



На правах рукописи

Эдвин Бепавенте Рамирес

**Топологические солитоны в трехмерной
калибровочной модели Скирма**

Специальность 01 04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2007

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Российского университета дружбы народов

Научный руководитель

доктор физико-математических наук Ю П Рыбаков

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук О В Кечкин

кандидат физико-математических наук Т Ф Камалов

Ведущая организация

Московский педагогический государственный университет

Защита состоится «29» мая 2007 г в 16 ч 30 мин
на заседании диссертационного совета К 053 22 01 при Российском университете
дружбы народов по адресу г Москва, ул Орджоникидзе, 3, зал №1

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета
дружбы народов

Автореферат разослан «28» Апреля 2007 г

Учснный секретарь

диссертационного совета

кандидат физико-математических наук



Т К Чехлова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ И АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

В современной теоретической физике большой интерес представляет изучение структуры частиц. Противоречия, возникающие при попытках построения последовательной полевой теории, происходящие главным образом из неумения сохранить в релятивистской квантовой теории образ протяженной частицы. Разделяя мнение некоторых ученых о том, что последовательная квантовая теория должна опираться на хорошую классическую теорию, мы обращаемся к описанию протяженных частиц в рамках классической нелинейной теории. Д. Финкельштейн, Ч. Мизнер и независимо от них Т. Скирма в конце 50-х годов XX века впервые ввели в физику топологическую классификацию решений уравнений поля и новые типы законов сохранения, получивших название топологических. Топологические солитоны обладают свойствами локализованности и устойчивости. Примером топологической модели частиц является киральная модель Скирма, предложенная ее автором в 1961 году для описания свойств ядерной материи в герминах мезонных полей. Скирма интерпретировал топологический заряд как барионное число, а солитонное возбуждение мезонного поля как барион (киральный солитон). Интерес к модели Скирма значительно вырос после появления работ Э. Виттена, в которых было установлено, что квантовая хромодинамика в пределе большого числа цветов оказывается эквивалентной эффективной мезонной теории, которая в низкоэнергетическом пределе аппроксимируется нелинейной сигма-моделью со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Именно к таким моделям относится модель Скирма. В рамках модели Скирма удастся сравнительно простыми средствами удовлетворительно описать взаимодействие нуклонов, основные статические свойства барионов. В диссертации изучается калибровочная $SU(2)$ модель Скирма, учитывающая вклад не только пионов, но и векторных мезонов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Изучение структуры аксиально-симметричных солитонных конфигураций в калибровочной модели Скирма
- Исследование замкнутых киральных струн (вихрей) большого радиуса в калибровочной модели Скирма

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

- В диссертации впервые, путем применения групповых методов анализа, изучена структура топологических солитонов с аксиальной симметрией в рамках $SU(2)$ калибровочной модели Скирма
- В частности, рассмотрены торондальные структуры, т.е. замкнутые струны (вихри), в приближении большого радиуса замыкания. Получена оценка массы и радиуса таких конфигураций

НАУЧНАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ

Полученные в диссертации аксиально-симметричные конфигурации в калибровочной модели Скирма могут быть использованы для построения моделей барионов и легких ядер, а также для описания плотной ядерной материи и в различных астрофизических приложениях, в том числе для описания космических струн

АПРОВАЦИЯ РАБОТЫ

Основные результаты диссертации были доложены на XXXVI Всероссийской научной конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН, Москва, 2000, на XII научной конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН, Москва, 2006, на XIII научной конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН, Москва, 2007, а также на научных семинарах кафедры теоретической физики РУДН

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертации опубликованы в четырех научных работах, в том числе в 2 статьях и 2 тезисах докладов на научных конференциях

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 56 наименований. Полный объем диссертации составляет 55 страниц

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обосновывается важность и актуальность темы исследования, дается краткий обзор истории вопроса, основных методов исследования и содержания диссертации

ГЛАВА ПЕРВАЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПОЛЕЙ В $SU(2)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ СКИРМА

Глава состоит из трех параграфов и посвящена описанию калибровочной киральной модели Скирма, поиску аксиально-симметричных конфигураций и изложению математических методов, применяемых для решения поставленных в данной диссертации задач

РАЗДЕЛ 1.1

Здесь дается описание $SU(2)$ калибровочной модели Скирма, в которой рассматривается эффективный лагранжиан для π -мезонов и ρ -мезонов. Если ρ -мезоны описываются векторным полем A_μ^a , $a = 1, 2, 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, то информация о них содержится в киральном поле U , принимающем значения в группе $SU(2)$. Векторное поле A_μ^a входит в удлинненную производную

$$D_\mu U = \partial_\mu U - [A_\mu, U],$$

где $A_\mu = \frac{i}{2} \tau^a A_\mu^a$, τ^a — матрицы Паули

Лагранжиан калибровочной модели Скирма имеет следующий вид

$$L = -\frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp} L_\mu^2 + \frac{\epsilon^2}{16} \text{Sp} [L_\mu, L_\nu]^2 + \frac{1}{8\epsilon^2} \text{Sp} F_{\mu\nu}^2 + \frac{m_\rho^2}{2\lambda^2} (A_\mu^a)^2 + \frac{m_\pi^2}{2\lambda^2} (U + U^\dagger - 2I), \quad (1)$$

где введены обозначения

$$L_\mu = l_\mu + A_\mu - U^\dagger A_\mu U = U^\dagger D_\mu U - \text{левый киральный ток, и}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] - \text{напряженность поля Янга-Миллса}$$

В лагранжиан включены слагаемые, отвечающие массам m_ρ ρ -мезонов и m_π π -мезонов

Топологический (барионный) заряд, являющийся степенью отображения $Q = \deg(S^3 \rightarrow S^3)$, может быть записан в калибровочно-инвариантной форме, предложенной Л.Д. Фаддеевым

$$Q = -\frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{ijk} \int d^3x \text{Sp} \{ L_i [L_j, L_k] + 3\Gamma_{ij} (L_k + R_k) \}, \quad (2)$$

где Q принимает целочисленные значения, а $R_k = D_k U U^\dagger$ — правый киральный ток

Будем искать статические аксиально-симметричные конфигурации в калибровочной модели Скирма. Соответствующая группа симметрии имеет вид

$$G = \text{diag}[O(2)_I \otimes O(2)_S] \quad (3)$$

и включает согласованные повороты вокруг третьей оси в изопроизвольном и координатном пространствах

Условие инвариантности кирального поля U относительно группы (3) имеет вид

$$-i\partial_\alpha U + \frac{k}{2}[\tau_3, U] = 0, \quad (4)$$

где k — целое число, характеризующее степень закрутки в изопространстве при изменении азимутального угла α . При решении уравнения (4) удобно использовать цилиндрические координаты ρ, α, z . Полагая в (4)

$$U = \cos \psi e^{i\tau_3 \varphi} + i\tau_1 \sin \psi e^{i\tau_3 \chi}, \quad (5)$$

где ψ, φ, χ — координаты на $SU(2)$, из (4) выводим следующую структуру кирального поля

$$\psi = \psi(\rho, z), \quad \varphi = \varphi(\rho, z), \quad \chi = -k\alpha + v(\rho, z) \quad (6)$$

Для нахождения структуры векторного поля A_i также запишем условие его инвариантности относительно группы (3)

$$-i\partial_\alpha A_i - i\varepsilon_{3ik}A_k + \frac{k}{2}[\tau_3, A_i] = 0 \quad (7)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} A_\rho &= i\tau_3 p + i\tau_1 q \exp[i\tau_3(\tau - k\alpha)], \\ A_\alpha &= i\tau_3 s + i\tau_1 w \exp[i\tau_3(\beta - k\alpha)], \\ A_z &= i\tau_3 f + i\tau_1 g \exp[i\tau_3(h - k\alpha)], \end{aligned} \quad (8)$$

где функции $p, q, \tau, s, w, \beta, f, g, h$ зависят только от ρ, z

РАЗДЕЛ 1.2

Для изучения структуры аксиально-симметричных полей в модели Скирма с калибровочным полем строится гамильтониан и топологический заряд, применяется теорема Коузмана-Пала, которая состоит в следующем

Пусть φ — некоторое поле и $P[\varphi]$ — функционал (энергия), инвариантный относительно действия некоторой непрерывной группы G , т.е. удовлетворяющий

условию $F[g\varphi] = F[\varphi]$, $g \in G$, и пусть $\varphi = \varphi_0$ принадлежит множеству инвариантных полей (то есть, эквивариантных), для которых $g\varphi_0 = \varphi_0$. Тогда верна теорема, высказанная С. Коулменом и доказанная Р. Палем: *если поле φ_0 доставляет минимум F в соответствующем инвариантном классе, то при некоторых условиях φ_0 реализует полный минимум F , т. е. $\delta F = 0$ также и для неинвариантных вариаций*. Далее указывается дискретная внутренняя группа, которая позволяет упростить функционал энергии. Состояния, реализующие нижнюю грань энергии в соответствующем изотопическом классе, т. е. при $Q = N$, являются устойчивыми по Ляпунову.

При помощи теоремы Коулмена-Пале реализуем схему симметричной редукции функционала энергии, основанную на отыскании группы симметрии функционала энергии и выяснении структуры инвариантных полевых конфигураций (анзацев), которые реализуют минимум функционала энергии.

РАЗДЕЛ 1.3

Здесь доказывается, что значение топологического заряда (2) является калибровочно-инвариантным и не зависит от калибровочного поля: $Q = \deg(S^1 \rightarrow S^1) = \deg(S^3 \rightarrow SU(2))$.

ГЛАВА ВТОРАЯ. СТРУКТУРА ГАМИЛЬТОНИАНА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ СКИРМА

В соответствующем инвариантном классе с учетом дискретной группы симметрии получится следующий гамильтониан

$$E = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} (T^2 + R^2) + \varepsilon^2 (\cos^2 \psi |\nabla \psi \nabla \varphi|^2 + R^2 T^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2e^2} \left[(\nabla w)^2 + (\nabla s)^2 + \left(m_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho \right) (w^2 + s^2) \right] + \frac{m_\pi^2}{\lambda^2} (1 - \cos \psi \cos \varphi) \right\}, \quad (9)$$

где обозначено

$$T^2 = (\nabla w)^2 + \cos^2 \psi (\nabla \varphi)^2, \quad R = \left(2s - \frac{k}{\rho} \right) \sin \psi - 2w \cos \psi \sin \varphi$$

При этом топологический заряд Q вычисляется как степень отображения $S^3 \rightarrow S^4$

$$Q = \frac{k}{2\pi} \int d\sin^2 \psi \wedge d\varphi \quad (10)$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ СТРУННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Делается предположение о существовании топологических солитонов, имеющих тороидальную структуру. Если принять, что радиус a замыкания тороида велик по сравнению с характерным поперечным размером λ , то для естественных тороидальных координат, связанных с цилиндрическими координатами соотношениями вида

$$\rho = a + r \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta, \quad (11)$$

можно считать, что $a \gg r$.

В результате в теории появляется дополнительная симметрия, которая позволяет упростить гамильтониан модели. В рамках калибровочной $SU(2)$ -модели Скирма рассматриваются замкнутые киральные струны (вихри), радиус замыкания которых a считается большим по сравнению с характерным поперечным размером вихря, определяемым параметрами модели. В этом приближении удастся найти киральное и калибровочное поля внутри вихря, оценить его радиус и энергию как функции от топологического заряда Q .

Топологический заряд замкнутой группы

$$Q = nk$$

В координатах (11) энергию (9) можно приближенно представить в виде

$$E \approx \frac{16}{3} \pi^2 \left(\frac{2e^3 m_\pi}{3\lambda} \right)^{1/2} n^{9/4} \quad (12)$$

Из (12) следует, что масса m_ρ ρ -мезона в данном приближении не входит в энергию конфигурации.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

- Найдена структура инвариантных векторного и кирального полей в аксиально-симметричной калибровочной $SU(2)$ -модели Скирма.
- Выявлена дискретная симметрия гамильтониана в аксиально-симметричной $SU(2)$ -модели Скирма.
- Исследованы топологические конфигурации тороидальной структуры.

- Если предположить, что радиус a замыкания тора достаточно велик, то наибольшим будет и топологический заряд Q ($n \gg k$). При таком допущении удастся найти явные выражения для кирального и калибровочного полей внутри замкнутой струны (вихря). С помощью этих выражений находится радиус замыкания и энергия вихря как функции от топологического числа n , которое определяет число закруток кирального угла $\varphi = n\vartheta$ вокруг продольной оси вихря. Интересно, что энергия вихря при $n \gg 1$ пропорциональна $n^{9/4}$, как это следует из формулы (12), и не зависит от параметров векторного поля.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ

- 1 *Рыбаков Ю. П., Бенавенир Э. Р.* Структура аксиально-симметричных солитонов в калибровочной модели Скимма // Тезисы докладов на XXXVI Всероссийской научной конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН — М. РУДН, 2000 — С. 8
- 2 *Рыбаков Ю. П., Бенавенир Э. Р.* Аксиально-симметричные конфигурации в калибровочной модели Скимма // Вестник РУДН. Физика. № 9 (1) — 2001 — С. 17-19
- 3 *Рыбаков Ю. П., Бенавенир Э. Р.* Замкнутые киральные струны большого радиуса в калибровочной модели Скимма // Тезисы докладов на XLII Всероссийской научной конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН — М. РУДН, 2006 — С. 5
- 4 *Рыбаков Ю. П., Бенавенир Э. Р.* Замкнутые струны в калибровочной модели Скимма // Вестник РУДН. Серия «Физико-математические науки» — № 1 — 2006 — С. 120-123

Отпечатано в ООО «Оргсервис—2000»
Подписано в печать 24.04.07 Объем 0,63 п.л.
Формат 60х90/16 Тираж 100 экз. Заказ №25/04-1Т
115419, Москва, Орджоникидзе, 3