

На правах рукописи

Ефремов
Александр Петрович

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАТЕРНИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ
ВЗАИМОСВЯЗИ С СИСТЕМАМИ ОТСЧЕТА И ФИЗИЧЕСКИМИ
ПОЛЯМИ

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Челябинск 2005



Работа выполнена в Институте гравитации и космологии
Российского университета дружбы народов

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,
профессор

Ю.С.Владимиров

доктор физико-математических наук
профессор

С.В.Червон

доктор физико-математических наук,
профессор

А.Е.Дудоров

Ведущая организация: Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

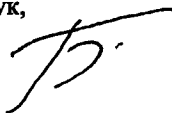
Защита состоится «20» января 2006 года в _____ час.

На заседании диссертационного Совета Д 212.296.03 Челябинского государственного университета, г. Челябинск.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЧелГУ

Автореферат разослан «___» _____ 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного Совета
доктор физико-математических наук,
профессор



Е.А.Беленков

2006-4
28434

2254805
3

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Успех магистрального направления современной теоретической физики – построение единой теории известных физических взаимодействий – существенным образом зависит не только от удачного выбора соответствующих базовых схем или конструкций, но – в высокой степени – от уровня развития и разнообразия математического инструментария, посредством которого построение таких конструкций осуществляется. Так, без вариационного исчисления сегодня немыслима классическая механика и теория поля, теория дифференцируемых многообразий повлекла за собой геометризацию физических взаимодействий и становление общей теории относительности, разработка методов математической статистики тесно связана с развитием статистической и квантовой физики. Не говоря уже о теории групп, применяемой чуть ли не во всех области теоретической физики.

Особое место в физических теория принадлежит кватернионам. Открытая У.Гамильтоном математика этих гиперкомплексных чисел – алгебра, и ассоциируемая с ней геометрия – интенсивно развивалась в XIX столетии, причем именно ее соотношения оказались наиболее удобными для первой записи уравнений электродинамики Дж.Максвелла. В дальнейшем теория кватернионов стимулировала быстрое развитие стандартной векторной алгебры, которая на время даже вытеснила кватернионное исчисление из теоретической физики. Однако последующие экспериментальные и теоретические исследования с необходимостью вновь вернулись к кватернионам.

Матрицы Паули, введенные для
РОС. НАЦИОНАЛЬНАЯ
БИБЛИОТЕКА
С.Петербург
09 10 2004

описания квантово-механического спина частицы оказались ни чем иным как одним из представлений (с точностью до множителя) «мнимых» единиц кватернионной алгебры. С кватернионами оказались связаны преобразования группы $SU(2)$ и спинорные поля Г.Вейля. Несколько позднее Р.Фютер, установил, что условия аналитичности векторной функции кватернионного переменного (обобщающие условия Коши-Римана) формально совпадают с вакуумными уравнениями электродинамики.

Но, хотя интерес исследователей к математике кватернионов никогда не спадал, системные попытки найти закономерности в «странных кватернионных совпадениях» не известны. Последние десятилетия демонстрируют процесс интенсивного применения кватернионов как весьма удобного, а иногда необходимого инструмента физических теорий и все более возрастающее внимание к ним как к весьма содержательному физико-математическому объекту. Тем не менее, применение кватернионных соотношений или их возникновение в физических теориях по-прежнему остается в известном смысле спонтанным, а сведения об этих проявлениях достаточно разрозненными. Более того, совсем отсутствует возможность «предварительного учета» или предсказания появления кватернионных величин в той или иной теории; зачастую отсутствует и геометрическая трактовка многих таких величин.

Все вышеизложенное, а также тот факт, что число публикаций, в том или ином виде эксплуатирующих кватернионы, быстро растет, и вновь образуются сообщества исследователей, в том числе международные, ставящие себе целью изучение гиперкомплексных чисел¹, обуславливают актуальность и своевременность темы предлагаемого в диссертации исследования.

¹ См. например сайт <http://hypercomplex.xpsweb.com>

Цель диссертации

Исследование, содержащееся в диссертации, имеет своей целью:

- дальнейшее развитие собственно фундаментальной математики кватернионных чисел, в частности определение допустимых множеств представлений кватернионных единиц и условий сохранения формы правила кватернионного умножения при допустимых преобразованиях элементов кватернионной алгебры, а также исследование структуры кватернионных чисел;
- выявление взаимосвязи алгебры и дифференциальных соотношений, свойственных кватернионам, с геометрическими объектами; построение теории кватернионных пространств общего вида и последующее введение их классификации;
- установление системного характера проявления кватернионных структур как составляющих физических теорий; разработка схем построения, фактическое построение и детальный анализ физически состоятельных теорий на кватернионных пространствах разных типов, расчет в рамках этих теорий характерных физических эффектов.

Научная новизна диссертации

В диссертации содержится серия оригинальных исследований и представлен ряд новых физико-теоретических моделей.

В алгебраической части к таким исследованиям относятся не отраженные в научной литературе проблемы множественности представлений специальных кватернионов, не замеченные ранее факты инвариантности кватернионного умножения по отношению к специальной

ортогональной группе на поле комплексных чисел, а также не обсуждаемая прежде составная природа «мнимых» кватернионных единиц, следовательно, любых векторов-кватернионов.

В оригинальном исследовании геометрической части вводится определение кватернионных пространств, осуществляется детальное изучение их «внешней» дифференциальной структуры, определяются новые геометрические объекты: кватернионная связность, гамильтоново кручение и кватернионная неметричность, а также дается анализ их свойств; предлагаются логически обоснованные варианты классификации кватернионных пространств.

В части диссертации, посвященной связи кватернионных пространств с физическими теориями впервые показано, что разные типы пространств с кватернионной метрикой могут рассматриваться как база классической и квантовой механики, а пространства с кватернионной неметричностью – как база поля Янга-Миллса.

На кватернионном пространстве систем отсчета с комплексными параметрами (бикватернионными триадами) построена новая релятивистская теория – кватернионная теория относительности, – позволяющая в отличие от специальной теории относительности решать широкий круг кинематических задач относительного движения в неинерциальных системах отсчета наблюдателя. В рамках кватернионной теории подробно решен ряд новых релятивистских задач: движение по круговым орбитам, прецессия типа Томаса для плоских траекторий произвольной формы, полная задача кинематики для релятивистского гармонического осциллятора. Рассчитан новый, в принципе наблюдаемый релятивистский эффект. Приводится оригинальный вывод уравнений релятивистской динамики.

Предложен новый вариант обобщения теории гравитации, использующий в качестве трехмерных сечений пространства-времени, кватернионные пространства, поляризованные гамильтоновым кручением и кватернионной неметричностью. Для стационарных метрик найдены точные вакуумные решения. Среди класса стационарных цилиндрически симметричных метрик, источником которых является идеальная жидкость с «жестким» уравнением состояния, обнаружено не цитированное ранее решение уравнений ОТО.

Научная и практическая значимость работы

Результаты исследования алгебраических свойств и структуры специальных кватернионов представляет собой вклад в развитие теории гиперкомплексных чисел.

Результаты исследования дифференциальных и геометрических характеристик кватернионных триад как подвижного репера могут быть использованы в практических и теоретических работах для развития методов бескоординатного представления геометрических объектов (кривых, поверхностей и пространств), а также для постановки и решения задач классической механики, требующих применения неинерциальных (как угодно сложно вращающихся) систем отсчета.

Разработанный и подробно изложенный в диссертации метод уравнений поворота комплексных кватернионных триад может быть применен для расчета релятивистских эффектов как в инерциальных, так и в неинерциальных (произвольно ускоряющихся и вращающихся) системах отсчета.

Предложенная классификация кватернионных пространств, может быть использована для целенаправленного выбора типа пространства и построения на его базе физической теории, которая включала бы

геометрические объекты, ассоциируемые с заданным состоянием пространства (асимметрия метрики, поляризация) или предполагаемыми физическими величинами (потенциалы и напряженности полей).

В целом результаты, представленные в диссертации, могут быть применены в широком диапазоне исследований в области теоретической физики, отражены в учебно-методической литературе, а также использованы в качестве университетских спецкурсов для студентов естественно-научных и технических специальностей².

Основные положения, выносимые на защиту

1. Получены новые данные о свойствах и строении кватернионов. Определены множества допустимых матричных представлений специальных кватернионов (единиц базиса кватернионных чисел). Базовое множество образуется двумя бесследовыми 2×2 -матрицами с единичным детерминантом, при условии, что след произведения этих матриц также равен нулю. Указана всегда возможная процедура удвоения ранга исходных матриц, которая позволяет, в частности, задать специальные кватернионы с помощью только действительных чисел. Установлено, что правило умножения кватернионных единиц не изменяет формы (инвариантно), если специальные кватернионы подвергаются преобразованиям из родственных групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SO(3, \mathbb{C})$; принадлежность коэффициентов при единицах к полям \mathbb{R} или \mathbb{C} не существенна. Показано также, что все векторы-кватернионы с действительными компонентами форм-инвариантны относительно группы вращений $SO(3, \mathbb{R})$. Установлено наличие составной природы кватернионных

² Курс «Механика Ньютона в кватернионном базисе», ежегодно читается студентам физических и инженерных специальностей РУДН по учебному пособию автора диссертации, начиная с 1992 года.

единиц; на основе решения уравнений для собственных функций операторов представления специальных кватернионов определена их внутренняя структура. Показано, что собственные функции кватернионных операторов являются более фундаментальными математическими объектами, нежели векторы-кватернионы базисных триад, и представляют собой обобщенные спиноры, преобразующиеся группой $SL(2C)$. Найдено, что, в отличие от нелинейной взаимозависимости специальных кватернионов одной триады, соответствующие им спиноры связаны друг с другом линейным соотношением. Вычислены все возможные скалярные (численные) инварианты алгебры кватернионов, построенные из набора спиноров любой кватернионной триады.

2. Получены базовые дифференциальные соотношения для векторных кватернионных триад, рассматриваемых как жесткие подвижные реперы. С использованием объекта кватернионной связности разработана схема бескоординатного представления кривых. Введены понятия касательных кватернионных пространств и собственно трехмерного векторного кватернионного пространства (Q -пространства), обладающего всеми известными свойствами пространства аффинной связности (с картановым кручением и неметричностью), а также специфическими кватернионными свойствами. Установлено, что метрика Q -пространств вынужденно оказывается несимметричной, и для них характерна «внешняя» дифференциальная структура, представленная в общем случае собственной (метрической) Q -связностью, алгебраически эквивалентным ей кручением (гамильтоново кручение), а также кватернионной неметричностью. Для Q -пространств общего вида дан подробный анализ структуры тензора кривизны, построенного

из всех возможных объектов связности. Предложены схемы геометрических классификаций кватернионных пространств в зависимости от наличия (или отсутствия) основных геометрических объектов: неметричности, кручения и кривизны различной природы; каждая из иерархий содержит не менее 13 типов пространств: от общего типа до простейшего «евклидова» Q -пространства (с постоянной несимметричной метрикой).

3. Реализована схема изучения специфики Q -пространств различного типа в ряде физических теорий. (i) В риманово-плоском Q -пространстве жестких триад с действительными параметрами группы инвариантности Q -векторов и при наличии Q -связности (гамильтонова кручения) получены уравнения динамики в как угодно сложно вращающихся системах отсчета. (ii) В аналогичном метрическом чисто кватернионном пространстве, но с комплексными параметрами векторной группы и компонентами собственной Q -связности и кручения построена «кватернионная теория относительности» – новая методика расчета релятивистских кинематических эффектов в системах отсчета, движущихся с произвольными ускорениями (в том числе, с переменными бустами); параметр времени при этом является мнимой координатой. (iii) Показано, что простейшее «евклидово» Q -пространство, не содержащее «аффинных» и кватернионных объектов, но с Q -метрикой, имеющей декартову часть и антисимметричное бесследовое слагаемое, может рассматриваться как геометрический фон квантовой механики. Вычисленный в таком пространстве гамильтониан заряженной квантово-механической частицы в магнитном поле автоматически содержит слагаемое Паули, вычисляемое вместе с коэффициентом, который

совпадает с выражением для магнетона Бора; в такой трактовке спиновые свойства признаются атрибутом геометрии, а не квантовой частицы. (iv) Разработана схема построения четырехмерных теорий гравитации с трехмерными сечениями в виде искривленных квазиримановых Q -пространств с поляризациями, заданной гамильтоновым кручением или чисто кватернионной неметричностью. (iv) Установлено, что в чисто кватернионных Q -пространствах, содержащих только метрическую Q -связность и Q -неметричность, компоненты которых могут зависеть от пространственных координат и времени, соответствующий тензор кривизны формально имеет структуру напряженности поля Янга-Миллса, потенциалом является линейная комбинация метрической Q -связности и Q -неметричности. Уравнения поля при этом следуют из простейшего квадратичного по кривизне лагранжиана.

4. Построена и детально проанализирована новая методика моделирования и вычисления эффектов относительного движения систем отсчета, представленных Q -триадами («кватернионная теория относительности»). В ее основе лежит инвариантность относительно специальной подгруппы $SO(3, C)$ «метрического» бикватернионного вектора, компоненты которого ассоциируются с изменением координат и временным интервалом для частицы, наблюдаемой из кватернионного репера. Такой бикватернион, с необходимостью имеющий норму, является специфическим корнем квадратным из линейного элемента теории относительности. Показано, что взаимосвязь между различными системами отсчета описывается алгебраическим матричным уравнением поворота, элементы которого принадлежат векторной группе $SO(1, 2)$. Предложенная теория содержит известные кинематические

эффекты СТО, но, кроме того, в силу векторной природы базового «метрического» бикватерниона, и возможности локализации параметров группы, позволяет решать широкий круг релятивистских задачи кинематики в неинерциальных реперах. Такие решения подробно проанализированы для гиперболического движения (из ускоренной системы отсчета, в том числе с учетом запаздывания сигнала), для движения по окружности (из покоящейся и ускоренной систем отсчета), для движения по плоским некруговым орбитам. С позиций как покоящегося, так и ускоренного наблюдателя получено также полное решение задачи кинематики для релятивистского гармонического осциллятора; при этом большинство окончательных соотношений получено в результате точного интегрирования в виде сходящихся рядов, содержащих числа Эйлера и Бернулли. Помимо детального представления кинематики в рамках развиваемой методики предложен вариант релятивистских динамических уравнений с формулировкой соответствующей задачи двух тел.

5. На базе «кватернионной теории относительности» в приближении малых относительных скоростей рассчитан релятивистский эффект наблюдаемого смещения положения (по отношению к расчетному) быстрых спутников планет Солнечной Системы, наблюдаемых с Земли; установлено, что этот эффект накапливается со временем. Приведена таблица расчетных значений видимого смещения положения ряда спутников Марса и Юпитера. В частности, для Метиса (быстрый спутник Юпитера) значение наблюдаемого линейного смещения, имеющего релятивистскую природу, за один юпитерианский год (11,8 земных лет) составляет 52 км при диаметре спутника 40 км, т.е. вековой сдвиг на порядок больше

размеров спутника. Аналогичный порядок величин характеризует релятивистский сдвиг спутника Адрастея (Юпитер); для спутников Амальтея, Теба (Юпитер) и Фобос (Марс) такое смещение превышает размеры планет в два-три раза. Эти расчетные данные позволяют полагать, что в специально организованном наблюдательном эксперименте указанный эффект может быть обнаружен экспериментально.

6. Получен ряд точных решений уравнений теории гравитации в четырехмерном пространстве-времени, трехмерным сечением которого являются Q -пространства различных типов, при этом дифференциальные кватернионные характеристики (гамильтоново кручение и неметричность) задают геометрическую поляризацию. В Q -пространстве без кручения и «аффинной» неметричности, но содержащем почти изотропную Q -неметричность, получено несингулярное решение для нестационарной космологической модели с источником в виде пыли и бесконечным радиусом кривизны, а также статическое вакуумное решение, обобщающее модель вселенной Эйнштейна. Для квазириманового Q -сечения (содержащего только риманову связность и кривизну, а также гамильтоново кручение) получено стационарное цилиндрическое решение в вакууме или с источником в виде идеальной жидкости, имеющей жесткое уравнение состояния; отказ в последнем случае от кватернионной специфики приводит к точному решению уравнений ОТО.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на международных, всесоюзных и всероссийских конференциях:

«Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности гравитации» (Москва, 1985 г.; Пущино, 1993 г.; Новгород, 1996 г.; Москва, 1999 г.; Томск, 2002 г.; Казань, 2005 г.), на международной школе-семинаре «Многомерная гравитация и космология» (Ярославль, 1994 г.), на II Международной конференции «Бойиан-Гаусс-Лобачевский» (Венгрия, Ньиредьхаза, 1999 г.), на Международной конференции ЮНЕСКО по естественным наукам (Египет, Ассиут, 2000 г.), на V Международной конференции по гравитации и астрофизике стран азиатско-тихоокеанского региона (Москва, 2001 г.), на Международной школе-семинаре по гравитации и космологии (Италия, Сицилия, Эрриче, 2003 г.), на научном семинаре П.А.М.Дирака (Таллахасси, Флорида, США, 1983 г.), на научном семинаре акад. А.Т.Фоменко (МГУ, Москва, 2000 г.), на научных семинарах проф. Я.П.Терлецкого (УДН, Москва) и проф. Ю.С.Владимирова (МГУ, Москва), на научных семинарах Хьюстонского университета (Хьюстон, Техас, США), МГУ, РУДН, УНИГК.

Публикации

Диссертация написана на основе 36 публикаций автора (включая 2 монографии), указанных в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав основного текста, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 133 наименования. Объем диссертации составляет 259 страниц текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация содержит две основные части. Первая часть посвящена исследованиям собственно математики кватернионов и состоит из трех глав.

Глава 1 содержит основные сведения о кватернионах и формулы кватернионной алгебры в традиционной (гамильтоновой) записи. Приведен простейший вариант построения триад специальных кватернионов из двух бесследовых 2×2 -матриц с единичным определителем и, вообще говоря, комплексными компонентами. Показано, что требование нулевого следа матрицы-произведения является необходимым для включения этой матрицы в состав триады. Указан алгоритм построения представлений кватернионных единиц матрицами ранга 2^n , где n – натуральное число.

В Главе 2 изучаются свойства инвариантности кватернионного умножения, алгебраические свойства собственно кватернионных единиц, их геометрические образы и связанные дифференциальные соотношения. В Параграфе 2.1 векторные кватернионные единицы записываются в компактном «тензорном» формате \mathbf{q}_k , $k=1,2,3$ вместе с «таблицей умножения» кватернионов $1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k$, $\mathbf{q}_k \mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj} \mathbf{q}_j$, где δ_{kl} , ε_{klj} – соответственно трехмерные символы Кронекера и Леви-Чивиты. Установлено, что в общем случае это правило кватернионного умножения остается форм-инвариантным при преобразовании векторных единиц либо 2×2 -матрицами спинорной группы $U \in SL(2C)$, либо 3×3 -матрицами $O \in SO(3, C)$, каждая из которых содержит 3 независимых комплексных параметра. Показано, что матрицы U представимы в виде унимодулярных кватернионов, а также выведены формулы взаимосвязи между матрицами U и O . В Параграфе 2.2 вводится понятие кватернионного базиса: переменные векторные единицы (с действительными параметрами) геометрически ассоциируются с жестким подвижным репером. Посредством решения задачи на собственные значения и функции матриц-операторов выявляется наличие внутренней структуры векторов Q-базиса,

анализируются алгебраические свойства составляющих парных триад спиноров, вычисляются все возможные их произведения, оказывающиеся $U \in SL(2C)$ -инвариантными скалярами (числами). Устанавливается геометрическое правило применения базовых спиноров для определения проекций векторов, заданных в Q -базисе на выбранное направление. Дается определение вектора-кватерниона, демонстрируется его форм-инвариантность по отношению к преобразованиям, осуществляемым матрицами $R \in SO(3, R)$. Исследуются дифференциальные свойства Q -базиса как подвижного репера. Вводится понятие кватернионной связности, устанавливаются ее матричные свойства, определяется число ее независимых компонент, которым дается физическая и геометрическая интерпретация. В качестве характерного примера для гладкой кривой общего вида строится кватернионный репер Френе-Серре, с одной стороны, реализующий простую схему бескоординатной (матричной) записи произвольных гладких кривых, а с другой – представляющий образ касательного кватернионного пространства на искривленном одномерном многообразии.

Глава 3 посвящена изучению кватернионных пространств. В Параграфе 3.1 с использованием стандартных методов и величин (коэффициенты Ламе, матрицы дополнительного поворота) для дифференцируемых многообразий общего вида введено понятие касательного векторного Q -пространства, характеризующегося наличием в каждой точке континуума кватернионных триад; приведены соответствующие примеры. В Параграфе 3.2 дано определение собственно векторного Q -пространства, база которого имеет структуру локально тождественную его касательному Q -пространству. Введено понятие специфической кватернионной метрики, формально совпадающей с частью правила кватернионного умножения и позволяющей стандартно вычислять

элементы длины, но также находить скалярные и векторные произведения Q -векторов. В Параграфе 3.3 детально исследована дифференциальная структура Q -пространства самого общего вида: как искривленного пространства аффинной связности («внутренний» анализ) и как специфического кватернионного пространства («внешний» анализ). Во втором случае с применением метода дифференциальных форм и уравнений структуры установлено допустимое наличие новых геометрических объектов: гамильтонова кручения, алгебраически эквивалентного метрической кватернионной связности, а также произвольно вводимой кватернионной неметричности. Подробно изучена структура полного тензора кривизны Q -пространства, в общем случае составленного из четырех слагаемых: обобщенной римановой кривизны, торсионной кривизны, кривизны «аффинной» неметричности и кривизны чисто кватернионной неметричности. В Параграфе 3.3 приведены две возможные схемы классификации Q -пространств, построенных на базе зависимости от присутствия разных геометрических объектов. Первая редукционная схема «по неметричности» включает 13 различных типов Q -пространств, в том числе, пространство общего вида, содержащего все объекты, 3 типа обобщенных пространств Вайценбека, 4 типа бесторсионных пространств, «евклидова» Q -пространства, имеющего во всех точках постоянную (но несимметричную) Q -метрику. Во второй классификации, построенной на поэтапном отказе от «аффинных» характеристик и, естественно, имеющей те же исходный и конечный типы иерархии, естественно выделяются специфические кватернионные типы пространств – чисто кватернионные пространства: с кручением, бесторсионное, и метрическое. Обсуждены направления использования теории Q -пространств в различных областях теоретической физики.

Вторая часть диссертации посвящена изучению взаимосвязи кватернионной алгебры и ассоциированной геометрии с физическими теориями. Она так же, как и первая часть, состоит из трех глав.

В **Главе 4** «риманово-плоское» Q -пространство, или «метрическое чисто кватернионное» пространство, содержащее только собственную Q -связность и представленное континуумом Q -триад с действительными параметрами, локализованными временем наблюдателя, принимаются в качестве базы для описания ньютоновской динамики в неинерциальных (вращающихся) реперах. В Параграфе 4.1 $SO(3, R)$ -инвариантность физических объектов – Q -радиуса-вектора наблюдаемой частицы $\mathbf{r} = x_n \mathbf{q}_n$ и Q -вектора действующей на нее удельной силы (на единицу массы) $\mathbf{f} = f_n \mathbf{q}_n$ позволяет просто сформулировать кватернионные уравнения динамики $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$, справедливые для систем отсчета, совершающих как угодно сложные пространственные вращения (зависящие от времени наблюдателя); обобщенные угловые скорости при этом определяются компонентами метрической связности Q -пространства. Записанные в явной координатной форме эти уравнения содержат обычное линейное ускорение частицы, а также три обобщенных «неинерциальных» ускорения: кориолисово, угловое и центростремительное. В Параграфе 4.2 развит метод решения динамических задач в неинерциальном репере специального вида – следящем Q -базисе, один из векторов которого постоянно направлен на наблюдаемую частицу. Для этого метода в общем виде определены все компоненты Q -связности и выписаны динамические уравнения. В следящем репере решены задачи для частицы в поле центральной силы, вращающегося осциллятора и маятника Фуко.

В **Главе 5** на базе чисто кватернионного метрического пространства с комплексными параметрами построена новая методика расчета эффектов

относительного движения («кватернионная теория относительности»). В Параграфе 5.1 анализируются свойства используемых в данном подходе бикватернионных (BQ) чисел вида $z = (a_k + ib_k) \mathbf{q}_k = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ с определяемой нормой $z\bar{z} = (a_n + ib_n)(a_n + ib_n) = a^2 - b^2$. С применением последовательных простых вращений смешанного типа (по отдельности с мнимыми и действительными параметрами) установлено, что рассматриваемые BQ-векторы, без потери общности представленные в простейшей форме $z = ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3$, являются инвариантами группы $SO(1,2) \in SO(3, C)$, допускающей гиперболические повороты только вокруг «действительных» направлений, а обычные повороты – вокруг «мнимого» вектора триады. В явном виде также записаны матрицы спинорной группы $SL(1,2)$, 2:1 изоморфной группе $SO(1,2)$. В Параграфе 5.2 сформулированы основные соотношения кинематики «кватернионной теории относительности». Определено выражение для инвариантного «метрического» BQ-вектора $dz = (idt e_k + dx_k) \mathbf{q}_k$, $e_k e_k = 1$, компоненты которого ассоциируются с перемещением наблюдаемой частицы и соответствующим интервалом времени наблюдателя. Общее число размерностей Q-пространства модели равно шести, причем это пространство симметрично, т.к. является суммой двух трехмерных Q-пространств $Q_6 = R_3 \oplus T_3$, где R_3 – обычное трехмерное пространство изменения координат и скорости частицы. T_3 – тоже трехмерное (но мнимое по отношению к R_3) пространство, в нем выделена мнимая временная ось, нормальная плоскости, составленной векторами скорости и ускорения частицы. Каждое из этих пространств содержит континуум пар жестко связанных триад \mathbf{q}_k и $\mathbf{p}_k \equiv i\mathbf{q}_k$, представляющих принципиально различные, но дополнительные части единого объекта – шестимерной кватернионной релятивистской системы отсчета (Q-CO) $\Sigma \equiv \{\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k\}$. Взаимозависимость разных Q-CO реализуется посредством

допустимого преобразования $\Sigma' = O\Sigma$, $O \in SO(1,2)$ («уравнения поворота»). Показано, что для матриц O с постоянными параметрами эти уравнения приводят к кинематическим соотношениям специальной теории относительности. Предложен метод наглядного геометрического представления различных кинематических ситуаций с помощью диаграмм скоростей относительного движения систем отсчета. В Параграфе 5.3 посредством разрешенной локализации параметров преобразований временем наблюдателя осуществлен переход к неинерциальным Q-CO. С применением уравнений поворота решены полные задачи кинематики (найлены все кинематические характеристики наблюдаемого объекта с позиций инерциальных и ускоренных Q-CO) для «гиперболического движения» (в том числе, с учетом запаздывания сигнала) и для движения по окружности. С помощью простого уравнения поворота получено выражение прецессии Томаса, а также – «обратной» прецессии Томаса, наблюдаемой из ускоренной Q-CO. Указан алгоритм вычисления такого рода релятивистской прецессии для произвольных плоских орбит. В Параграфе 5.4 в рамках развитой методики предложено вычисление новых релятивистских эффектов, связанных с участием неинерциальных систем отсчета. В кинематической схеме «Земля – другая планета» получено простое выражение наблюдаемого с Земли углового смещения спутника планеты относительно вычисленного положения $\Delta\varphi \equiv \frac{\omega V_E V_P}{c^2} t'$; V_E и V_P – линейные скорости Земли и планеты вокруг Солнца, ω – частота обращения спутника, t' – время земного наблюдателя. Приведена подробная таблица расчетов этого эффекта для ряда спутников Марса и Юпитера; из данных следует, что релятивистское смещение положения самых быстрых спутников Юпитера (Метис, Адрастея), в принципе, может быть экспериментально обнаружено. Для рассматриваемой модели,

содержащей множество систем отсчета, представленных ВQ-триадами, подробно обсуждена проблема измерения времени. Решена полная задача кинематики для релятивистского осциллятора – Q-CO, наблюдатель которой испытывает в своем времени линейное ускорение, изменяющееся по гармоническому закону. Большинство кинематических функций, вычисленных во времени каждого наблюдателя (во времени ускоренного наблюдателя – все такие функции) получены в результате точного интегрирования в виде сходящихся бесконечных рядов. Так, соотношение периодов колебания определяется формулой $T = T' \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n \beta^{2n}}{(2n)! 2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)$,

где T, T' – периоды в покоящейся и ускоренной Q-CO, $\beta = v/c < 1$,

$E_n \equiv \frac{2^{2n+2} (2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}}$ – числа Эйлера. Все вычисленные величины

строго удовлетворяют принципу соответствия. В [Параграфе 5.5](#) показано, что в рамках «кватернионной теории относительности» ВQ-импульс частицы есть $SO(1,2)$ -инвариант при стандартной (для СТО) зависимости массы наблюдаемой частицы от относительной скорости. С использованием это факта в процедуре согласованного перехода из одной Q-CO в другую получены релятивистские уравнения динамики, удовлетворяющие принципу соответствия с классической механикой. Касательное ускорение наблюдаемого тела при этом является производной по времени от параметра скорости (а не от собственно скорости, как ранее полагалось в расчетах других авторов). Показано, что с геометрических позиций полученные из физических соображений динамические уравнения представляют собой формулы преобразования кватернионной связности при переходе от одного переменного репера к другому. С использованием естественных предположений относительно сил взаимодействия между телами предложен вариант формулировки релятивистской задачи двух тел.

В Параграфе 5.6 приведены решения релятивистских динамических уравнений для заряженной частицы в постоянном магнитном поле, а также для частицы в поле центральной силы массивного тела.

Глава 6 посвящена выявлению кватернионной специфики в серии физических теорий и их связи с Q -пространствами различных типов, а также использованию Q -пространств для модернизации и обобщения известных теорий, посредством включения в них геометрических объектов кватернионной природы. В Параграфе 6.1 рассмотрен пример применения «евклидова» Q -пространства для вычисления гамильтониана заряженной квантово-механической частицы во внешнем магнитном поле. Показано, что применение Q -метрики указанного пространства для определения квадрата оператора обобщенного импульса частицы приводит к появлению спинового слагаемого Паули; оно вычисляется вместе с коэффициентом, представляющим собой выражение для магнетона Бора (с правильным знаком). Этот факт позволяет трактовать спиновые структуры как проявление свойств геометрического фона физических взаимодействий. Показано, что в «риманово-плоском» Q -пространстве метрическая Q -связность является причиной возникновения спинового слагаемого в гамильтониане для частицы, не имеющей заряда и при отсутствии внешних полей. В Параграфе 6.2 предлагается анализ уравнений модифицированной теории гравитации, четырехмерное пространство-время которой имеет трехмерные сечения в виде Q -пространств различных типов. При этом включение кватернионных объектов в структуру дифференцируемых многообразий определяет свойства особого рода поляризации физического пространства. Вычисления компонент всех вовлеченных геометрических объектов осуществляются с применением аппарата дифференциальных форм и уравнений структуры, учитывающих наличие кватернионных характеристик. В «квазиримановом» Q -пространстве, содержащем

риманову кривизну (и связность Римана-Кристоффеля), а также собственную Q-связность (и гамильтоново кручение) проанализированы возможности построения нестационарных анизотропных космологических моделей, статических сферически-симметричных, а также стационарных цилиндрически-симметричных решений. Показано, что наиболее интересные модели метрик возникают в последнем случае. Так, при наличии «вращательной» аксиальной поляризации, обусловленной периодической зависимостью от координатного времени Q-триады и наличием единственной компоненты метрической Q-связности σ , в цилиндрических координатах получено точное решение вакуумных уравнений поля

$$ds^2 = dt^2 + \frac{4}{\sigma} \left(\sqrt{1 + \sigma^2 r^2} - 1 \right) dt d\varphi - \frac{dr^2}{1 + \sigma^2 r^2} - \left[r^2 - \frac{4}{\sigma^2} \left(\sqrt{1 + \sigma^2 r^2} - 1 \right) \right] d\varphi^2 - dz^2,$$

которое при $\sigma \rightarrow 0$ становится статическим интервалом плоского мира. Метрики подобного вида могут формироваться распределенным источником, мировые линии элементов которого являются геодезическими в сопутствующей системе отсчета. Для них проанализированы полевые уравнения, источником гравитации в которых является идеальная жидкость. Показано, что при этом возникают аналогичные решения, если жидкость удовлетворяет «жесткому» уравнению состояния $\varepsilon = p$. Более того, в этом случае отказ от свойств кватернионной поляризации пространства приводит к точному решению уравнений ОТО

$$ds^2 = dt^2 + \frac{2}{h} \left(\sqrt{1 + 4h^2 (r - r_0)^2} - 1 \right) dt d\varphi - \frac{dr^2}{1 + 4h^2 (r - r_0)^2} - \left[r^2 - \frac{1}{h^2} \left(\sqrt{1 + 4h^2 (r - r_0)^2} - 1 \right) \right] d\varphi^2 - dz^2,$$

где $\varepsilon = p = \frac{h^2}{2\kappa} = \text{const}$, κ – гравитационная константа связи.

Уравнения четырехмерной гравитации рассмотрены также в примере представления трехмерных сечений бесторсионными Q-пространствами, содержащими только кватернионную (но не «аффинную») неметричность. Показано, что для случая изотропной поляризации (Q-неметричность антисимметрична по всем индексам) уравнения поля допускают решения в виде несингулярных космологических моделей с бесконечным радиусом кривизны и источником в виде пыли. Наиболее интересным решением оказывается статическая сферически симметричная модель с Q-сечением, «почти изотропно» (с точностью до константы) поляризованным Q-неметричностью. Здесь решение представлено метрикой, описывающей поляризованный вакуум

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - A^2 r^{2k}} - r^2 d\Omega^2, \quad a = \frac{A}{r^{1-k}}, \quad \text{где } a \text{ – функция Q-неметричности,}$$

k – параметр изотропии поляризации, A – постоянная интегрирования. При $k = 1$ (точная изотропия) это решение эквивалентно модели вселенной Эйнштейна, не содержащей, однако, источников; роль космологической постоянной играет квадрат Q-неметричности. В [Параграфе 6.3](#) рассмотрен еще один случай специального Q-сечения – «риманово-плоского», или «метрического чисто кватернионного» пространства, с отличной от нуля собственной Q-связностью $\omega_{\alpha mk}$, (греческие индексы нумеруют четырехмерные координаты голономного базиса; латинские индексы относятся к векторам Q-триады). Показано, что дифференцирование по голономному базису условия $SL(2C)$ -инвариантности Q-триады с использованием представления специальных кватернионов их собственными спинорными функциями приводит к выражению $D_\alpha U^{-1} \equiv (\partial_\alpha + A_\alpha)U^{-1} = 0$, отражающему факт ковариантного постоянства матрицы преобразования (прямого и обратного) по отношению к

производной с «калибровочным слагаемым», представленным Q-вектором собственной связности $A_{k\alpha} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} \omega_{abn}$, $A_\alpha \equiv \frac{1}{2} A_n \mathbf{q}_{\bar{n}}$. Установлено, что вычисленный на основе этой связности тензор кривизны (свернутый по векторным индексам с дискриминантным тензором) по форме точно совпадает с выражением для напряженности поля Янга-Миллса; однако все компоненты кривизны в таком Q-пространстве равны нулю, в силу метрического характера Q-связности. Ситуация кардинально меняется в «чисто кватернионном» пространстве (неметрическом), содержащем Q-связность, Q-неметричность (имеющими одинаковые свойства симметрии по индексам), а также соответствующую кривизну. При этом форму потенциала Янга-Миллса приобретает линейная комбинация кватернионных связности и неметричности, а роль соответствующей напряженности играют в данном случае отличные от нуля компоненты тензора кривизны, содержащего только функции Q-неметричности. Отсюда следует, что уравнения поля Янга-Миллса формально могут быть получены в результате вариационной процедуры, в основе которой лежит лагранжиан, представленный простейшим квадратичным инвариантом кривизны рассматриваемого Q-пространства. Отмечено, что роль Q-неметричности могут играть определенного вида коэффициенты вращения Риччи, характерные для риманова пространства-времени; тогда уравнения «квадратичной» гравитации, варианты которой многократно обсуждались в литературе, и их решения формально не отличимы от уравнений и решений для поля Янга-Миллса.

В заключении формулируются основные результаты исследования, выносимые на защиту.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Ефремов А.П. Алгебраические основы теории трехмерного Q-поля// Аналогия гравитационных и электромагнитных явлений/ М., изд. УДН, 1985.- С.52-60.
2. Ефремов А.П. Группа инвариантности кватернионного умножения и четырехмерный интервал в трехмерном комплексном пространстве// Аналогия гравитационных и электромагнитных явлений/ М., изд. УДН, 1985.- С.60-64.
3. Ефремов А.П. Q-поле, переменный кватернионный базис// Известия вузов. Физика.-1985.-12-85.- С.14-18.
4. Ефремов А.П. Собственные функции векторов Q-базиса// Проблемы гравитации и теории относительности/ М., изд. УДН, 1986.- С.37-39.
5. Ефремов А.П. Алгебраические свойства собственных функций кватернионного базиса// Проблемы квантовой и статистической физики/ М., изд. УДН, 1989.- С.97-103.
6. Yefremov A.P. Tangent Quaternionic Space// Gravitation & Cosmology.- 2001.-7, № 4.- P.273-275.
7. Yefremov A.P. Quaternionic Space// 5th Int. Conf. of Gravit. and Astrophys. of Asian and Pacific Contries: Rep.-PFUR, Moscow, 2001.- P.44-45.
8. Yefremov A.P. Vector Quaternionic Spaces: Geometry and Classification// Gravitation & Cosmology.- 2003.-9, № 4.- P.319-324.
9. Ефремов А.П. Кватернионные уравнения структуры// Гравитация и фундаментальные взаимодействия/ М., изд. УДН, 1985.- С.118-119.
10. Yefremov A.P. Quaternionic Program// Generalized Theories and Experiments/ Kluwer Acad. Publ., Netherlands.-2004.- P.395-409.

- 11.Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.-2004.- 1 (1).- С.112-124.
- 12.Ефремов А.П. Кручение пространства-времени и эффекты торсионного поля. Аналитический обзор.- М., ВЕНТ, 1991.-76 с.
- 13.Ефремов А.П. Механика Ньютона в кватернионном базисе.-М., УДН, 1990.-54 с.
- 14.Yefremov A.P. Six dimensional Rotational relativity// Acta Phys. Hung., Series – Heavy Ions.- 2000.- 11 (1-2),.- P.147-153.
- 15.Yefremov A.P. Quaternionic Multiplication Rule as a Local Q-Metric// Lett. Nuovo Cim.-1983.- 37, № 8.- P.315-316.
- 16.Ефремов А.П. Q-базис как метод описания неинерциальных систем отсчета// Проблемы гравитации и теории относительности/ М., изд. УДН, 1986.- С.35-36.
- 17.Ефремов А.П. Кватернионный подход к описанию относительного движения// Неевклидовы пространства и новые проблемы физики/ М., изд. «Белка», 1993.- С.58-62.
- 18.Ефремов А.П. Основы кватернионной теории относительности// Вестник РУДН.-1995.- 3 (1)/95.- С.117-129.
- 19.Yefremov A.P. Quaternionic Relativity. I. Inertial Motion// Gravitation & Cosmology.-1996.- 2, № 1.- P.77-83.
- 20.Yefremov A.P. Quaternionic Relativity. II. Non-Inertial Motion// Gravitation & Cosmology.- 1996.- 2, № 4.- P.335-341.
- 21.Ефремов А.П. О релятивистской прецессии общего вида и кватернионный репер Френе// 10 Рос. Грав. Конф.: Тез. докл. М., РГО, 1999.- С.75-76.

- 22.Ефремов А.П. Дуальность пространства в кватернионной теории относительности// Многомерная гравитация и космология/ М., РГА, 1994.- С. 16.
- 23.Yefremov A.P. On Twin Paradox in Quaternionic Relativity// Gravitation & Cosmology.-1997.-3, № 3.- P.200-203.
- 24.Yefremov A.P. Some Solutions of GR Equations modified for 3D Quaternionic Sections// 12th Russian Gravit. Conf.: Rep.- Kasan, RGS, 2005.- P.140-141.
- 25.Ефремов А.П. Некоторые стационарные цилиндрически симметричные решения уравнений теорий Эйнштейна-Картана// Известия вузов. Физика.- 1977.- 4-77.- С.95-99.
- 26.Ефремов А.П. Цилиндрически симметричные решения уравнений Эйнштейна для пыли со спином// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц/ М., Атомиздат, 1978.- С.66-73.
- 27.Yefremov A.P. Torsion and Quaternionic Non-Metricity// 12th Russian Gravit. Conf.: Rep.- Kasan, RGS, 2005.- P.141-143.
- 28.Ефремов А.П. Статические однородные космологические модели в теории Эйнштейна-Картана// Известия вузов. Физика.-1977.-3-77.- С.147-148.
- 29.Ефремов А.П. О гравитационном поле нейтронной звезды// Известия вузов. Физика.- 1982.-1-82.- С.53-57.
- 30.Yefremov A.P. Pulsar and Spin-Spin Interaction// Experimentelle Technik der Physik.- 1981.- 29, 3.- P.217-219.
- 31.Ефремов А.П. Теория кватернионного базиса и шестимерный аналог уравнений электродинамики// Актуальные проблемы квантовой механики и статистической физики/ 1988, М, изд. УДН.- С.124-127.

- 32.Ефремов А.П. Движение пробных частиц в поле кручения// Известия вузов. Физика.- 1980.-8-80.- С.84-87.
- 33.Ефремов А.П. О гравитационном поле магнитного момента// Известия вузов. Физика.- 1981.-5-81.- С.26-29.
- 34.Yefremov A.P. Configuration of a Neutron Star with Axially Polarized Spin// Acta Phys. Pol.- 1981.- B12.- P.185-188.
- 35.Гаврилина Г.А., Ефремов А.П., Некоторые точные вакуумные решения уравнений Эйнштейна// Известия вузов. Физика.- 1982.-9-82.-С.23-26.
- 36.Ефремов А.П. Q-поле, метод описания спина частиц// Проблемы квантовой и статистической физики, 1984, М., изд. РУДН.- С.52-54
- 37.Мицкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И. Динамика полей в общей теории относительности.- М., Энергоатомиздат, 1985.- 185 с.
- 38.Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля.- М., изд. РУДН, 2005.- 373 с.

Получено 10 октября 2005 г.

Макет А.П.Ефремова

Подписано в печать 03.10.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная

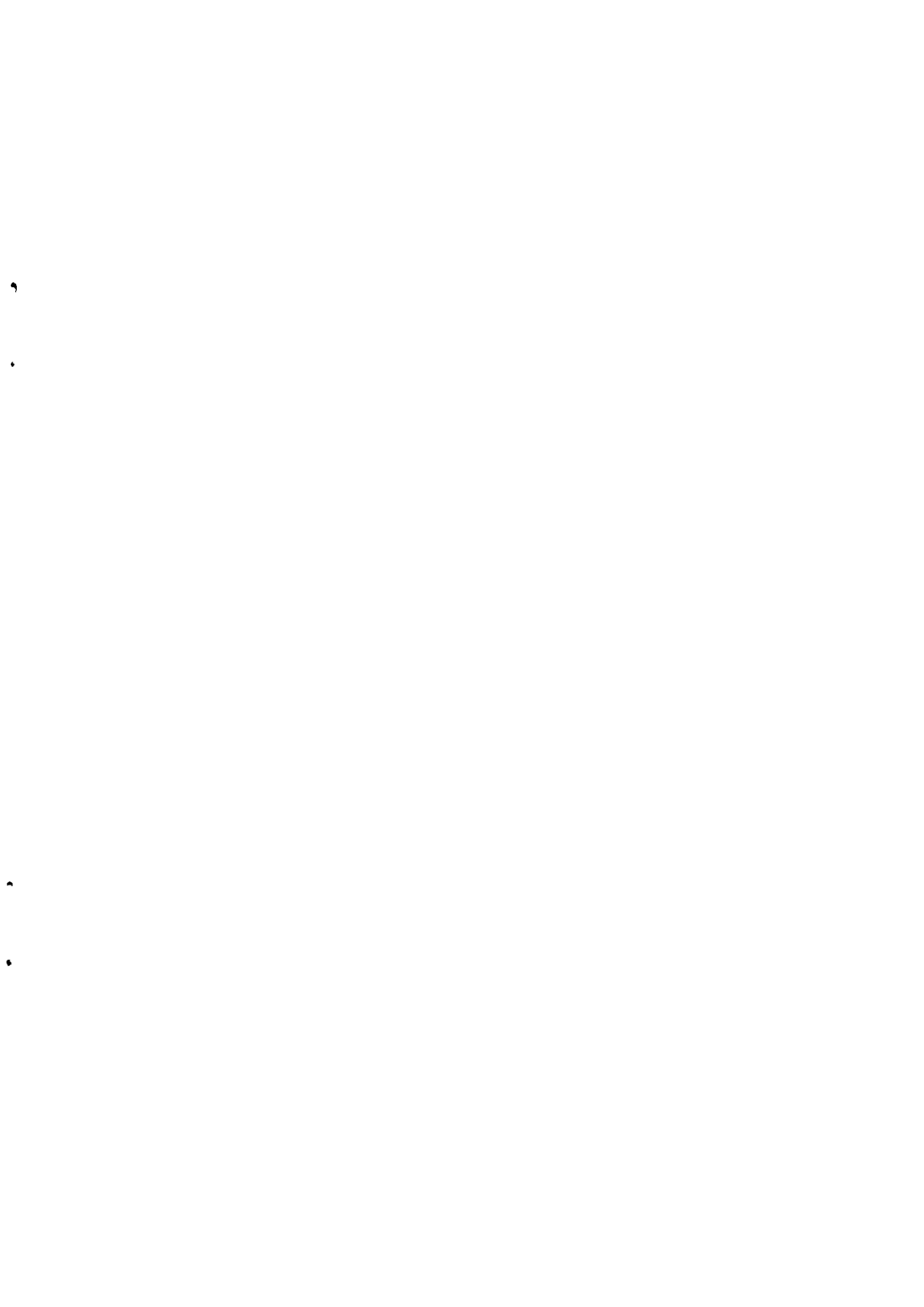
Усл. печ. л. 1, 81. Уч.-изд. л. 2,17. Тираж 100 экз. Заказ № _____ .

Издательско-полиграфический комплекс

Российского университета дружбы народов,

Адрес: 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

www.rudn.ru



№26 171

РНБ Русский фонд

2006-4

28434