

Московский государственный авиационный институт
(государственный технический университет) (МАИ)

На правах рукописи

Козориз Виктор Иванович

Аналитические исследования динамики спинярующего
релятивистского электрона в электромагнитных полях

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре «Прикладной физики» в Московском государственном авиационном институте (государственном техническом университете) (МАИ) имени Серго Орджоникидзе.

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук доцент
Мусин Юрат Рашитович.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук
профессор Борисов Анатолий Викторович
- кандидат физико-математических наук
доцент Самсоненко Николай Владимирович

Ведущая организация – Российский научный центр Курчатовский институт.

Защита состоится 21 ноября 2006 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.203.01 в Российском университете дружбы народов (115419, Москва, ул. Орджоникидзе, 3, зал № 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Российского университета дружбы народов.

Автореферат разослан 18 сентября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Чехлова Т.К.



Общая характеристика работы

Изучение движения вращающихся объектов – одна из старейших задач физики, возникшая еще в механике Ньютона. Она интенсивно исследуется на протяжении нескольких веков в рамках различных физических теорий: общая теория относительности (уравнения Паппетру), квантовая механика (спин-орбитальное взаимодействие), квазиклассическая теория, суперсимметричная механика и др.

С 80-х годов XX в. стало развиваться направление, согласно которому квантовая теория спина (включая уравнение Дирака) получается в результате обобщения классической механики на алгебру с антикоммутирующими переменными (алгебру Грассмана) с ее последующим квантованием.

Классические механические системы с антикоммутирующими переменными не являются классическими в прямом смысле. Их обычно относят к *псевдоклассической* или *до квантовой* механике. Термин «псевдомеханика» или «псевдоклассическая механика» введен Р.Касалбуони в 1976 г.

Мы будем использовать следующие понятия. Модели, включающие только стандартные координаты, будут называться *классическими моделями*. Они обычно имеют векторный или тензорный тип. Модели, включающие антикоммутирующие координаты, называются здесь *псевдоклассическими*. Псевдоклассические модели с векторными антикоммутирующими степенями свободы, которые исследуются в данной диссертации, называются *спиновыми* (или *спирирующими*) *частицами*, а модели со спинорными антикоммутирующими степенями свободы, описывающие частицу в суперпространстве Минковского, называют *суперчастицами*.

Спиновые частицы являются, в некотором смысле, классическим пределом дираковской частицы. После первого квантования антикоммутирующие переменные отображаются в матрицы Дирака. Это общая особенность моделей спиновых частиц.

Расширение фазового пространства релятивистских частиц с помощью коммутирующих или антикоммутирующих координат определяет симметрию и поведение модели во внешнем поле и ее свойства после квантования.

Актуальность работы

Движение спинирующих частиц во внешних полях представляет интерес и с практической точки зрения (циклические электронные ускорители и накопители, прецессия гироскопов, рассеяние поляризованных пучков, тонкая структура атомных спектров и т.п.) и с точки зрения проверки предсказаний таких фундаментальных теорий, как ОТО (отклонения фотона в гравитационном поле Солнца и поле черных дыр) и теория суперсимметрии (движение суперсимметричных частиц).

Диапазон исследований, проводимых в этой области, необычайно широк:

- рассматриваются основные аспекты $N=1$, $N=2$ -суперсимметричных калибровочных теорий,
- исследуются проблемы нарушения суперсимметрии,
- рассматривается описание взаимодействующих частиц со спином,
- создается множество моделей спинирующих частиц – классифицировать их можно по таким атрибутам как масса, алгебраические (стандартные или антикоммутирующие) и геометрические характеристики внутренних степеней свободы (вектор, спинор, кручение),
- рассматривается квантование псевдоклассической модели вейлевской частицы,
- обсуждается проблема квантования классических постоянных,
- исследуется поведение частиц во внешних полях и многое др.

Псевдоклассическая механика (механика над алгеброй Грассмана) позволяет не только получать принципиально новые результаты, но и по-новому подойти к решению старых задач. В частности, стало возможным более наглядное и простое исследование вклада в уравнения движения спина элементарных частиц и точное решение ряда задач.

Цель работы:

Используя методы псевдоклассической механики, получить точные решения для уравнений движения и эволюции спина электрона во внешних электромагнитных полях с учетом спин-орбитального взаимодействия и исследование этих движений.

Достоверность результатов обеспечена тем, что они опираются на хорошо разработанные понятия псевдоклассической механики и в предельных случаях совпадают с ранее полученными результатами исследования движения частиц во внешних полях в рамках классической и квантовой механик.

Научная новизна состоит в том, что в отличие от работ Пао Лу, Д.М.Фрадкина и Р.Х.Гуда¹, А.Е.Лобанова² предложенный в данной диссертации подход позволяет учесть спин-орбитальное взаимодействие в системе уравнений, описывающих движение релятивистского электрона в пространстве и эволюцию его спина, или строго доказать его отсутствие и получить точные решения для ряда задач более простым и наглядным образом.

К новым результатам можно отнести также то, что в отличие от работы Ф.А.Березина и М.С.Маринова³ в данном диссертационном исследовании удалось получить точное решение на траекторию релятивистского электрона в кулоновском поле и достаточно подробно исследовать задачу рассеяния.

Научная и практическая ценность диссертации заключается в том, что полученные результаты могут непосредственно использоваться в дальнейшем при исследовании частиц со спином. В первую очередь, это обусловлено их возможным использованием для контроля численных расчетов в задачах о движении электрона в полях одиночных атомных ядер, в периодических полях ядер кристаллов, в полях ускорителей и накопителей.

Развитые в диссертации подходы и полученные с их использованием результаты могут быть полезны в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, ФИ РАН, РИЦ "Курчатовский институт", Томский ГУ им.В.В.Куйбышева и др.

Апробация работы и публикации

По материалам диссертации опубликовано 6 работ. Основные результаты диссертационной работы были изложены на X Российской гравитационной

¹ Pao Lu, D.M. Fradkin, R.H.Good, Classical approximation for the change of polarization in potential scattering. Nuovo Cimento, Vol. 34, N3, 1964, 581-590

² А.Е. Лобанов, Ковариантное описание спина электрона в электромагнитном поле. Препринт физ. фак. МГУ. N24/1988, 5 стр.

³ F.A. Beresin, M.S. Marinov, Particle spin dynamics as the Grassman variant of classical mechanics, Ann.Phys. 1977, 104, N2, 336-362

конференции (июнь 1999 г.).

Автор выносит на защиту

- методику исследования частиц со спином, которая строится на объединении понятия супервремени, модели Ди Векья–Равидала, решения методом нильпотентного возмущения (Ф.А.Березин) и процедуры усреднения Ю.Р.Мусина;
- математическое доказательство равенства нулю члена, учитывающего спин-орбитальное взаимодействие в уравнениях движения релятивистского спинового электрона в постоянном и однородном магнитном или электрическом полях;
- математическое доказательство того, что спин-орбитальное взаимодействие при движении электрона в поле плоской циклической электромагнитной волны, равно нулю, что полностью согласуется с результатами квантовой механики;
- аналитическое выражение для траектории релятивистского электрона в кулоновском поле с учетом его спина. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие не равно нулю, а его учет приводит к трехмерному пространственному движению;
- аналитические выражения для угла и сечения рассеяния релятивистского электрона в кулоновском поле с учетом его спина. Показано совпадение результатов, в случае малых углов рассеяния, с известной квантовомеханической формулой Мотта, а для произвольных углов проведено численное сравнение, показывающее хорошее совпадение до угла рассеяния $\pi/2$.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 169 источников. Работа изложена на 149 страницах, включая 86 рисунков.

В первой главе дается обзор всевозможных моделей и методов описания спина частицы в классической и псевдоклассической механике, рассматриваются их преимущества и недостатки, показывается актуальность

темы исследования и предлагается обобщенная методика исследования спинного релятивистского электрона.

Базовой моделью исследования является векторная модель с внутренними степенями свободы, описанными с помощью антикоммутирующих координат – грассмановых чисел, образующих алгебру Грассмана. Ассоциативная алгебра с единицей называется *алгеброй Грассмана*, если в ней существует система образующих, состоящая из элементов ζ_i , со свойствами

1)

$$\zeta_i \zeta_k + \zeta_k \zeta_i = 0, \text{ в частности, } \zeta_i^2 = 0 \text{ (свойство нильпотентности)}. \quad (1)$$

2) Любое другое соотношение между ζ_i является следствием (1).

Логически завершенную псевдоклассическую модель можно построить, отталкиваясь от категории «супервремени», когда вместо обычного времени s рассматривается обобщенное супервремя с координатами (s, τ) , где τ – новая антикоммутирующая переменная и модели Ди Векья–Равдала (1979), представляющей собой последовательно развитую механику на пространстве супервремени (s, τ) и суперкоординат

$$X^\mu(s, \tau) = x^\mu(s) + i\theta^\mu(s)\tau,$$

где $x^\mu(s)$ – пространственные координаты, $\theta^\mu(s) = -i \left. \frac{\partial X^\mu(s, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$ – *спиновые*

координаты частицы (грассмановы числа) ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Результирующие уравнения движения, описывающие спинирующий релятивистский электрон, (для простоты положим $c = 1, m_e = 1$) имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_\mu - qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - \frac{q}{2}S^{\nu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha} &= 0 \\ \dot{\theta}_\mu - qF_{\mu\nu}\theta^\nu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $S^{\nu\alpha} = -i\theta^\nu\theta^\alpha$ – тензор спина, $F_{\mu\alpha} = \partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu$ – тензор электромагнитного поля; A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ (что отвечает $t,$

x, y, z , соответственно); $q = -e$ – заряд электрона. Точкой обозначается производная по собственному времени частицы s .

Отличие этих уравнений от уравнений Пао Лу, Д.М.Фрадкина и Р.Х.Гуда¹, А.Е.Лобанова², состоит в наличии дополнительного слагаемого в пространственных уравнениях – силы Кельвина³, обусловленной взаимодействием спина с градиентом электромагнитного поля.

Если перейти от уравнений для спиновых координат к уравнениям для 4-тензора спина, то будем иметь

$$\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial s} = q(F_{\rho}^{\mu} S^{\rho\nu} - F_{\rho}^{\nu} S^{\rho\mu}). \quad (3)$$

В векторном виде, полагая $S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha} V_{\beta}$ (где V_{β} – 4-скорость электрона), получим

$$\frac{\partial S^{\alpha}}{\partial s} = qF^{\alpha\beta} S_{\beta}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) совпадают с традиционными уравнениями Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) для частицы с гиромангнитным отношением $g = 2$.

Одним из методов решения полученной системы уравнений может служить метод, предложенный в статье Ф.А.Березина и М.С.Маринова⁴, где авторами рассмотрена задача движения нерелятивистского электрона в кулоновском поле и были получены уравнения движения, в которых слагаемое со спином они рассматривают как нильпотентное возмущение. Решение задач методом теории возмущения, в силу нильпотентности грассмановых чисел, дает не приближенное, а точное решение.

В данной главе также приводится подробное описание процедуры перехода

¹ Pao Lu, D.M. Fradkin, R.H.Good, Classical approximation for the change of polarization in potential scattering. Nuovo Cimento, Vol. 34, N3, 1964, 581-590

² А.Е. Лобанов, Ковариантное описание спина электрона в электромагнитном поле. Препринт физ. фак. МГУ. N24/1988, 5 стр.

³ С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп, Электродинамика, Москва, Наука, 1982.

⁴ F.A. Beresin, M.S. Marinov, Particle spin dynamics as the Grassman variant of classical mechanics, Ann.Phys. 1977, 104, N2, 336-362

от грассмановых чисел к действительным – процедура усреднения¹. Согласно этой процедуре, усредненное значение $\langle f \rangle$ любой величины f алгебры Грассмана равно

$$\langle f \rangle = i \int f(\theta) \rho(s, \theta) d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 d\theta^0,$$

где $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$, $\rho(s, \theta)$ – функция плотности:

$$\rho(s, \theta) = \left(\frac{i}{24} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^\alpha \theta^\beta + \dot{x}_\mu S_\mu \right) \theta^\gamma \theta^\delta.$$

Здесь S_μ – классический 4-спин. Фактически, в результате усреднения нечетные величины обнуляются, а четные становятся действительными числами.

Во второй главе проведено исследование в рамках предложенной методики простейших случаев движения. Таковыми являются: движение спинового электрона в постоянном и однородном магнитном поле, в таком же электрическом поле, и движение электрона в поле плоской циклической электромагнитной волны.

Самым серьезным преимуществом этой методики является здесь то, что с ее помощью очень легко доказать, что спин орбитальное взаимодействие в этих полях равно нулю. Таким образом, нет необходимости постулировать этот факт, известный из квантовой механики, а запись уравнений для спина (2) через спиновые координаты делает решение намного проще и понятней, чем запись в тензорном или векторном виде.

Точные решения уравнений для электрона в постоянном магнитном поле H , направленном вдоль оси Oz , будут следующими

$$\left. \begin{aligned} t &= U^t(0)s + t(0), \\ x &= \frac{1}{\omega} (U^x(0) \sin \omega s + U^y(0) \cos \omega s) + \left(x(0) - \frac{1}{\omega} U^y(0) \right), \\ y &= \frac{1}{\omega} (U^x(0) \cos \omega s + U^y(0) \sin \omega s) + \left(y(0) - \frac{1}{\omega} U^x(0) \right), \\ z &= U^z(0)s + z(0), \end{aligned} \right\}$$

¹ Ю.Р. Мусин, К теории суперчастицы Ди Векчи-Равндала, Изв. вуз. СССР. Физика, 1991, N7, с.5-7

$$\left. \begin{aligned} \theta^0 &= \theta^0(0), \\ \theta^1 &= \theta^1(0) \cos \omega s - \theta^2(0) \sin \omega s, \\ \theta^2 &= \theta^1(0) \sin \omega s + \theta^2(0) \cos \omega s, \\ \theta^3 &= \theta^3(0). \end{aligned} \right\}$$

где $\omega = eH$; $[U'(0), U''(0), U'''(0), U^{(4)}(0)]$, $[t(0), x(0), y(0), z(0)]$, $[\theta^0(0), \theta^1(0), \theta^2(0), \theta^3(0)]$ - компоненты 4-скорости, пространственных и спиновых координат в начальный момент времени, соответственно.

Движение электрона происходит по спирали с постоянным радиусом и шагом, закрученной вдоль направления поля. Этот результат совпадает с результатом движения бесспинового электрона.

Для случая плоской круговой орбиты поведение 4-вектора спина будет выглядеть так

$$S_0 = 0, \quad S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \cos \Omega t, \quad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \Omega t, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2}, \quad (5)$$

где $\Omega = \omega/\gamma$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\omega^2 r^2}$.

Таким образом, 4-спин электрона прецессирует с угловой скоростью Ω относительно направления поля.

В постоянном и однородном электрическом поле E , направленном вдоль оси Ox , будем иметь следующие решения уравнений движения

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{\omega} (U'(0) \operatorname{sh} \omega s + U''(0) \operatorname{ch} \omega s) + (t(0) - \frac{1}{\omega} U^{(4)}(0)), \\ x &= \frac{1}{\omega} (U'(0) \operatorname{ch} \omega s + U''(0) \operatorname{sh} \omega s) + (x(0) - \frac{1}{\omega} U'(0)), \\ y &= U'''(0)s + y(0), \\ z &= U^{(4)}(0)s + z(0), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta^0 &= \theta^0(0) \operatorname{ch} \omega s + \theta^1(0) \operatorname{sh} \omega s, \\ \theta^1 &= \theta^0(0) \operatorname{sh} \omega s + \theta^1(0) \operatorname{ch} \omega s, \\ \theta^2 &= \theta^2(0), \\ \theta^3 &= \theta^3(0). \end{aligned} \right\}$$

где $\omega = eE$; $[U'(0), U''(0), U'''(0), U^{(4)}(0)]$, $[t(0), x(0), y(0), z(0)]$, $[\theta^0(0), \theta^1(0), \theta^2(0), \theta^3(0)]$ - компоненты 4-скорости, пространственных и спиновых координат в начальный момент времени, соответственно.

Таким образом, электрон движется с ускорением по направлению поля.

Поведение 4-вектора спина выглядит следующим образом

$$S_0 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega s, \quad S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \omega s, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2}.$$

В своем движении 4-спин электрона ложится в пределе $s \rightarrow \infty$ на световой конус, совершая гиперболический поворот.

Для плоской циклической электромагнитной волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= (0, E_y(t'), E_z(t')) \\ \vec{H} &= (0, -E_z(t'), E_y(t')) \end{aligned} \right\}$$

$$t' = t - x, \quad E_y(t') = E_0 \cos \omega t', \quad E_z(t') = E_0 \sin \omega t',$$

где ω – частота электромагнитной волны, размерный множитель полагаем равным единице; уравнения (2) будут иметь следующее решение

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{e^2 E_0^2}{\omega^2} \left(s - \frac{1}{\omega} \sin \omega s \right) - s, \\ x &= \frac{e^2 E_0^2}{\omega^2} \left(s - \frac{1}{\omega} \sin \omega s \right), \\ y &= \frac{e E_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega s), \\ z &= \frac{e E_0}{\omega^2} (\omega s - \sin \omega s), \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \theta^0 &= \frac{e E_0}{\omega} (T^2 \sin \omega s - T^3 \cos \omega s), \\ \theta^1 &= \frac{e E_0}{\omega} (T^2 \sin \omega s - T^3 \cos \omega s), \\ \theta^2 &= T^2, \\ \theta^3 &= T^3, \end{aligned} \right\}$$

где T^0, T^1, T^2, T^3 – нечетные константы интегрирования.

Поведение 4-вектора спина будет описываться выражением

$$S_0 = 0, \quad S_1 = A, \quad S_2 = -A \frac{e E_0}{\omega} \sin \omega s, \quad S_3 = A \frac{e E_0}{\omega} \cos \omega s,$$

где $A = -iT^2 T^3$ – четная величина.

В третьей главе найдено точное аналитическое выражение для траектории спинового электрона в кулоновском поле.

Исходные уравнения для траектории имеют вид

$$\frac{K_2^2 (2 \operatorname{ctg} \gamma \gamma' R' - R'')}{\sin^4 \gamma} = \left(\frac{K_2^2 (\gamma')^2}{\sin^4 \gamma} + \frac{K_2^2}{\sin^2 \gamma} - e^2 Q^2 \right) R + 2eQ\Lambda R - eK_1 Q$$

$$\gamma'' - 2 \operatorname{ctg} \gamma (\gamma')^2 = \frac{1}{2} \sin 2\gamma$$

где $R = 1/r$, r – радиус-вектор, γ – полярный угол, e – заряд электрона, Q – заряд центра, $\Lambda = -S^{01}$ – компонента тензора спина, $K_2 = K$ – 2-я компонента 4-

импульса электрона, $K_1=E$ – полная энергия электрона, считаем $m_e = 1$, $c = 1$; штрихом обозначается производная по углу α (азимутальный угол).

Решение ищем в виде разложения по Λ

$$\left. \begin{aligned} R(\alpha, \Lambda) &= R_0(\alpha) + R_1(\alpha)\Lambda \\ \gamma(\alpha, \Lambda) &= \gamma_0(\alpha) + \gamma_1(\alpha)\Lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где R_0, γ_0 – решение уравнения для частицы без спина, R_1, γ_1 – возмущенное решение. Решение (6), в силу нильпотентности Λ , будет не приближенным, а точным.

Возможны три варианта траекторий

$$1) \frac{eQ}{K} < 1$$

$$\left. \begin{aligned} r(\alpha_0) &= \frac{P}{1+D_0 \cos \omega \alpha_0} - \Lambda \frac{P((M+H) \cos \omega \alpha_0 - H)}{(1+D_0 \cos \omega \alpha_0)^2}, \\ \gamma(\alpha_0) &= \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0, \\ \alpha &= \alpha_0(1 - \Lambda B / \omega), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где A – константа интегрирования, $\rho = \frac{eQ}{K}$, $\omega = \sqrt{1 - \rho^2}$;

$$P = \frac{K\omega^2}{E\rho}, \quad H = \frac{2\rho}{K\omega^2}, \quad B = \frac{\rho}{K\omega}, \quad M = \frac{B(D_0 + 1)^2}{\omega D_0}, \quad D_0 = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 + \frac{2}{E}(1 - \rho^2)},$$

Решение получено над алгеброй Грассмана, переход от грассмановых чисел к действительным осуществляется стандартным способом с помощью «процедуры усреднения».

Возможна финитная $D_0 < 1$ (см. рис.1) и инфинитная $D_0 > 1$ (см. рис.2) траектории движения.

Финитная траектория ($D_0 < 1$):

Траектория, вообще говоря, имеет вид незамкнутой трехмерной розетки, заключенной в области изображенной на рисунке 1, где

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= \frac{P}{1+D_0} - \Lambda \frac{PM}{(1+D_0)^2}, & r_{\max} &= \frac{P}{1-D_0} + \Lambda \frac{P(M+2H)}{(1-D_0)^2}, \\ \gamma_{\min} &= \pi/2 - \Lambda A, & \gamma_{\max} &= \pi/2 + \Lambda A. \end{aligned} \right\}$$

Инфинитная траектория ($D_0 > 1$):

Траектория – трехмерная гипербола (рис.2). Углы α^* , при которых траектория уходит на бесконечность

$$\alpha^* = \pm(1 - \Lambda \frac{B}{\omega}) \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{1}{D_0}\right).$$

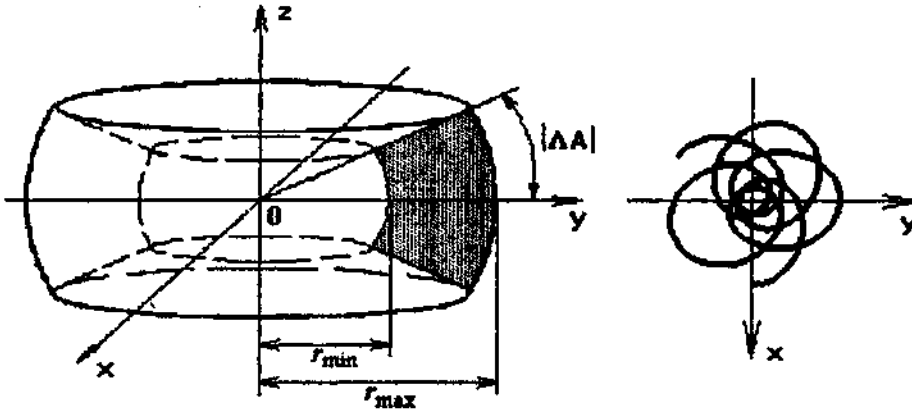


Рис.1

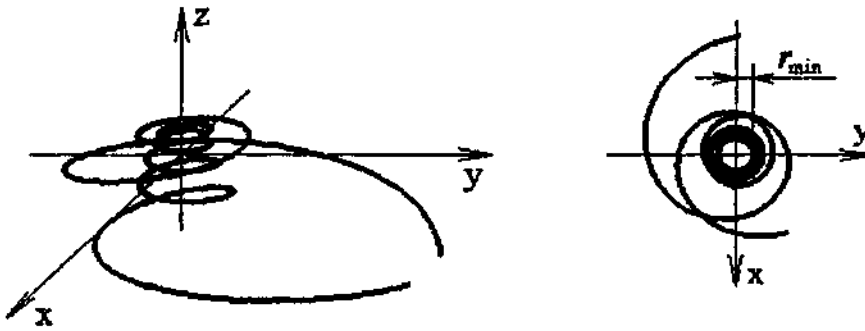


Рис.2

2) $\frac{eQ}{K} > 1$

$$\begin{aligned} r(\alpha_0) &= \frac{P}{-1 + D_0 \operatorname{ch} \omega \alpha_0} - \Lambda \frac{P((M+H) \operatorname{ch} \omega \alpha_0 - H)}{(-1 + D_0 \operatorname{ch} \omega \alpha_0)^2}, \\ \gamma(\alpha_0) &= \frac{\pi}{2} + \Lambda \cos \alpha_0, \\ \alpha &= \alpha_0 (1 + \Lambda B / \omega), \end{aligned} \tag{8}$$

где Λ – константа интегрирования, $\rho = \frac{eQ}{K}$, $\omega = \sqrt{\rho^2 - 1}$;

$$P = \frac{K\omega^2}{E\rho}, \quad H = \frac{2\rho}{K\omega^2}, \quad B = \frac{\rho}{K\omega}, \quad M = -\frac{B(D_0 - 1)^2}{\omega D_0}, \quad D_0 = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \frac{2}{E}(\rho^2 - 1)}.$$

Траектории имеют вид трехмерных спиралей, закручивающихся вокруг начала координат (рис.3).

Если $D_0 < 1$, то траектория имеет две ветви уходящие на бесконечность при

$$\alpha^* = \pm \left(1 + \Lambda \frac{B}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \operatorname{arch}\left(\frac{1}{D_0}\right).$$

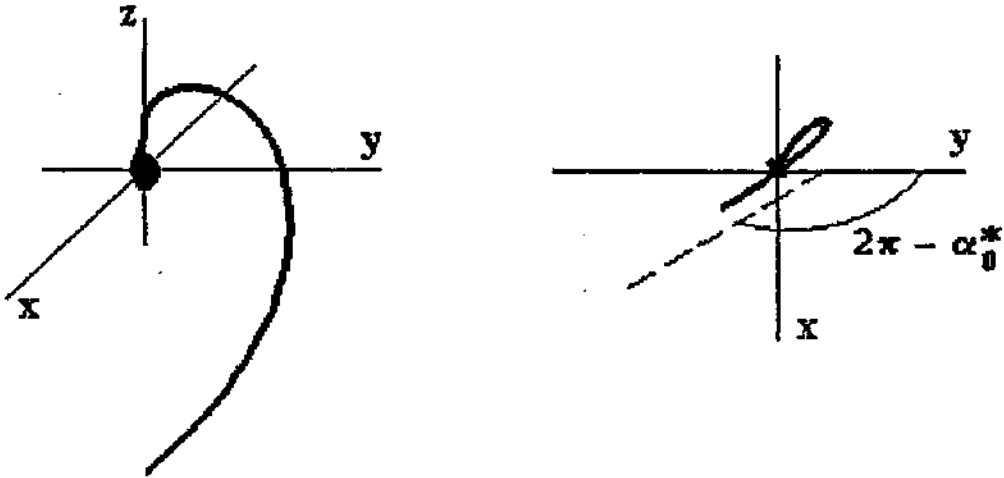


Рис.3

Если $D_0 > 1$, то траектория имеет вид изображенный на рисунке 4.

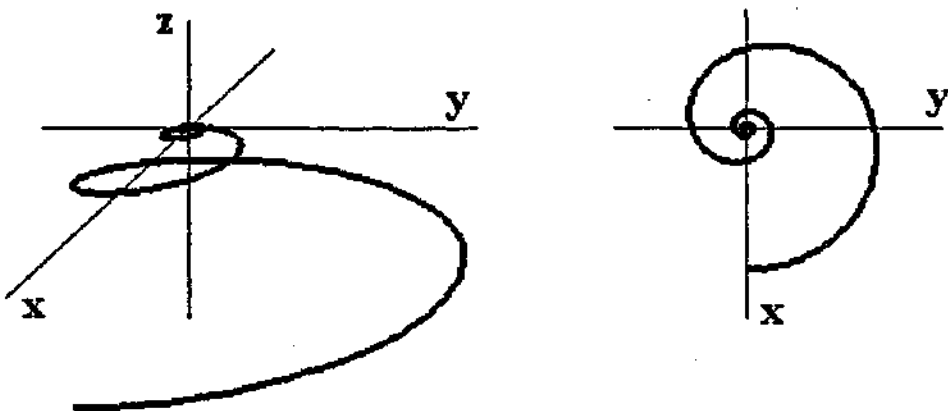


Рис.4

$$3) \frac{eQ}{K} = 1$$

$$r(\alpha) = \frac{1}{\frac{E}{2K}\alpha^2 + C_1\alpha + C_2} - \Lambda \frac{-\frac{1}{K}\left(\frac{E}{12K}\alpha^4 + \frac{C_1}{3}\alpha^3 + C_2\alpha^2\right) + C_3\alpha + C_4}{\left(\frac{E}{2K}\alpha^2 + C_1\alpha + C_2\right)^2}, \quad (9)$$

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, A – константы интегрирования.

Траектории имеют вид спиралей закручивающихся вокруг центра, но более медленно, чем в случае $\frac{eQ}{K} > 1$. Общий характер траекторий такой же, как в случаях изображенных на рисунках 3,4.

Для 4-спина электрона в кулоновском поле можно получить аналитическое выражение в случае простейшей круговой траектории. Решение будет таким же, как и для случая с магнитным полем (5).

В четвертой главе рассмотрена задача рассеяния релятивистского электрона со спином в кулоновском поле в рамках псевдоклассической механики. Получено аналитическое выражение для угла и сечения рассеяния и даны предельные оценки для бесспинового и нерелятивистского случаев.

Для случая малых углов, рассматриваемая псевдоклассическая модель приводит к известной квантовомеханической формуле Мотта. Для произвольных углов проведено численное исследование.

Выражения для угла рассеяния θ будут следующими:

Притягивающий центр

$$\theta = -\pi + \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{1}{D_0}\right) - \Lambda B \left\{ \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{1}{D_0}\right) \right\} \quad (10)$$

Отталкивающий центр

$$\theta = \pi - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{1}{D_0}\right) - \Lambda B \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{1}{D_0}\right). \quad (11)$$

Определения констант ω, D_0, B такие же, как и для формул (7).

Асимметрия угла рассеяния при этом учитывается знаком величины Λ , которая может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

При $\Lambda=0$ данные формулы совпадают с углами рассеяния для бесспиновых частиц.

Исследование формул (10) и (11) при больших прицельных параметрах, которым, как известно, отвечают малые углы рассеяния, позволяет получить дифференциальное сечение рассеяния для малых углов (с точностью до θ во втором множителе)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\epsilon e^2}{2cp^2} \right)^2 \frac{1}{(\theta/2)^4} \left(1 \mp \frac{c^4 mp^2 \pi \Lambda}{4Ze^2 E^2} \theta \right), \quad (12)$$

где $\epsilon = \hbar e^2 / c$, E – энергия электрона, p – импульс налетающего электрона на бесконечности. Первое слагаемое есть не что иное, как Резерфордское сечение рассеяния, второе – представляет собой поправку к сечению, обусловленную спином электрона.

Значение константы Λ легко найти, сопоставляя (12) с формулой Мотта. Окончательное выражение для дифференциального сечения рассеяния на малые углы будет иметь вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\epsilon e^2}{2cp^2} \right)^2 \frac{1}{(\theta/2)^4} \left(1 \pm \frac{\pi Z \alpha p c}{E} \theta \right),$$

где $\alpha = e^2 / (\hbar c)$.

Получить формулу сечения рассеяния для произвольного угла θ , как функцию от угла в аналитическом виде невозможно, но можно получить зависимость от прицельного параметра s :

$$\theta(\xi) = -\pi + \frac{2 \left(1 + \frac{2g}{f\xi^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \right) \left(\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - f^2) \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right)^f}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}}$$

$$\frac{d\sigma_{DVR}}{d\sigma_R}(\xi) = \left| \frac{1}{F^2 M^4 \sqrt{1-M^2}} \operatorname{fc} \operatorname{tg}^2 \frac{N}{M} (-8FgM^2(M^2-1)N + 4FgM^2(M^2-1)N \cos \frac{2N}{M} + \right. \\ \left. + (2FgM^3 - fFM^4 - 2FgM^5 + 4g\sqrt{1-M^2}(M^4-1)N) \sin \frac{2N}{M} \right|,$$

где σ_{DVR} – сечение рассеяния в модели Ди Векья-Равидала, σ_R – сечение рассеяния Резерфорда и введены вспомогательные величины $\xi = \frac{p}{Z\varepsilon} s$ – безразмерный прицельный параметр,

$$g = Z\alpha, \quad f = \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}}, \quad E = \frac{E}{E_0},$$

и вспомогательные функции

$$N = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+f^2(-1+\xi^2)}}, \quad M = \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}, \\ F = \frac{2f(-1+M^2)}{M^2(1+(-1+f^2)M^2)} - \frac{2(1-M^2)^{3/2}N}{M^3}.$$

Некоторые из графиков, полученных для этих формул, представлены на рисунках с (5) по (8). В рассмотрение приняты четыре значения энергии электрона $E = 1.0000005 E_0, 1.005 E_0, 1.15 E_0, 7.1 E_0$ ($E_0 = mc^2$) и три значения величины заряда ядра $Z = 13, 50, 83$. Графики очень хорошо демонстрируют совпадение результатов для модели Ди Векья-Равидала (DVR) и Мотта (Motta) при малых углах рассеяния (или, что то же самое, при больших прицельных параметрах). Достаточно хорошее совпадение наблюдается до угла $\pi/2$, а при малых энергиях до $3\pi/2$. Погрешность растет с увеличением энергии электрона и заряда ядра.

$$E = 1.0000005 E_0$$

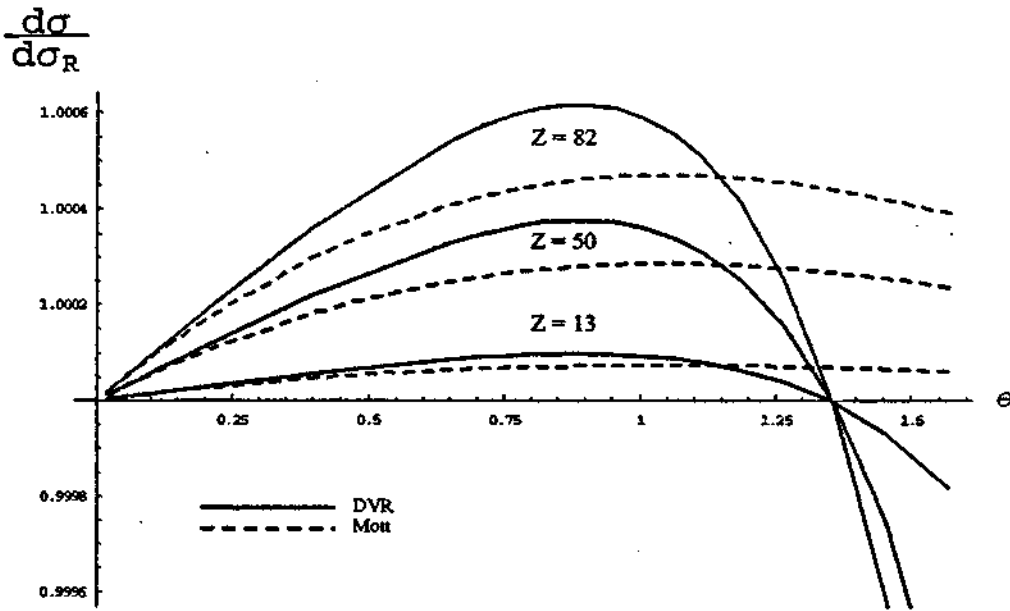


Рис. 5.

$$E = 1.15 E_0$$

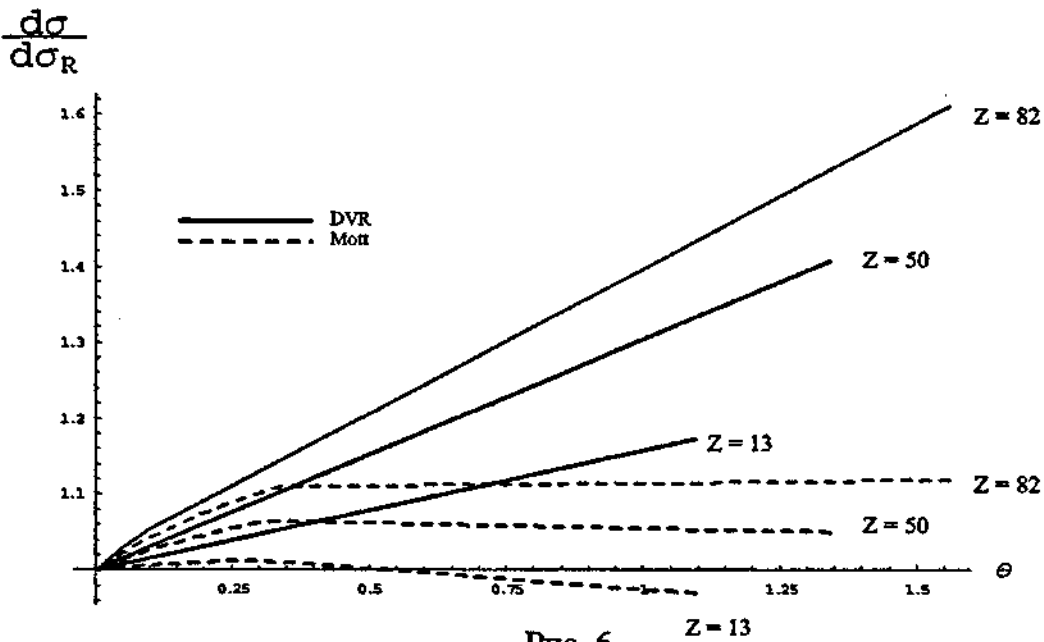


Рис. 6.

$$E = 1.0000005 E_0$$

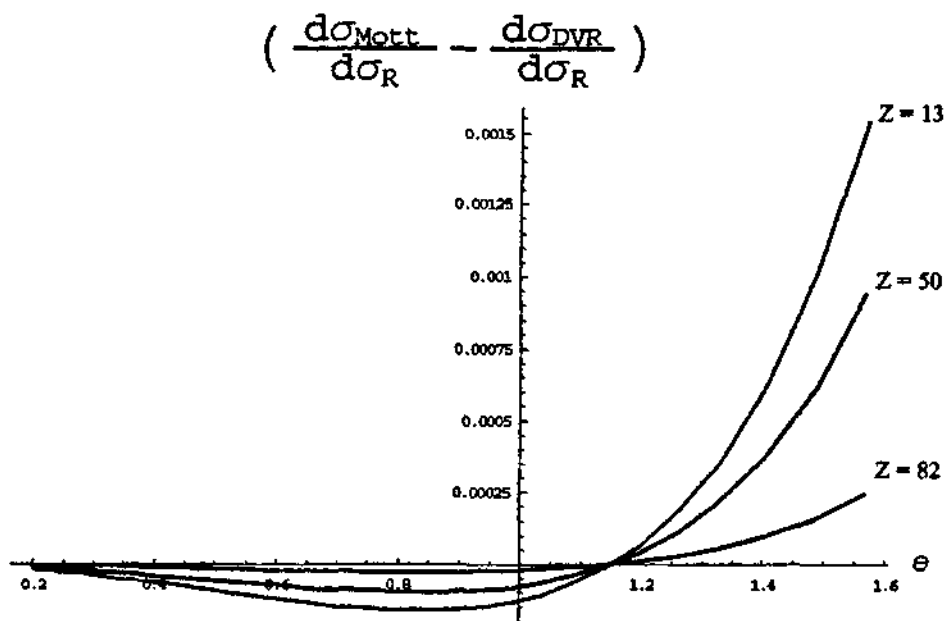


Рис. 7.

$$E = 1.15 E_0$$

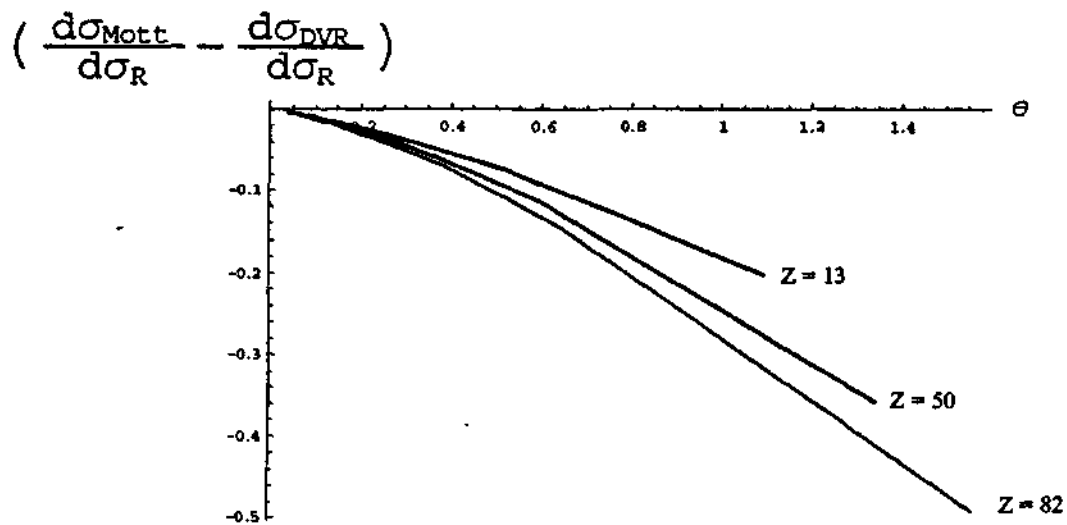


Рис. 8.

Основные выводы:

Псевдоклассическая модель электрона и предложенная в наших исследованиях методика позволяет наиболее полно исследовать спин электрона на классическом уровне. Эта модель лишена недостатков классических моделей: она учитывает спин-орбитальное взаимодействие, дает правильное гиромагнитное отношение, при квантовании переходит в модель Дирака, «квантовому дрожанию» в ней отвечают нечетные грасмановы переменные, которые исчезают при усреднении. Поэтому все, что отличает предсказание этой модели от квантовой модели Дирака, представляет собой «чисто квантовый» вклад природы спина. Как всякая классическая модель, она содержит множество подробностей, отсутствующих в квантовой модели (траектории, прицельные параметры и т.п.).

Расчеты простейших модельных случаев просто и наглядно показывают характер поведения электрона и его спина и позволяют получить точные решения. Для более сложных полей, представление спин-орбитального взаимодействия нильпотентным возмущением дает возможность получить не приближенное, а точное решение, как для траектории частицы, так и для угла и сечения рассеяния.

Основные результаты диссертации отражены в работах:

1. Козориз В.И., Мусин Ю.Р. Суперсимметричный электрон в кулоновском поле: Тез. Док. Десятая российская грав. конф. - Владимир, 1999. - 212 с.
2. Козориз В.И., Мусин Ю.Р. Суперсимметричный электрон в кулоновском поле//Теор. и мат. физ. – Т123. – N1. – 2000. – С.75–80
3. Козориз В.И. Анализ движения суперсимметричного электрона в кулоновском поле//Труды МАИ. – N1. – 2000.
4. Козориз В.И. Суперсимметричный электрон в постоянном и однородном магнитном и электрическом полях//Труды МАИ. – N1. – 2000.
5. Козориз В.И. Электрон со спином в поле плоской электромагнитной волны//Труды МАИ. – N2. – 2000.
6. Козориз В.И., Мусин Ю.Р. К задаче рассеяния электрона со спином в кулоновском поле//Теор. и мат. физ. – Т138. – N2. – 2004. – С.338–348

Принято к исполнению 13/10/2006
Исполнено 16/10/2006

Заказ № 751
Тираж: 100экз.

Типография «11-й ФОРМАТ»
ИНН 7726330900
Москва, Варшавское ш., 36
(495) 975-78-56
www.autoreferat.ru