W_{p,v;r}^s(G) \subset L_{q,w}(G)$  и справедлива оценка

$$\|f\|_{L_{q,w}(G)} \leq C \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_{p,v}(G)} + \|f\|_{L_r(G_\delta)} \right),$$

при  $w = \rho_\lambda^b$ ,  $v = \rho_\lambda^a$  и некоторых  $C$ ,  $\delta > 0$ , не зависящих от  $f$ .

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — область с условием  $\lambda$ -анизотропного гибкого  $\sigma$ -конуса,  $a \geq \lambda_0 - n$ ,  $b \geq 0$ , и выполнены условия

$$1 < p < \infty, \quad 1 \leq r < \infty, \quad s - \frac{n}{p} > 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_0) + 1}{p} + \frac{b}{\lambda_0} \geq 0, \quad \left| s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_0) + 1}{p} \right| + \frac{b}{\lambda_0} > 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|wf\|_{C(G)} \leq C \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_{p,v}(G)} + \|f\|_{L_r(G_\delta)} \right),$$

при  $w = \rho_\lambda^b$ ,  $v = \rho_\lambda^a$  и некоторых  $C$ ,  $\delta > 0$ , не зависящих от  $f$ .

## Глава 4. Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега

В четвертой главе обсуждается вопрос о компактности весового вложения пространства Соболева в пространство Лебега. Из результатов пятой главы следует, что нельзя гарантировать компактность вложения без усиления (по сравнению с условиями теоремы вложения) требований на весовые функции. В связи с этим доказаны два утверждения. Первое из которых говорит о том, что компактность вложения можно гарантировать при некоторой небольшой поправке на весовые функции. А второе гарантирует компактность вложение, в некотором ослабленном смысле, без каких-либо усиленных требований на вес.

В качестве весовых функций будем рассматривать

$$v(x) = \frac{\rho_\lambda(x)^a}{\varphi(\rho_\lambda(x))}, \quad w(x) = \rho_\lambda(x)^b \psi(\rho_\lambda(x)),$$

где  $a \geq \lambda_0 - n$ ,  $b \geq 0$ . Функции  $\varphi, \psi$  положительные, непрерывные, неубывающие на  $(0, 1]$ ,

$$\varphi(0)\psi(0) = 0 \tag{2}$$

и удовлетворяют при некоторых  $c^{(1)}, c^{(2)} \geq 1$  условиям

$$\varphi(t) \leq c^{(1)} \varphi\left(\frac{t}{2}\right), \quad \psi(t) \leq c^{(2)} \psi\left(\frac{t}{2}\right). \tag{3}$$

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — ограниченная область с условием  $\lambda$ -анизотропного гибкого  $\sigma$ -конуса,  $a \geq \lambda_0 - n$ ,  $b \geq 0$ ,

$$v(x) = \frac{\rho_\lambda(x)^a}{\varphi(\rho_\lambda(x))}, \quad w(x) = \rho_\lambda(x)^b \psi(\rho_\lambda(x)),$$

и выполнены условия (2), (3),

$$1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0, \quad s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_0) + 1}{p} + \frac{n + b}{\lambda_0 q} \geq 0.$$

Тогда вложение  $W_{p,v;r}^s(G) \subset L_{q,w}(G)$  компактно.

**Теорема 4.** Пусть  $G$  — ограниченная область с условием  $\lambda$ -анизотропного гибкого  $\sigma$ -конуса,  $a \geq \lambda_0 - n$ ,  $b \geq 0$ ,

$$1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0, \quad s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_0) + 1}{p} + \frac{n + b}{\lambda_0 q} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \rho_\lambda(x)^a, & w(x) &= \rho_\lambda(x)^b, \\ w_\alpha(x) &= \psi(\rho_\lambda(x))^\alpha w(x), & \alpha &> 0, \end{aligned}$$

где функция  $\psi$  — положительная, непрерывная, неубывающая на  $(0, 1]$ ,

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(t) \leq c\psi\left(\frac{t}{2}\right)$$

при некотором  $c \geq 1$ .

Тогда из любой ограниченной в  $W_{p,v;r}^s(G)$  последовательности  $\{f_k\}$  можно выделить подпоследовательность сходящуюся во всех пространствах

$$L_{q,w_\alpha}(G), \quad \alpha > 0$$

к некоторой функции  $f \in L_{q,w}(G)$  такой, что

$$\|f\|_{L_{q,w}(G)} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L_{q,w}(G)}.$$

## Глава 5. Неулучшаемость теорем вложения

В пятой главе устанавливаются некоторые необходимые условия вложения.

**Определение 2.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $x \in \partial G$ . Пусть существует прямоугольная система координат с началом в точке  $x$ , координаты точек в которой будем обозначать  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Обозначим

$$\Omega(t) = \{\xi \in G : \xi_1 = t\}$$

сечение множества  $G$   $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью, перпендикулярной первой координатной оси. Пусть существует  $T > 0$  такое, что

$$S(t) = |\Omega(t)|_{(n-1)} < \infty \quad \text{при } 0 < t < T,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} S(t) = 0,$$

где  $|E|_{(n-1)}$  —  $(n-1)$ -мерная мера Лебега множества  $E$ .

Тогда будем говорить, что  $x$  — точка вырождения множества  $G$ .

**Определение 3.** Пусть  $x$  — точка вырождения множества  $G$ . Для каждого  $\varepsilon \in (0, 1)$  при  $t \in (0, T)$  определим

$$S_\varepsilon(t) = \left| \bigcap_{\tau \in [(1-\varepsilon)t, t]} \omega(\tau) \right|_{(n-1)}, \quad S^\varepsilon(t) = \left| \bigcup_{\tau \in [(1-\varepsilon)t, t]} \omega(\tau) \right|_{(n-1)},$$

где

$$\omega(\tau) = \{(0, \xi_2, \dots, \xi_n) : (\tau, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Omega(\tau)\}$$

проекция множества  $\Omega(\tau)$  на координатную гиперплоскость  $\xi_1 = 0$ .

Будем говорить, что  $x$  — *регулярная точка вырождения множества  $G$* , если найдется  $\varepsilon \in (0, 1)$  такое, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{S^\varepsilon(t)}{S_\varepsilon(t)} < \infty.$$

**Определение 4.** Пусть  $x$  — точка вырождения множества  $G$ . Будем говорить, что  $x$  — *точка монотонного вырождения множества  $G$* , если для всех  $t_1$  и  $t_2$ , таких что  $0 < t_1 < t_2 < T$

$$\omega(t_1) \subset \omega(t_2).$$

**Определение 5.** Пусть  $x$  — точка вырождения множества  $G$ . Будем говорить, что  $x$  — *точка  $\sigma$ -вырождения множества  $G$*  при некотором  $\sigma > 0$ , если найдется  $\varepsilon \in (0, 1)$  такое, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0+0} \frac{S^\varepsilon(t)}{t^{(n-1)\sigma}} > 0.$$

**Теорема 5.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество и при некоторых

$$1 \leq p < q \leq \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0$$

имеет место вложение  $W_{p,r}^s(G) \subset L_q(G)$  и при некотором  $C > 0$  справедлива оценка

$$\|f\|_{L_q(G)} \leq C \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{L_r(G_\delta)} \right).$$

Пусть на  $\partial G$  существует регулярная точка  $x$  вырождения множества  $G$ .

Тогда  $x$  является точкой  $\sigma$ -вырождения множества  $G$  при

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{\sigma(n-1)+1}{q} \geq 0.$$

Рассмотрим открытые множества, имеющие точку монотонного вырождения. При этом будем полагать, что существует гладкая функция  $\varphi$  такая, что  $S(t) \asymp \varphi(t)$  при малых  $t$ , т.е. существуют  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$C_1 \varphi(t) \leq S(t) \leq C_2 \varphi(t),$$

и будем говорить, что множество  $\varphi$ -монотонно относительно этой точки.

**Теорема 6.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое  $\varphi$ -монотонное множество относительно некоторой точки. Пусть функция  $\varphi$  выпукла вниз и при каждом  $\varepsilon \in (0, 1)$  и достаточно малых  $t > 0$

$$\varphi'(t) \leq C_\varepsilon \varphi(t)^{1-\varepsilon}$$

при некоторых  $C_\varepsilon > 0$ .

Тогда ни при каких  $1 \leq p < q \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq q$  вложение  $W_{p,r}^1(G) \subset L_q(G)$  не может иметь места.

Также в пятой главе рассматривается применение всех доказанных теорем для области вида анизотропного шара. А также устанавливается теорема, доказывающая неулучшаемость основных теорем о непрерывности и компактности вложения.

**Теорема 7.** Пусть область  $G \in \mathbb{R}^n$ :

$$G = \{x : 0 < x_n < 1, |x_1| < x_n^{\alpha_1}, |x_2| < x_n^{\alpha_2}, \dots, |x_{n-1}| < x_n^{\alpha_{n-1}}\},$$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq 1.$$

Тогда при

$$1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N}$$

вложение  $W_{p,r}^s(G) \subset L_q(G)$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$s - \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}{p} + \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}{q} \geq 0$$

и компактно, когда

$$s - \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}{p} + \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}{q} > 0;$$

при

$$1 < p < \infty, \quad 1 \leq r < \infty, \quad s \in \mathbb{N}$$

вложение  $W_{p,r}^s(G) \subset C(G)$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$s - \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}{p} > 0.$$

**Теорема 8.** Пусть

$$\sigma \geq 1, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad |\lambda| = n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \sigma^{-1},$$

$a \geq -\lambda_0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , весовые функции  $v = \rho_\lambda^a$ ,  $w = \rho_\lambda^b$ ,  $u$  — произвольная, и выполнены условия

$$1 \leq p < q \leq \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует ограниченная область  $G \subset \mathbb{R}^n$  с условием  $\lambda$ -анизотропного гибкого  $\sigma$ -конуса такая, что вложение  $W_{p,v,r,u}^s(G) \subset L_{q,w}(G)$  не имеет места, если

$$s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_n) + 1}{p} + \frac{n + b}{\lambda_n q} < 0$$

и не является компактным, если

$$s - \frac{\sigma(n + a - \lambda_n) + 1}{p} + \frac{n + b}{\lambda_n q} \leq 0.$$

## Публикации по теме диссертации

### Статьи в научных журналах

1. Трушин Б.В. Вложение пространства Соболева в пространство Орлича и в ВМО со степенными весами // Докл. РАН. 2003. Т. 391, №5. С. 602-604.
2. Трушин Б.В. Вложение пространства Соболева в пространства Орлича и ВМО со степенными весами // Тр. МИАН. 2003. Т. 243. С. 334-345.
3. Трушин Б.В. Вложение пространства Соболева в пространства Орлича для области с нерегулярной границей // Мат. заметки. 2006. Т. 79. №5. С. 767-778.
4. Трушин Б.В. О вложении пространства Соболева в пространство Лебега для класса анизотропных нерегулярных областей // Евраз. мат. журнал. 2007. №2. С. 64-70.
5. Трушин Б.В. Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Докл. РАН. 2008. Т. 418, №3. С. 313-316.
6. Трушин Б.В. Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Тр. МИАН. 2008. Т. 260. С. 297-319.

### Тезисы научных конференций

7. Трушин Б.В. Вложение пространства Соболева в пространство Орлича для области с нерегулярной границей // Тр. XLV науч. конф. "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". 2002. Ч. VII. С. 15.
8. Трушин Б.В. Теорема вложения Соболева для некоторого класса областей // Международная конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посв. столетию С.М. Никольского. 2005. С. 85.
9. Трушин Б.В. Теоремы вложения для некоторого класса областей // Тр. XLVIII науч. конф. "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". 2005. Ч. VII. С. 21-22.
10. Трушин Б.В. Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Материалы Международной конф. "Теория функций и вычислительные методы", посв. 60-летию со дня рождения проф. Н. Темиргалиева. 2007. С. 211-213.
11. Трушин Б.В. Весовые теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Международная конф. "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений", посв. 100-летию со дня рождения академика С.Л. Соболева. 2008. С. 212.

*Трушин Борис Викторович*

**НЕПРЕРЫВНЫЕ И КОМПАКТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ  
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА  
АНИЗОТРОПНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ**

Подписано в печать 05.11.08. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ . Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №26.

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9