

ОБ УПРАВЛЕНИИ РИСКОМ ПОРТФЕЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Буурулдай А.Э, Шорохов С.Г.

Российский университет дружбы народов, aivo4ka@mail.ru

Рассматривается задача построения правых частей стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), при которых условие дельта-нейтральности является ожидаемым свойством рассматриваемого портфеля. Поставленная задача решается методом построения систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию[3].

Ключевые слова: дельта-нейтральность портфеля, европейский колл опцион.

Введение

Перед финансовой организацией, продающей опцион на внебиржевом рынке, возникает проблема управления риском. Если опцион совпадает с одним из опционов, котируемых на бирже, финансовая организация может нейтрализовать риск, купив на бирже его аналог. Однако если опцион настроен исключительно на удовлетворение потребностей определенного клиента и не имеет стандартных прототипов, задача хеджирования намного усложняется. В работе анализируется один из альтернативных подходов к решению этой проблемы. Изложенный метод можно применять как на биржевом, так и на внебиржевом рынках. [1]

Построение стратегии управления портфелем

Пусть цена S базового актива (без доходов/дивидендов) задается следующим стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dS = r S dt + \sigma S \delta W, \quad (1)$$

где r – процентная ставка, σ – волатильность, δW – винеровский процесс [2].

Цена европейского опциона колл описывается формулами Блэка-Шоулза [3]:

$$c(S, t) = N(d_1) \cdot S - N(d_2) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)}, \quad (2)$$

где S – текущая цена базисного актива, K – цена исполнения опциона, $(T-t)$ – время до истечения опциона. При этом,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t}, \quad (3)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4)$$

Стоимость портфеля, состоящего из двух опционов с разными сроками исполнения определяется формулой:

$$P = x_1 \cdot c_A(S, t) + x_2 \cdot c_B(S, t), \quad (5)$$

где x_1 и x_2 – это, соответственно, количество опционов.

Условие дельта-нейтральности в данном случае будет иметь вид:

$$\omega \equiv \frac{\partial P}{\partial S} = x_1 \cdot \frac{\partial c_A(S, t)}{\partial S} + x_2 \cdot \frac{\partial c_B(S, t)}{\partial S} = 0, \quad (6)$$

Рассмотрим задачу построения стратегии управления портфелем в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx_1 = f_1(t, s, x_1, x_2)dt, \\ dx = f(t, s, x_1, x_2)dt, \end{cases} \quad (7)$$

где f_1 и f_2 – неизвестные функции, подлежащие определению.

Для решения данной задачи используются лемма Ито [4]

Показано, что искомая стратегия управления портфелем имеет вид:

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{\square N(d_1(A)) \cdot \beta}{N^2(d_1(A)) + N^2(d_1(B))} + N(d_1(B)) \cdot \gamma, \\ f_2 = -\frac{\square N(d_1(B)) \cdot \beta}{N^2(d_1(A)) + N^2(d_1(B))} - N(d_1(A)) \cdot \gamma, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\beta = \alpha \omega - \frac{(\square r + \int^2)}{\left(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}\right)} \cdot \left(x_1 \cdot e^{-\frac{d_1^2 \cdot \theta}{2}} + x_2 \cdot e^{-\frac{d_2^2 \cdot \theta}{2}}\right), \quad (9)$$

ψ – произвольная функция, зависящая от t, s, x_1, x_2, α – константа.

Выводы

Построенная стратегия управления портфелем деривативов применяется к управлению портфелем, состоящим из опционов колл на акции Сбербанка России с разными сроками исполнения, с заданным свойством дельта - нейтральности.

Литература

1. Джон К. Халл Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. Шестое издание. 2008.-1024 с
2. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. М.: МЦНМО, 2010. – 560 с.
3. Black, Fischer; Scholes, Myron. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy 81 (3): 637–654
4. Глеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем. Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37 № 5. С.714-716

MANAGEMENT OF RISK OF A PORTFOLIO OF DERIVATIVE SECURITIES

Buurulday A.E, Shorokhov S.G.

Peoples' Friendship University of Russia, aivo4ka@mail.ru

The problem of creation the right parts of SDE is considered, where the condition of a delta-neutrality is expected property of a portfolio. The problem is solved by the method of construction of differential equations with given integral manifold.

Key words: simulation of portfolio with options, delta hedging.