

На правах рукописи

МИРОНОВ Павел Павлович

**МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНО-ВОЗМУЩЕННЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

01.04.02 - Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре Теоретической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ульяновский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Журавлев Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой высшей
математики и математического моделирования
Института математики и механики им. Н.И.
Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский
(Приволжский) федеральный университет»
Игнатьев Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник отдела
научных исследований и инноваций ФГБОУ ВПО
"Ульяновский государственный педагогический
университет имени И.Н. Ульянова"
Червон Сергей Викторович

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физико-технологический институт Российской академии наук.

Защита состоится «24» сентября 2015 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе д. 3, зал № 1.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Отзывы на автореферат просим направлять по адресу: 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, Ульяновский государственный университет, кафедра Теоретической физики.

Автореферат разослан «___» _____ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.203.34,

кандидат физико-математических наук, доцент

Попова В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Качественный анализ динамики нелинейных физических систем, включающий анализ устойчивости систем и их асимптотическое поведение, является одной из самых распространенных задач теоретической физики, имеющей приложение в различных ее разделах, начиная от физики биологических систем и заканчивая астрофизикой. Исследование свойств стохастических динамических систем при изменяющихся внешних физических условиях и свойствах среды является типичной задачей в таких исследованиях как [1а]. Например, одной из часто возникающих задач в биофизике, физической химии и физике конденсированного состояния вещества является исследование систем типа Вольтерра-Лотки [2а], описывающих динамику взаимодействия нескольких типов реагентов. При исследовании материалов под облучением пользуются моделями, описывающими изменение концентраций дефектов с учетом нелинейной составляющей, учитывающей радиационный поток или лазерное излучение [3а]. Для астрофизики одной из важных задач является описание основных характеристик солнечного ветра, а именно скорости и плотности потока частиц [13а – 15а]. Все перечисленные физические модели в своем исходном виде не учитывают случайное внутреннее и внешнее воздействие, которое всегда присутствует в системе. Поэтому общая задача описания динамики нелинейных систем под действием шума является актуальной задачей.

К настоящему времени существует целый ряд математических методов, позволяющих исследовать нелинейные динамические системы в различных случаях, в том числе, при наличии внешних возмущений. Наиболее широко распространенным подходом в настоящее время является численный анализ исходных уравнений [4а]. Для численного анализа случайно-возмущенных систем часто используют различные варианты метода Монте-Карло [5а]. Еще одним из используемых методов анализа предлагаемых моделей является применение теории возмущений для анализа устойчивости системы и приближенного описания их динамики [6а]. В работах [7а, 8а, 9а] был предложен метод исследования случайно-возмущенных уравнений на основе анализа уравнений усредненной динамики по методу Рейнольдса с выводом условий замыкания системы уравнений Рейнольдса с помощью метода максимальной энтропии [10а]. В работах [7а, 9а] этот метод применялся к одномерным механическим системам, а в работе [8а] - к уравнениям вязкой жидкости. Использование принципа максимума энтропии для вывода условий замыкания усредненных уравнений Рейнольдса основано на общей "термодинамической" идее, состоящей в том, что состояния с максимальной энтропией должны максимально наблюдаться в природе и быть максимально устойчивыми [10а]. Следовательно, использование данного подхода для задач динамики случайно-возмущенных систем является обоснованным.

Цель работы. Основной целью работы является построение метода замкнутого описания усредненной динамики случайно-возмущенных конечномерных систем в форме дифференциальных уравнений. Динамическими переменными такого описания являются моменты вероятностных распределений их исходных параметров. Такое описание позволит получать исчерпывающую, качественную и количественную информацию об асимптотическом поведении статистических моментов вероятностных распределений динамических параметров системы. Данная цель достигается с помощью специального варианта метода максимальной энтропии. Другой целью работы является получение решений для статистических параметров распределений в конкретных задачах теоретической физики, в частности, в моделях механических систем типа нелинейных осцилляторов и вращающихся тел, атомной кластеризации и моделях динамики солнечного ветра.

Задачи исследования.

1. Разработать специальную формулировку метода максимальной энтропии в применении к конечномерным случайно-возмущенным динамическим системам, которая использует метод усреднения по ансамблю типа метода Рейнольдса в теории турбулентности.
2. В рамках метода максимальной энтропии построить вариационную процедуру вывода замкнутой системы уравнений для статистических моментов нелинейных динамических систем.
3. Исследовать общие закономерности структуры решений замкнутой системы усредненных уравнений для моментов, а также их асимптотического поведения.
4. Исследовать модель атомной кластеризации под действием флуктуирующего радиационного излучения. Описать усредненную динамику предлагаемой системы, найти ее решение и сравнить результаты с решениями исходной модели.
5. Исследовать модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы в приближении Паркера. Описать усредненную динамику предлагаемой системы, найти ее решение и сравнить результаты с решениями исходной модели.

Методы исследования. Для исследования случайно-возмущенных нелинейных уравнений в диссертации применяется метод Рейнольдса, а также метод максимальной энтропии, развиваемые в главе 2. Для анализа конечномерных динамических систем с помощью метода максимальной энтропии разработан новый метод квадратичного представления систем. Также применяются известные методы качественного анализа динамических систем и методы анализа их устойчивости с помощью теории возмущений.

Научная новизна. В работе представлены следующие новые результаты:

- 1) На основе метода Рейнольдса разработан новый вариант метода максимальной энтропии (ММЭ), позволяющий получать замкнутое описание динамики моментов вероятностных распределений параметров произвольных конечномерных случайно-возмущенных динамических систем.
- 2) Для анализа конечномерных систем с полиномиальной нелинейностью (системы полиномиального типа) построен новый метод их преобразования к представлению, названному квадратичным. В рамках метода любая динамическая система полиномиального типа представляется системой большей размерности, но с квадратичной нелинейностью, что приводит в рамках ММЭ к нормальному закону распределения флуктуаций в системе.
- 3) Выделен особый класс решений уравнений для моментов, полученных с помощью ММЭ, названный состоянием с максимальной энтропией. Этот особый класс реализует наблюдаемое устойчивое поведение средних значений и моментов систем вблизи их невозмущенного состояния.
- 4) Найдены условия устойчивости при различных свойствах случайного процесса стационарных решений ряда исследуемых уравнений.
- 5) Построена новая модель динамики роста кластеров в первоначально однородной нелинейной среде под действием внешнего случайно флуктуирующего излучения. Исследованы условия возникновения в такой среде когерентных, в том числе, периодических структур.
- 6) Построена новая модель солнечного ветра в упрощенной формулировке Паркера, но учитывающая турбулентные флуктуации плазмы и изменение их характеристик в зависимости от расстояния от Солнца.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории нелинейных дифференциальных и разностных уравнений и связанных с ними областях теоретической физики. Описанные в диссертации случайно-возмущенные модели Ферхюльста, Вольтерра-Лотки, атомной

кластеризации, нелинейной диффузии, Эйлера вращения твердого тела, Лоренца, случайно-возмущенного математического маятника и система Паркера солнечного ветра могут быть использованы для решения демографических, биологических, радиационных, механических и астрофизических задач динамики нелинейных систем с последующим сравнением теоретических расчетов с экспериментальными данными.

Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) Совокупность уравнений динамики конечномерных СВ-систем, относительно средних значений и моментов переменных задачи (уравнения Рейнольдса), может быть замкнута с помощью условия достижения системой состояния с максимальной энтропией на заданном интервале времени. Это условие эквивалентно переходу системы в состояние локального равновесия. Усредненная система, замкнутая с помощью метода максимальной энтропии, допускает, по крайней мере, один интеграл движения, соответствующий закону сохранения полной удельной энтропии системы.
- 2) Для любой конечномерной динамической системы с полиномиальной нелинейностью существует квадратичное представление, преобразующее систему к форме с нелинейностью не выше второго порядка. Распределение вероятностей флуктуаций координат любой системы в квадратичном представлении, построенное с помощью метода максимальной энтропии, является нормальным.
- 3) Среди всех решений замкнутой системы усредненных уравнений, построенных по методу максимальной энтропии, существует решение, описывающее состояние с максимальной энтропией среди всех других решений, выделенное условием равенства нулю всех или части корреляций между параметрами системы.
- 4) Усредненные уравнения модели формирования кластеров в материале под действием внешнего радиационного облучения имеют растущие по времени и периодические по координатам решения, соответствующие образованию периодических структур в облучаемом материале. Выделенное решение с максимумом энтропии описывает периодические вариации структуры кластера вблизи невозмущенных решений, связанные с малыми вариациями корреляций между концентрациями дефектов.
- 5) В рамках развитого метода существует замкнутая модель радиального течения солнечного (звездного) ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы (обобщенная модель Паркера). Обобщенная модель Паркера с учетом турбулентных флуктуаций плазмы дает более адекватное описание параметров солнечной плазмы на дальних расстояниях от Солнца, чем исходная модель Паркера.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры Теоретической физики и Научно-исследовательского технологического института Ульяновского государственного университета, а также на конференциях: Седьмая международная конференция «Математическое моделирование физических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2-5 февраля 2009 года); Вторая Международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 года); Шестая всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 26-28 января 2011 года); «Конференция-конкурс молодых физиков России» (г. Москва, 31 января 2011 года); XVII Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 28 февраля – 3 марта 2011 года); XVIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 11-15 апреля 2011 года); Конференция «Космос и наука» (г. Ульяновск, 2012 год); XIX международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 9-13 апреля 2012 года); Третья Международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 27 августа – 1 сентября 2012 года); VII Всероссийская конференция молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и

нелинейная физика» (г. Саратов, 24-26 сентября 2012 года); Седьмая всероссийской конференция «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 29-31 января 2013 года); Международная молодежная научная школа-универсиада «Микромир и макромир-2013» (г. Москва, 15-27 апреля 2013 года); IL Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники (г. Москва, 14-17 мая 2013 года); Международный семинар "Нелинейные поля в теории гравитации и космологии" и Российская школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений" (г. Казань, 21-26 октября 2013 года); Международная зимняя школа-семинар по гравитации, астрофизике и космологии "Петровские чтения-2014" (г. Казань, 17-21 февраля 2014 года); L Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники (г. Москва, 13-16 мая 2014 года); 15-я Российская гравитационная конференция «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике» (г. Казань, 30 июня – 5 июля 2014 года); Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 25 августа – 1 сентября 2014 года).

Публикации. Диссертация выполнена на основе работ [1] – [6], опубликованных в ведущих российских журналах, входящих в перечень ВАК. Работы написаны совместно с научным руководителем. Вклад автора в приведенные в диссертации результаты является основным.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из пяти глав. Список литературы содержит 139 наименований. Общий объем 148 страниц.

Содержание работы

Гл. 1. Введение содержит аргументацию актуальности исследуемой проблемы, обзор научной литературы, посвященной затронутым в диссертации темам, описание полученных в диссертации результатов и оценку их значения для теории случайно-возмущенных систем и решения прикладных задач по исследованию материалов под облучением и параметров солнечного ветра.

Гл. 2. Метод максимальной энтропии содержит описание метода максимальной энтропии применительно к нелинейным системам.

2.1. Общее описание

Одним из общих подходов к выводу уравнений для усредненных параметров нелинейных систем с хаосом является метод максимальной энтропии (ММЭ), заимствованный из концепций термодинамики и статистической физики [9a]. Этот подход представляется наиболее точным и корректным, поскольку указывает естественный путь к поиску состояний, вблизи которых в основном и происходит эволюция систем, что является основным признаком их наблюдаемости в экспериментах. Максимум энтропии обеспечивает условие того, что система находится вблизи такого своего макросостояния, которое реализуется на микроуровне максимальным числом способов. Поэтому она должна проводить основное время своего существования на множестве этих микросостояний (наблюдаемость). Основная идея его состоит в явном вычислении энтропии нелинейной гидродинамической системы в предположении ее локального равновесия и в последующем отыскании максимума этой найденной энтропии по усредненным параметрам системы.

2.2. Многомерный метод максимальной энтропии с высшими моментами

Для N -мерной вещественной непрерывной случайной величины $S = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$, принимающей значения $x = \{x_1, \dots, x_N\} \in R^N$, рассмотрим задачу отыскания совместного распределения $\rho_S(x) = \rho_{\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)}(x_1, \dots, x_N)$, имеющего максимальную энтропию (по

Шеннону) при заданных моментах случайной величины S вплоть до фиксированного порядка Q_i по каждой координате x_i :

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N} = \int_{R^N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N} \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad 0 \leq k_1 \leq Q_1, \dots, 0 \leq k_N \leq Q_N. \quad (1)$$

Заметим, что четность порядков необходима для обеспечения сходимости интегралов в (1). Введем понятие мультииндексов $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ как совокупность индексов $k_1, k_2, \dots, k_N$. Определим для мультииндекса операцию модуля по формуле: $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_N$. Тогда имеют смысл следующие сокращенные обозначения: $\Lambda_k = \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}$, $M_k = M_{k_1, k_2, \dots, k_N}$, полезные для дальнейшего описания. Поставленная задача сводится к первой вариационной задаче, т.е. к отысканию максимума функционала:

$$H = - \int_{R^N} \rho_S(x) \ln \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (2)$$

при условии, что заданы числовые значения $M^{(0)}$ всех моментов $M = (M_{k_1, k_2, \dots, k_N})$ (1): $M = M^{(0)}$. С помощью метода множителей Лагранжа переходим от задачи на условный максимум к задаче на абсолютный максимум для функционала:

$$\tilde{H} = - \int_{R^N} \rho_S(x) \ln \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N + \sum_{|k| \leq Q} \Lambda_k (M_k - M_k^{(0)}). \quad (3)$$

Здесь $Q = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ - мультииндекс порядков моментов по каждой координате: $|Q| = Q_1 + \dots + Q_N$. Искать решение этой вариационной задачи будем среди распределений следующего общего вида:

$$\rho_S(x) = \frac{1}{Z(L)} \exp \left\{ - \sum_{|k| \leq Q} \Lambda_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N} \right\}, \quad (4)$$

где $Z(L)$ - соответствующая статистическая сумма:

$$Z(L) = \int_{R^N} \exp \left\{ - \sum_{|k| \leq Q} \Lambda_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1. \quad (5)$$

Здесь введено обозначение $L = (\Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N})$. Исходя из этого определения, связь между множителями Лагранжа L первой вариационной задачи и моментами M может быть представлена в виде следующей формулы:

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}}. \quad (6)$$

Нетрудно теперь видеть, что решение вариационной задачи $\delta \tilde{H} = 0$ дается выражением (4) при условии, что совокупность множителей Лагранжа L вычисляется из соотношений:

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N}^{(0)} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}}. \quad (7)$$

Соответствующее максимальное значение функционала энтропии (2) можно записать в следующем общем виде:

$$H_{\max} = \ln Z(L) - \sum_{|k| \leq Q} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k}. \quad (8)$$

2.3. Метод Рейнольдса для конечномерных динамических систем

Метод Рейнольдса в применении к конечномерным динамическим системам [7а, 9а] сводится к вычислению усредненных уравнений относительно средних значений динамических переменных и их моментов из самих исходных уравнений динамической системы. При этом предполагается, что исходные уравнения в первоначальном виде могут

содержать аддитивные случайные добавки, которые исчезают после усреднения по ансамблю. Системы с такими внешними случайными добавками в дальнейшем мы будем называть случайно-возмущенными динамическими системами. Скрытое внешнее воздействие случайных сил на изменения средних значений динамических переменных случайно-возмущенных систем в этом случае проявляется в зависимости от времени моментов случайных динамических переменных. Поскольку после усреднения в уравнениях для средних значений динамических переменных системы случайные аддитивные добавки исчезают, то отличить эти системы с первоначальным присутствием внешних сил или их отсутствием оказывается невозможным. Это может служить основанием для предположения, что усредненные динамики таких систем неотличимы и для объединения их для общего анализа.

Рассмотрим N -мерную динамическую систему $x = \{x_1, \dots, x_N\}$, координаты которой описываются системой дифференциальных уравнений общего вида:

$$\dot{x}_\alpha = f_\alpha(x, t) + \varepsilon_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где предполагается, что случайные внешние возмущения ε_α обладают тем свойством, что при усреднении по ансамблю всех возможных реализаций этих случайных процессов их математические ожидания равны нулю:

$$\langle \varepsilon_\alpha^{(x)} \rangle = 0.$$

При этом все детерминированные составляющие обобщенных силовых функций, действующих на систему, должны быть учтены в записи силовых функций $f_\alpha(x, t)$.

Вывод уравнений Рейнольдса производится следующим образом. Случайные внешние возмущения системы приводят к возникновению случайных возмущений ее динамических параметров, которые можно представить в следующем виде:

$$x = X + x',$$

где $X = \langle x \rangle$ - средние по ансамблю динамические переменные системы, а x' - их случайные возмущения с нулевыми математическими ожиданиями: $\langle x' \rangle = \langle x' \rangle = 0$. Следуя методу Рейнольдса [10a], уравнения для усредненных параметров системы (9) будут иметь следующий вид:

$$\dot{X}_\alpha = \langle f_\alpha(X + x', t) \rangle = \langle \hat{T}_X \rangle f_\alpha(X, t) = F_\alpha(X, M, t), \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Здесь $F(X, t) = \langle f(x, t) \rangle$ - усредненные силовые функции, $\hat{T}_X = \exp\left(\sum_{a=1}^N x'_a \frac{\partial}{\partial X_a}\right)$ - оператор

случайного сдвига, $\langle \hat{T}_X \rangle = \langle \exp\left(\sum_{a=1}^N x'_a \frac{\partial}{\partial X_a}\right) \rangle$ - усредненный оператор случайного сдвига, а

$\mathbf{M}$ - совокупность тензоров всех моментов случайных флуктуаций с компонентами $M_k(t) = M_{k_1, \dots, k_N} = \langle x_1'^{k_1} \dots x_N'^{k_N} \rangle$, и введен мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_N)$, $|k| = k_1 + \dots + k_N$.

Действие усредненного оператора сдвига имеет следующий вид:

$$\langle \hat{T}_X \rangle = \langle \exp\left(\sum_{a=1}^N x'_a \frac{\partial}{\partial X_a}\right) \rangle = \sum_{|k|=0}^{\infty} C(\mathbf{k}) M_k(t) \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_N}}{\partial X_{k_1} \partial X_{k_2} \dots \partial X_{k_N}}, \quad (11)$$

где $C(k) = (k_1! \dots k_N!)^{-1}$. По определению: $\langle x'_\alpha \rangle = M_{1_\alpha 0} = 0$, где мультииндексы 1_α и 0 имеют следующие компоненты:

$$1_\alpha = \{q_1, q_2, \dots, q_N\} : q_\beta = \begin{cases} 0, & \beta \neq \alpha, \\ 1, & \beta = \alpha, \end{cases} \quad 0 = \{0, 0, \dots, 0\}.$$

2.4. Метод максимальной энтропии для стохастических систем

Система уравнений Рейнольдса (10) содержит кроме средних значений координат X еще и моменты этих величин M_k , для которых уравнения отсутствуют. Поэтому для замыкания этой системы уравнений, воспользуемся методом максимальной энтропии в форме, предложенной в [7а, 8а, 9а]. Идея использования метода максимальной энтропии для замыкания системы уравнений Рейнольдса состоит в том, что распределения, имеющие максимум энтропии, описывают макросостояния систем, которые реализуются наибольшим числом микросостояний. Последнее означает, что такие состояния системы должны наблюдаться гораздо чаще, чем любые другие возможные состояния системы.

Рассмотрим континуальное вероятностное распределение $\rho_{\{x\}}[t_1, t_N]$, являющееся распределением непрерывного случайного процесса S с N с переменными $x'(t) = \{x'_1(t), \dots, x'_N(t)\}$, заданного на интервале времени $[t_1, t_2]$. Следуя идеологии метода максимальной энтропии, для решения задачи замыкания уравнений Рейнольдса необходимо максимизировать функционал энтропии континуального распределения $\rho_{\{x\}}[t_1, t_N]$ при условии, что на моменты этого распределения накладываются дополнительные условия, которые сводятся к совокупности из N усредненных уравнений Рейнольдса (10), выполняющихся в каждый момент времени $t \in [t_1, t_2]$. Выражение для энтропии системы с распределением $\rho_{\{x\}}[t_1, t_2]$ можно условно записать в виде континуального интеграла:

$$S = - \int \rho_{\{x\}}[t_1, t_2] \ln \rho_{\{x\}}[t_1, t_2] D\{x'\}[t_1, t_2].$$

Однако в реальности исследование такого рода выражений является чрезвычайно сложным. Поэтому возникает необходимость использовать некоторые упрощающие свойства исследуемых уравнений. Одним из таких важных свойств уравнений Рейнольдса (10) является их локальность. Поскольку уравнения (10) выполняются в каждый момент времени независимо, то континуальное распределение $\rho_{\{x\}}[t_1, t_2]$, доставляющее максимум энтропии S , должно обладать свойством независимости случайных величин $x'(t)$ и $x'(t')$ для любых двух моментов времени $t \in [t_1, t_2]$ и $t' \in [t_1, t_2]$.

Энтропия совместных распределений независимых случайных величин обладает свойством аддитивности (см., например, [11а]). Независимость векторов $x'(t)$ в различные моменты времени означает, что $\rho_{\{x\}}[t_1, t_2]$ можно представить в виде континуального произведения удельных распределений $\rho_{x'}(x|t)$. Мы будем полагать, что выполнены все необходимые и достаточные условия для того, чтобы можно было бы записать следующее выражение:

$$\ln \rho_{\{x\}}[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \ln \rho_{x'}(x|t) dt,$$

являющееся следствием требования указанной попарной независимости $x'(t)$ и $x'(t')$ для $t \neq t'$. В силу этого выражение для энтропии для континуального распределения $\rho_{\{x\}}[t_1, t_2]$ можно записать в следующем общем виде:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) dt, \quad (12)$$

где $\sigma(t)$ - удельная энтропия распределения $\rho_{x'}(x|t)$:

$$\sigma(t) = - \int \rho_{x'}(x|t) \ln \rho_{x'}(x|t) dx'_1 \dots dx'_N.$$

Уравнения (10) можно рассматривать как уравнения на моменты случайной величины $x'(t)$. В этом случае вид удельного распределения вероятностей $\rho_{x'}(x|t)$ будем искать в виде, аналогичном (4):

$$\rho_{x'}(x|t) = \frac{1}{Z(L)} \exp \left\{ - \sum_{|k|>0} \Lambda_k x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} \right\}, \quad (13)$$

где статистическая сумма определяется по аналогии с (5) следующим образом:

$$Z(\Lambda) = \int_{R^N} \exp \left\{ - \sum_{|k|>0} \Lambda_k x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} \right\} dx_1' \dots dx_N'. \quad (14)$$

При этом в этих соотношениях $\Lambda_{kl} = \Lambda_{k_1, \dots, k_N}$ - множители Лагранжа в первой вариационной задаче, а в качестве удельной энтропии $\sigma(t)$ мы можем взять выражение (8) для максимального значения энтропии конечномерного (удельного) распределения в момент времени t :

$$\sigma = \ln Z(L) - \sum_{|k|} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k}. \quad (15)$$

Предполагается, что в соотношениях (13) и (14) сумма по каждой компоненте мультииндекса $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ берется до своего максимального порядка, содержащегося в мультииндексе Q . В дальнейшем мы будем полагать, что максимальный порядок может быть равным бесконечности: $|k| = k_1 + \dots + k_n = \infty$. Исходя из этих рассуждений, решение задачи о максимуме энтропии континуального распределения рассматриваемой задачи сводится к отысканию условного максимума функционала:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln Z(L) - \sum_{|k|>0} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k} \right) dt, \quad (16)$$

Поскольку функционал (16) содержит только множители Лагранжа Λ_k , а уравнения (10) - моменты M_k , то к уравнениям следует добавить еще и общие соотношения, связывающие Λ_k и M_k :

$$M_{k_1, \dots, k_N} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, \dots, k_N}}. \quad (17)$$

В результате этих построений задача о замыкании уравнений Рейнольдса (10) на основе метода максимальной энтропии сводится к отысканию максимума функционала (16) при условии выполнения уравнений (10). Эту задачу мы будем называть второй вариационной задачей. С помощью метода множителей Лагранжа эта условная вариационная задача сводится к отысканию безусловного максимума следующего функционала

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln Z(L) - \sum_{|k|+|l|>0} \Lambda_{kl} \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{kl}} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\dot{X}_{\alpha} - F_{\alpha}] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{|k|>0} G_k \left[M_k + \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k} \right] dt. \quad (18)$$

Здесь функции $A_{\alpha}(t)$ и $G_k(t)$ - множители Лагранжа второй вариационной задачи на максимум функционала (18). Вариации всех функций $X_{\alpha}(t)$, $M_k(t)$ и множителей Лагранжа первой $\Lambda_k(t)$ и второй задач $A_{\alpha}(t)$ и $G_k(t)$ считаются независимыми. Система, соответствующая максимуму функционала (18), имеет единственное решение:

$$G_k = \Lambda_k.$$

Пользуясь этим соотношением, получаем функционал (18) в следующем виде:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln Z(L) - \sum_{|k|>0} \Lambda_{kl} M_k \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\dot{X}_{\alpha} - F_{\alpha}] dt.$$

2.5. Квадратичное представление

Для построения квадратичного представления СВ-систем введем новые переменные $\mathbf{Y} = \{y_a\}$ по следующему правилу:

$$y_a = x_1^{a_1} \cdot x_N^{a_2}, \quad 0 < |\mathbf{a}| \leq M; \quad y_{0,0,\dots,0} = 1. \quad (19)$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ - мультииндекс, $a_1, a_2, \dots, a_N$ - неотрицательные целые числа, $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \dots + a_N$. Каждая переменная $y_{\mathbf{a}}$ представляет собой моном степени $M = |\mathbf{a}|$. В таких переменных полиномы в правой части СВ-систем представляются линейными функциями новых координат $y_{\mathbf{a}}$:

$$P_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{|\mathbf{a}| \leq M} p_{\alpha}^{\mathbf{a}}(t) x_1^{a_1} \dots x_N^{a_N} = \sum_{|\mathbf{a}| \leq M} p_{\alpha}^{\mathbf{a}}(t) y_{\mathbf{a}} + C_{\alpha}(t) = L_{\alpha}(y, t).$$

Здесь $C_{\alpha}(t) = P_{\alpha}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=0}$. Для замыкания описания динамики СВ-системы в пространстве переменных $y_{\mathbf{a}}$ дополним ее до следующей совокупности уравнений:

$$\frac{dy_{\mathbf{a}}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} y_{(\mathbf{a}|\alpha)} L_{\alpha}(\mathbf{Y}, t) + E_{\mathbf{a}}, \quad (20)$$

$$y_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = y_{\mathbf{a}} y_{\mathbf{b}}, \quad 0 < |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq M. \quad (21)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$(\mathbf{a}|\alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_{\alpha}-1, \dots, a_N), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N), \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_N + b_N).$$

Величины $E_{\mathbf{a}}(t)$ - случайные процессы вида:

$$E_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} y_{(\mathbf{a}|\alpha)} \varepsilon_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M;$$

Соотношения (21) представляют собой связи, наложенные на систему (20). Представление исходной системы в виде системы уравнений (20) - (21) будем в дальнейшем называть ее **квадратичным представлением**.

Гл. 3. Состояние с максимальной энтропией содержит описание рассматриваемых в работе конечномерных динамических систем, их усреднение по методу Рейнольдса с последующим применением метода максимальной энтропии и анализом моделей на устойчивость при различных свойствах случайного процесса.

3.1. Уравнение Ферхюльста

Уравнение Ферхюльста (логистическое уравнение) является хорошо исследованным во всех отношениях уравнением, описывающим динамику численности популяций [2а]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 + q + \varepsilon. \quad (22)$$

В рамках биофизической интерпретации этой модели в этом уравнении x - число особей какого-либо сообщества (ареала, планеты, государства, города, района, и т.д.) в определенный момент времени. Параметры α, β описывают рождаемость в сообществе (параметр α) и степень самодействия популяции за счет эффекта тесноты (параметр β), параметр q описывает внешний детерминированный приток жителей в популяцию. Функция времени $\varepsilon(t)$ является случайной с математическим ожиданием равным нулю: $\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$. Параметр α может иметь произвольный знак, а параметр β будем считать неотрицательным.

Применяя усреднение по методу Рейнольдса к СВ-уравнению (22) при условии $q = 0$, получаем следующее усредненное уравнение:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta \langle x'^2 \rangle. \quad (23)$$

В это уравнение входит дисперсия флуктуаций $\langle x'^2 \rangle$, для которой необходимо дополнительно указать уравнение эволюции, которое не следует из исходного уравнения. В случае отсутствия шума ($\varepsilon \equiv 0, \langle x'^2 \rangle = 0$) имеются две стационарные точки:

$$X_0 = 0, \quad X_0 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (24)$$

При наличии шума обе точки смещаются. График уравнения (22) представлен на рис. 1.

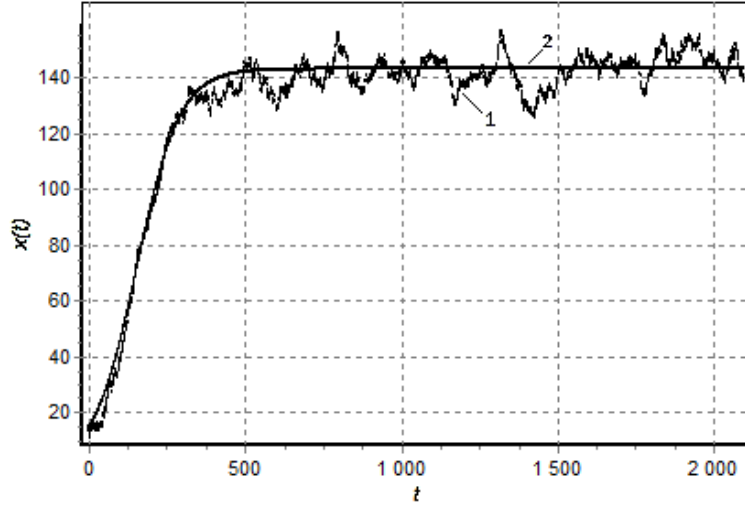


Рис. 1. Изменение $x(t)$ как функции времени при наличии шума (кривая 1) и без него (кривая 2). Параметры модели: $\alpha = 143$, $\beta = 1$, дисперсия случайного шума 10000.

Стационарная точка $x_0 = 143$.

Следуя принципу максимума энтропии для описания усредненной динамики системы, мы должны решить задачу о максимуме функционала энтропии следующего вида:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \ln \det C dt + \int_{t_0}^{t_1} U(\dot{X} - \alpha X + \beta X^2 + \beta \langle x'^2 \rangle) dt. \quad (25)$$

Здесь $U(t)$ - множитель Лагранжа в задаче об условном экстремуме H_{max} . Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (25) имеют следующий вид:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta Z, \quad \dot{U} = -\alpha U + 2\beta XU, \quad \frac{1}{2Z} + \beta U = 0. \quad (26)$$

Здесь и далее $Z = \langle x'^2 \rangle$ - дисперсия флуктуаций в системе. Система (26) обладает одной стационарной точкой:

$$X_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U_0 = -\frac{2\beta}{\alpha^2}, \quad Z_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}. \quad (27)$$

Исследуя стационарное решение (27) на устойчивость в первом порядке линейного приближения, получаем собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (28)$$

Среди этих собственных ненулевых значений всегда имеется корень с положительной вещественной частью. Следовательно, в линейном приближении стационарная точка системы является неустойчивой для всех параметров СВ-уравнения.

Для аналитического решения системы (26) введем функцию $\theta = \theta(t)$ таким образом, что для X , U и Z выполняются следующие соотношения:

$$X = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{\theta}}{\theta} + \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U = -C_1 \theta^2, \quad Z = \frac{1}{2\beta C_1 \theta^2}, \quad (29)$$

где $C_1 = const$. Данные соотношения будем называть аналитическим решением усредненной системы (26). Уравнение для θ выглядит следующим образом:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} \theta^2 - \frac{\beta}{C_1} \ln \theta + \frac{C_2}{4}}. \quad (30)$$

Здесь C_2 - константа интегрирования.

Для анализа устойчивости решения (29) в линейном приближении представим усредненные

переменные следующим образом:

$$X = \tilde{X}_0(t) + \xi, \quad U = \tilde{U}_0(t) + u, \quad Z = \tilde{Z}_0(t) + z, \quad \theta = \tilde{\theta}_0(t) + \psi, \quad (31)$$

где ξ , u , z и ψ - возмущения первого порядка малости. Отбрасывая слагаемые, квадратичные по данным возмущениям, получаем следующее решение:

$$\xi = \frac{\alpha B}{\beta \theta} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right), \quad u = -C_1 \theta \psi(t), \quad z = -\frac{\psi(t)}{2\beta C_1 \theta^3}, \quad \psi(t) = A \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) - B \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right). \quad (32)$$

Здесь A и B - константы интегрирования. Стационарная точка усредненной системы под действием случайного возмущения в случае $\theta \rightarrow \infty$, $\dot{\theta} \rightarrow \infty$ стремится к стационарной точке уравнения Ферхюльста без шумов, которая имеет значение α / β . Полученное решение для ξ и z является устойчивым по Ляпунову в силу своей ограниченности.

3.2. Система Вольтерра-Лотки

Модель Вольтерра-Лотки является хорошо исследованной во всех отношениях моделью двухвидовой популяции [2a]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy + \varepsilon_1, \quad \dot{y} = -\mu y + \nu xy + \varepsilon_2. \quad (33)$$

Здесь x, y - числа особей каждой из взаимодействующих популяций. В случае, если все параметры α, β, μ, ν неотрицательны, популяция x называется жертвами, а y - хищниками. Функции времени $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ являются случайными с математическим ожиданием в любой момент времени равным нулю: $\langle \varepsilon_1(t) \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_2(t) \rangle = 0$. В более общей интерпретации модели такого типа используются и в других задачах, например, в задачах динамики образования кластеров химических элементов под действием радиации [3a].

Применяя усреднение по методу Рейнольдса к уравнениям СВ-системы (33), получаем следующую систему усредненных уравнений:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta XY - \beta \langle x'y' \rangle, \quad \dot{Y} = -\mu Y + \nu XY + \nu \langle x'y' \rangle. \quad (34)$$

В эти уравнения входит ковариация флуктуаций $\langle x'y' \rangle$, для которой необходимо дополнительно указать уравнение эволюции, которое не следует из исходных уравнений. Стационарная точка системы (34) при $\langle x'y' \rangle = 0$ совпадает со стационарной точкой исходной системы (33) в случае отсутствия шума $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \equiv 0$ и имеет следующие координаты на фазовой плоскости $x - y$:

$$X_0 = \frac{\mu}{\nu}, \quad Y_0 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (35)$$

При наличии шума эта точка смещается. Фазовые траектории представлены на рис. 2.

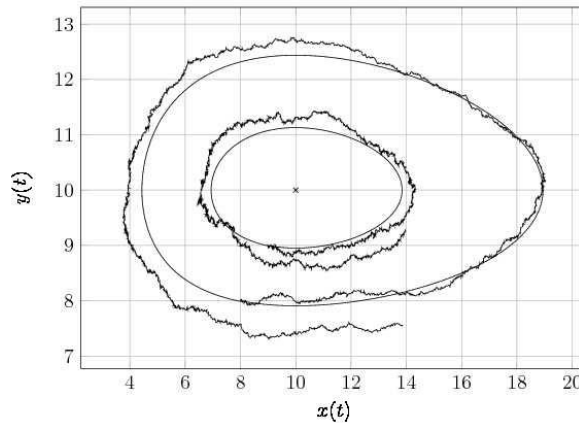


Рис.2. Типичные траектории на фазовой плоскости для $\alpha = 1000$, $\beta = 100$, $\mu = 100$, $\nu = 10$ (стационарная точка (10,10)).

По аналогии с (25) решаем задачу о максимуме функционала энтропии и получаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha X - \beta XY - \beta R, & \dot{Y} &= -\mu Y + \nu XY + \nu R, \\ \dot{U} &= -\alpha U + (\beta U - \nu W)Y, & \dot{V} &= \mu V + (\beta U - \nu W)X, \\ \frac{R}{D} &= \beta U - \nu W.\end{aligned}\quad (36)$$

Здесь введены обозначения $D = \det C = Z^2 - R^2$, $R = \langle x'y' \rangle$, $Z = \sqrt{\langle x'^2 \rangle \langle y'^2 \rangle}$.

Стационарная точка усредненной модели (36) следующая:

$$X_0 = \frac{\mu}{2\nu}, \quad Y_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad R_0 = \frac{\alpha\mu}{4\beta\nu}, \quad U_0 = \frac{1}{Z^2 - R_0^2} \frac{\alpha\mu}{8\nu\beta^2}, \quad V_0 = \frac{1}{Z^2 - R_0^2} \frac{\alpha\mu}{8\nu^2\beta}. \quad (37)$$

Вычисляем собственные числа возмущенной задачи:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{4} \left(4P_0 + 2(\alpha - \mu)^2 \pm 2\sqrt{(\alpha - \mu)^4 + 4P_0((\alpha - \mu)^2 + 8\alpha\mu + P_0)} \right)^{1/2}. \quad (38)$$

Здесь $P_0 = 4\beta\nu R_0/(1 + 2R_0^2/(Z^2 - R_0^2))$. Как показывает анализ, среди этих собственных ненулевых значений всегда имеется корень с неотрицательной вещественной частью. Следовательно, линейная устойчивость стационарного решения системы возможна только в случае равенства всех собственных чисел λ нулю, что соответствует равенствам:

$$\alpha = \mu, \quad Z^2 = \frac{\alpha^2 \mu^2}{16\beta^2 \nu^2}. \quad (39)$$

Поэтому можно констатировать, что в линейном приближении стационарная точка системы является неустойчивой почти для всех параметров СВ-системы. Однако существует особое решение системы (36):

$$X_0 = X_0(t), \quad Y_0 = Y_0(t), \quad U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad R_0 = 0. \quad (40)$$

Такое решение будем называть состоянием с максимальной энтропией, так как оно обладает максимальной энтропией по отношению ко всем остальным состояниям. Решения для возмущений множителей Лагранжа:

$$u = C_1 \frac{\dot{Y}_0}{X_0 Y_0} - C_0 \nu \frac{\dot{Y}_0}{X_0 Y_0} M(t), \quad v = -C_1 \frac{\dot{X}_0}{X_0 Y_0} + C_0 \nu \frac{\dot{X}_0}{X_0 Y_0} M(t) + \frac{C_0}{\dot{Y}_0}. \quad (41)$$

Другой вариант записи этих решений:

$$u = C_1 \frac{\dot{Y}_0}{X_0 Y_0} - C_0 \beta \frac{\dot{Y}_0}{X_0 Y_0} N(t) + \frac{C_0}{\dot{X}_0}, \quad v = -C_1 \frac{\dot{X}_0}{X_0 Y_0} + C_0 \beta \frac{\dot{X}_0}{X_0 Y_0} N(t). \quad (42)$$

Здесь $M(t) = \int X_0 \frac{Y_0^2}{(\dot{Y}_0)^2} dt$, $N(t) = \int Y_0 \frac{X_0^2}{(\dot{X}_0)^2} dt$. Решения (41) и (42) являются ограниченными.

Следовательно, состояние (40) устойчиво по Ляпунову.

Гл. 4. Модели образования дефектов под действием флуктуирующего излучения содержит описание применения метода максимальной энтропии к модели атомной кластеризации под действием флуктуирующего радиационного фона, к уравнению нелинейной диффузии, и анализ полученных замкнутых усредненных систем на устойчивость при различных свойствах случайного процесса.

4.1. Модель атомной кластеризации под действием флуктуирующего радиационного фона

В более общей интерпретации модель Вольтерра-Лотки (33) используются и в других задачах. Например, в задачах динамики образования кластеров химических элементов под действием радиации [3а]. Одна из таких моделей описывается следующей системой, схожей с системой Вольтерра-Лотки:

$$\frac{dN_V}{dt} = G - K_R N_V N_I - K_V N_V + \varepsilon_1, \quad \frac{dN_I}{dt} = G - K_R N_V N_I - K_I N_I + \varepsilon_2. \quad (43)$$

Здесь N_V и N_I - концентрации вакансий и междоузельных атомов, G - скорость введения свободно мигрирующих вакансий, K_R - константа рекомбинации, K_V - константа скорости поглощения вакансий, K_I - константа скорости поглощения междоузлий, ε_1 и ε_2 - некие случайные шумы. Стационарная точка системы (43) в случае отсутствия случайного воздействия:

$$N_{V0} = -\frac{K_I}{2K_R} + \frac{\sqrt{K_I^2 K_V^2 + 4GK_I K_V K_R}}{2K_R K_V}, \quad N_{I0} = -\frac{K_V}{2K_R} + \frac{\sqrt{K_I^2 K_V^2 + 4GK_I K_V K_R}}{2K_R K_I}. \quad (44)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{N}}_V &= G - K_R \bar{N}_V \bar{N}_I - K_R R - K_V \bar{N}_V, \quad \dot{\bar{N}}_I = G - K_R \bar{N}_V \bar{N}_I - K_R R - K_I \bar{N}_I, \\ \dot{U} &= K_R U \bar{N}_I + K_V U + K_R V \bar{N}_I, \quad \dot{V} = K_R V \bar{N}_V + K_I V + K_R U \bar{N}_V, \\ &-\frac{R}{Z^2 - R^2} + K_R U + K_R V = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Стационарная точка системы (45)

$$\begin{aligned} \bar{N}_{V0} &= -\frac{K_I}{2K_R}, \quad \bar{N}_{I0} = -\frac{K_V}{2K_R}, \quad R_0 = \frac{G}{K_R} + \frac{K_I K_V}{4K_R^2}, \\ U_0 &= \frac{1}{8K_R^3} \frac{4K_R G + K_I K_V}{Z^2 - \left(\frac{G}{K_R} + \frac{K_I K_V}{4K_R^2}\right)^2}, \quad V_0 = \frac{1}{8K_R^3} \frac{4K_R G + K_I K_V}{Z^2 - \left(\frac{G}{K_R} + \frac{K_I K_V}{4K_R^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (46)$$

в линейном приближении неустойчива и не имеет физического смысла из-за разности знаков коэффициентов скорости поглощения вакансий и междоузельных атомов (и K_V , и K_I по определению должны быть неотрицательными). Устойчивым является состояние с максимальной энтропией

$$N_{V0} = N_{V0}(t), \quad N_{I0} = N_{I0}(t), \quad U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad R_0 = 0. \quad (47)$$

В данном случае система эволюционирует вблизи траекторий невозмущенной системы.

Устойчивость может достигаться путем введения в систему уравнений слагаемого, отвечающего за диффузию междоузлий и вакансий в облучаемых материалах. Сама система в этом случае принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{N}}_V &= G - K_R \bar{N}_V \bar{N}_I - K_R R - K_V \bar{N}_V + D_V \Delta \bar{N}_V, \quad \dot{\bar{N}}_I = G - K_R \bar{N}_V \bar{N}_I - K_R R - K_I \bar{N}_I + D_I \Delta \bar{N}_I, \\ \dot{U} &= K_R U \bar{N}_I + K_V U + K_R V \bar{N}_I - D_V \Delta U, \quad \dot{V} = K_R V \bar{N}_V + K_I V + K_R U \bar{N}_V - D_I \Delta V, \\ &-\frac{R}{Z^2 - R^2} + K_R U + K_R V = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Показано, что стационарное однородное решение системы (48) в состоянии с нулевыми корреляциями может быть периодическим либо по координате, либо по времени. При этом условие наблюдаемости периодических структур в материалах под облучением автоматически означает рост кластеров дефектов по времени, что хорошо согласуется с экспериментом.

Гл. 5. Модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы содержит описание применения метода максимальной энтропии к модели Паркера солнечного ветра. Вычисляются и анализируются решения системы уравнений, соответствующие усредненным параметрам солнечного ветра.

5.1. Описание теории

Теория Паркера солнечного ветра [13а-15а] строится в предположении, что солнечный ветер - это гидродинамический поток плазмы, возникающий в короне Солнца из-за большой ее температуры (термический ветер), и направленный наружу. Скорость потока частиц солнечного ветра достаточно велика, чтобы преодолеть силу тяготения. Поэтому первым уравнением теории является уравнение Эйлера радиального течения газа в поле тяготения Солнца с учетом случайного шума f с математическим ожиданием равным нулю:

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} + f. \quad (49)$$

Вторым уравнением теории является закон сохранения массы, которое при радиальном течении плазмы будет иметь следующий вид:

$$\rho r^2 u = \text{const}. \quad (50)$$

Проинтегрировав уравнение (49) и умножив на плотность, получаем закон сохранения энергии солнечного ветра с учетом некоторого случайного шума ε :

$$\frac{\rho u^2}{2} = -\rho \int \frac{P'(\rho)}{\rho} d\rho + \left(\frac{GM_{\odot}}{r} + C_1 \right) \rho + \varepsilon. \quad (51)$$

Последнее уравнение теории Паркера представляет уравнение состояния газа, которое можно записать в разных вариантах. В простейшем случае можно предположить, что газ, вытекая из короны Солнца, не изменяет температуры: $T = \text{const}$. В этом случае имеем следующее уравнение состояния:

$$P = 2 \frac{\rho}{m_p} kT, \quad (52)$$

где m_p - масса протонов. Другое предположение состоит в адиабатичности потока, которое можно записать в следующем виде:

$$P = k_0 \rho^\gamma, \quad (53)$$

где γ - показатель адиабаты плазмы, k_0 - некая константа.

5.2. Решение задачи о солнечном ветре

Уравнения Эйлера-Лагранжа для уравнений (49) и (50) в случае (53) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\langle u'^2 \rangle}{2} \right) + \bar{u} \langle u' \rho' \rangle + \frac{k_0 \gamma}{\gamma - 1} \bar{\rho}^{-\gamma} f(z, \gamma) &= \left(\frac{GM_{\odot}}{r} + C_1 \right) \bar{\rho}, \\ \bar{u} \bar{\rho} r^2 + \langle u' \rho' \rangle r^2 &= C_2, \\ \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\langle u'^2 \rangle}{2} + \frac{k_0 \gamma^2}{\gamma - 1} \bar{\rho}^{-\gamma-1} f(z, \gamma) + \frac{k_0 \gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial f(z, \gamma)}{\partial \rho} \bar{\rho}^{-\gamma} - \frac{GM_{\odot}}{r} - C_1 \right) W_1 + r^2 \bar{u} W_2 &= 0, \\ (\bar{u} \bar{\rho} + \langle u' \rho' \rangle) W_1 + \bar{\rho} r^2 W_2 &= 0, \quad \bar{\rho} W_1 + \frac{\langle \rho'^2 \rangle}{\det C} = 0, \\ \frac{k_0 \gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial f(z, \gamma)}{\partial \langle \rho'^2 \rangle} \bar{\rho}^{-\gamma} W_1 + \frac{1}{2} \frac{\langle u'^2 \rangle}{\det C} &= 0, \quad W_1 \bar{u} + W_2 r^2 - \frac{\langle u' \rho' \rangle}{\det C} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь

$$f(z, \gamma) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-2n)}{(2n)!} \lambda_n z^n.$$

Из уравнений системы (54) следует, что

$$\langle u' \rho' \rangle \left(\frac{\langle \rho'^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} - 1 \right) = 0.$$

Отсюда получаем два независимых решения:

$$I) \frac{\langle \rho'^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} = 1, \quad II) \langle u' \rho' \rangle = 0.$$

При условии I) из (54) получаем следующее выражение для дисперсий скорости и плотности:

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{\langle \rho'^2 \rangle} = \frac{2k_0 \gamma}{\gamma - 1} \chi^*(\gamma) \bar{\rho}^{-\gamma-3}. \quad (55)$$

Здесь

$$\chi^*(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-2n)}{(2n)!} \lambda_n.$$

Для значений показателя адиабаты в диапазоне $1 \leq \gamma < 2$ параметр $\chi^*(\gamma)$ обращается в бесконечность. При этом отношение дисперсий I) принимает отрицательное значение.

Данный результат не имеет физического смысла и, значит, решение I) можно не рассматривать. Решая систему уравнений (54) при условии II), получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными ($\bar{\rho}$ и $\langle \rho'^2 \rangle$):

$$\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}((\gamma-1)f(z,\gamma)-2\chi(z,\gamma))\bar{\rho}^{-\gamma+1}=\frac{C_2^2}{r^4}, \quad \frac{k_0\gamma}{\gamma-1}f(z,\gamma)(1+\gamma)\bar{\rho}^{-\gamma-1}=2\left(\frac{GM_\odot}{r}+C_1\right). \quad (56)$$

Здесь

$$\chi(z,\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-2n)}{(2n)!}\lambda_n z^n.$$

Решения уравнений (56) соответствуют графикам на Рис. 3. При построении графиков принимались следующие значения для параметров модели: $\gamma=5/3$, $k_0=0.82\cdot 10^{30}$ Па $\cdot$ м⁵/кг^{5/3}, $C_1=0.9257118054\cdot 10^{17}$ м²/с², $C_2=0.18717215\cdot 10^{12}$ кг/с:

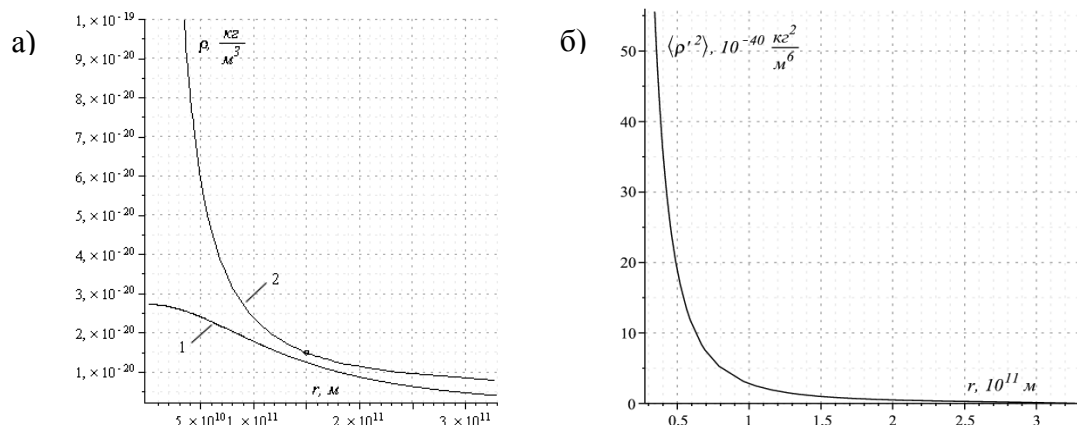


Рис.3. Зависимость плотности (а) в исходной модели Паркера (1) и усредненной модели Паркера (2) и дисперсии плотности (б) частиц солнечного ветра от расстояния до Солнца.

Точкой указано положение Земли и соответствующее значение плотности солнечного ветра. Усредненная модель солнечного ветра компенсирует один существенный недостаток исходной модели Паркера, а именно, очень низкие значения плотности частиц плазмы на дальних расстояниях от поверхности Солнца, что можно увидеть на Рис. 3.

Из полученного численного решения системы (54) можно сделать вывод, что при уменьшении плотности потока частиц солнечного ветра уменьшается и дисперсия плотности. При удалении от поверхности Солнца плотность и дисперсия плотности асимптотически стремятся к своим фиксированным значениям, что говорит об устойчивости предложенной усредненной модели Паркера.

Публикации по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в список ВАК:

1. Журавлев В.М., Миронов П.П. Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии // Нелинейный мир - 2011. - Т. 9, № 4. - С. 201-212.
2. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Случайно-возмущенные динамические системы типа Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии // Приложение к журналу «Физическое образование в ВУЗах». - 2011. - Т. 17, № 1. - С. 18.
3. П.П. Миронов. Стохастическая модель атомной кластеризации под воздействием радиационного излучения и метод максимальной энтропии // Приложение к журналу «Физическое образование в ВУЗах». - 2012. - Т. 18, № 4. - С. 20.

4. В.М. Журавлев, П.П. Миронов. Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». - 2013. - № 1 (30). - С. 352-360.
5. Журавлев В.М., Миронов П.П. Динамика случайно-возмущенного уравнения Ферхюльста и метод максимальной энтропии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. - 2013. - № 2 (26). - С. 156-170.
6. Журавлев В.М., Миронов П.П., Летуновский С.В. Построение огибающей и локальной частоты стохастического процесса на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. - 2013. - № 3 (27). - С. 153-165.

Публикации в прочих изданиях:

1. Миронов П.П., Журавлев В.М., Метод максимальной энтропии и модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы // Всероссийский журнал научных публикаций - 2013. - № 4 (19). - С. 2-5.
2. Журавлев В.М., Миронов П.П. Случайно-возмущенные динамические системы и принцип максимума энтропии // Ученые записки Ульяновского государственного университета. - 2013. - № 1. - С. 191 - 199.
3. Журавлев В.М., Миронов П.П. Случайно-возмущенные динамические системы в квадратичном представлении и метод максимальной энтропии // Всероссийский журнал научных публикаций. - 2014. - № 4 (24). - С. 2-7.
4. Миронов П.П., Журавлев В.М. Метод Рейнольдса для случайно-возмущенных уравнений Вольтерра-Лотке // Труды Седьмой международной конференции «Математическое моделирование физических, технических, социальных систем и процессов». - Ульяновск: УлГУ. - 2009. - С. 188.
5. Шляпин В.А., Миронов П.П., Журавлев В.М., Корнилов Д.А. Метод максимальной энтропии в теории случайно-возмущенных нелинейных динамических систем // Вторая Международная конференция «Математическая физика и ее приложения». - Самара: СамГУ. - 2010. - С 345.
6. Д.А. Корнилов, В.М. Журавлев, П.П. Миронов, В.А. Шляпин. Метод максимальной энтропии в теории случайно-возмущенных динамических систем, связанных с задачами атомной кластеризации под действием радиационного облучения // Труды Шестой всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике». Часть 1. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2011. - С. 197-198.
7. Миронов П.П., Журавлев В.М. Случайно-возмущенные динамические системы кинетики радиационного образования кластеров и метод максимальной энтропии // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. - Пермь: ИМСС УрО РАН. - 2011. - С.229.
8. Миронов П.П. Случайно-возмущенные динамические системы типа Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии // Материалы XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Секция «Физика». Подсекция «Теоретическая физика». - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. - Т.2. - 2011. - С 147.
9. Миронов П.П. Случайно-возмущенные динамические уравнения Эйлера для вращения твердого тела и метод максимальной энтропии // Материалы XIX международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Секция «Физика». Подсекция «Математическое моделирование». - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. - 2012. - С. 115-116.
10. В.М. Журавлев, П.П. Миронов. Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конф. / под ред. Чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ. - 2012. - С.134.

11. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Стохастическая динамика нелинейных уравнений и метод максимальной энтропии // Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых "Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика". - Саратов: СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. - 2012. - С. 93.
12. Миронов П.П., Журавлев В.М. Стохастическая динамика модели аттрактора Лоренца и метод максимальной энтропии // Труды Шестой всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике». Часть 1. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2013. - С. 286-287.
13. Миронов П.П., Бызыкчи А.Н., Журавлев В.М. Модель солнечного ветра с учетом турбулентности плазмы и метод максимальной энтропии // Сборник тезисов II Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. Секция «Физика плазмы и взаимодействие электромагнитного излучения с веществом». - М.: РУДН. - 2013. - С. 150-154.
14. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Метод максимальной энтропии и модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы // Труды международного семинара "Нелинейные поля в теории гравитации и космологии" и Российской школы "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений". - Казань: К(П)ФУ. - 2013. - С. 145-146.
15. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Модель солнечного ветра с учетом турбулентности плазмы и метод максимальной энтропии // Международная зимняя школа-семинар по гравитации, астрофизике и космологии "Петровские чтения-2014". Аннотации лекций. Тезисы докладов. - Казань: К(П)ФУ. - 2014. - С. 21-23.
16. Миронов П.П., Журавлев В.М. Метод максимальной энтропии в расширенной модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. Сборник тезисов I Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. Секция «Физика плазмы и взаимодействие электромагнитного излучения с веществом». - М.: РУДН. - 2014. - С. 168-170.
17. П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Метод максимальной энтропии в расширенной модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. XV-я Российская гравитационная конференция «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике», Международная школа по гравитации и космологии «GRACOS-2014». Материалы конференции. - Казань: К(П)ФУ. - 2014. - С. 183-184.
18. В.М. Журавлев, П.П. Миронов. Метод максимальной энтропии в задачах теории динамических систем. Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения». - Самара: СамГТУ. - 2014. - С. 167-168.

Цитируемая литература:

- [1a] У.Фриш. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, (1998), 343 с.
- [2a] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. — М.-Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 231 с.
- [3a] В.В. Светухин, В.Н. Голованов, В.Д. Рисованный. Сборник статей. Моделирование поведения под облучением реакторных материалов.- Ульяновск: УлГУ, 2007. - 205 с.
- [4a] Журавлев В.М. Физика околоземного космического пространства. Курс лекций. Методическое пособие. Самара-Ульяновск. 2010. 180 с.
- [5a] Metropolis, N., Ulam, S. The Monte Carlo Method, — Journal of the American Statistical Association, 1949, 44, № 247, pp. 335—341.
- [6a] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — ИЛ, 1954. — с. 159 – 169.
- [7a] Журавлев В.М., Шляпин В.А. Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем // Нелинейный мир, 2008, Т.6, № 7, с. 352-363

- [8a] Журавлев В.М. Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии // ЖТФ, 2009, Т. 79, N 1, с.16-27
- [9a] Журавлев В.М., Шляпин В.А. Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии // Сб. Прикладная математика и механика, 2009, УлГТУ, Ульяновск, с. 72-88
- [10a] Ю.Л.Климонтович. Введение в физику открытых систем. М.: "Янус-К", 2002, 284 С.
- [11a] А. С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, 1967, 639 С; Ч.2 1969, 720 С.
- [12a] Р. Л. Стратонович. Теория информации. М.: Со. радио 1975, 424 с.
- [13a] Паркер Ю., Космические магнитные поля, М.: Мир, Т. 1,2, (1982). – 1088 с.
- [14a] Акасофу С.И., Чапмен С. Солнечно-земная физика. М.: Мир, Т.1,2, 1974.
- [15a] И.С. Веселовский. Солнечный ветер и гелиосферное магнитное поле. В Сб. Модель космоса. Т.1. Под ред. Ю.И. Логачева. Изд. М.: КДУ, 2007с.

АННОТАЦИЯ

Миронов Павел Павлович

“Метод максимальной энтропии в теории случайно-возмущенных динамических уравнений и его приложение к задачам теоретической физики”

Получено замкнутое описание усредненной динамики стохастических систем с помощью метода максимальной энтропии. Проанализирована устойчивость рассматриваемых моделей при различных свойствах случайного процесса. Получены решения для усредненных величин моделей образования дефектов в облученных материалах и солнечного ветра и сравнены с решениями исходных моделей.

ABSTRACT

Pavel Mironov

“The maximum entropy method in random-disturbed dynamics equations theory and its application to theoretical physics problems”

The closed description of average dynamics of stochastic systems on the basis of the maximum entropy method is obtained. The stability of considered models for different properties of random process is analysed. The solutions for average quantities of models of defects formation in the irradiated materials and solar wind are obtained and compared with solutions of initial models.