

УЧЁТ РЕБЕР, НЕ СОВПАДАЮЩИХ С ЛИНИЯМИ ГЛАВНЫХ КРИВИЗН, В ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК

И.В. КУШНАРЕНКО, аспирант

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ivan.v.kush@yandex.ru, тел.: (495) 955-98-21

Работа посвящена учёту подкреплений, не совпадающих с линиями главных кривизн, в вариационно-разностном методе (ВРМ) расчёта оболочек сложной формы, заданных в линиях главных кривизн. Рёбра описываются теорией криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша: учитывается растяжение, изгиб и кручение рёбер; оболочка описывается теорией упругих тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: подкрепления, ребристые оболочки, рёбра не в линиях кривизн, формообразование, численные методы, вариационно-разностный метод, сеточный метод, полная энергия деформации.

В предыдущих работах автора [2,3] рассматривалось введение подкреплений вдоль линий главных кривизн. Данная работа является их развитием: представлены выражения для подкреплений, не совпадающих с линиями главных кривизн.

1 Основные гипотезы и формулы.

В основе вариационно-разностной схемы деформирования тонкостенных конструкций лежит принцип минимума функционала полной энергии. Напряжённо-деформированное состояние рёбер описывается теорией криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша: учитывается растяжение, изгиб и кручение рёбер. Напряжённо-деформированное состояние оболочки описывается теорией упругих тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява. Поверхностная система координат в линиях главных кривизн.

После нанесения сетки в функционале энергии производные первого порядка и смешанные производные аппроксимируются односторонними разностными производными, производные второго порядка аппроксимируются центральными разностными производными. Во время вычисления деформаций и внутренних усилий после решения системы уравнений все типы производных аппроксимируются центральными разностными производными.

Функционал полной энергии деформаций становится функцией узловых перемещений:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \left(U_T^{ij} + U_B^{ij} + \sum_{RA=1}^{nRA} U_{RA}^{ij} + \sum_{RC=1}^{nRC} U_{RC}^{ij} - A^{ij} \right), \quad (1)$$

где i, j – номера сетки вдоль координатных осей α и β срединной поверхности тонкостенной конструкции; N_1, N_2 – число шагов (разбиений) сетки вдоль координатных осей α и β ; U^{ij} – потенциальная

энергия деформации: U_{RC}^{ij} – ребра, совпадающего с линией главной кривизны; U_{RA}^{ij} – ребра, не совпадающего с линией главной кривизны; U_T^{ij}, U_B^{ij} – тангенциальных и изгибных деформаций тонкостенной оболочки; nRA – общее количество ребер, не совпадающих с линиями главных кривизн, nRC – совпадающих с линиями главных кривизн.

Для минимизации полной энергии деформаций приравниваются к нулю частные производные по всем неизвестным узловым перемещениям u_k^{ij} не связанным граничными условиями:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_k^{ij}} = \frac{\partial U_T}{\partial u_k^{ij}} + \frac{\partial U_B}{\partial u_k^{ij}} + \sum_{RA=1}^{nRA} \frac{\partial U_{RA}}{\partial u_k^{ij}} + \sum_{RC=1}^{nRC} \frac{\partial U_{RC}}{\partial u_k^{ij}} - \frac{\partial A}{\partial u_k^{ij}} = 0, \quad (2)$$

где $k = 1, 2, 3$ – номер компоненты вектора перемещений; $i = -1, 0, 1, 2, \dots, N_1, N_1+1$; $j = -1, 0, 1, 2, \dots, N_2, N_2+1$; $i = -1, N_1+1$; $j = -1, N_2+1$ – законтурные точки.

Обозначим * – знак транспонирования вектора (матрицы).

При этом выражения производных составляющих потенциальной энергии деформации имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_B}{\partial u_k^{ij}} &= D \sum_{i=-1}^{I+1} \sum_{j=-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \bar{\rho}_{ij}^{kl}}{\partial u_k^{ij}} \bar{\rho}_{ij}^{kl}, \\ \frac{\partial U_T}{\partial u_k^{ij}} &= C \sum_{i=-1}^{I+1} \sum_{j=-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \delta_{ij}^{kl}}{\partial u_k^{ij}} [\bar{r}^T]_{kl ij}, \\ \frac{\partial U_{RA}}{\partial u_k^{ij}} &= E_{RA} \sum_{i=-1}^{I+1} \sum_{j=-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \delta_{ij}^{kl}}{\partial u_k^{ij}} [r^{kl}]_{ij}, \\ \frac{\partial U_{RC}}{\partial u_k^{ij}} &= E_{RC} \sum_{i=-1}^{I+1} \sum_{j=-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \delta_{ij}^{kl}}{\partial u_k^{ij}} [r^{kl}]_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где C, D – тангенциальная и изгибная жёсткости тонкостенной конструкции; E_{RC}, E_{RA} – модуль упругости материала ребра q ; $\bar{\square}_{ij}^l$ – вектор узловых перемещений в направлении l в окрестности узла ij ; $[r_{kl}]_{ij}$ – подматрицы жёсткости в окрестности узла ij относительно перемещений u_k^{ij}, u_l^{ij} :
 $[r_{kl}^T]_{ij}, [r_{kl}^B]_{ij}$ – тангенциальная и изгибная жёсткости оболочки;
 $[r_{kl}^{RC}]_{ij}, [r_{kl}^{RA}]_{ij}$ – рёбер, совпадающих и не совпадающих с линиями главных кривизн. Матрицы $[r_{kl}]_{ij}$ формируются на основе геометрических характеристик поверхности (коэффициентов квадратичных форм, кривизн и их разностных производных) и параметров сетки в узле ij (коэффициенты площадей, полурасстояния между узлами, наличие отверстий).

2 Преобразование компонентов деформаций

Пусть параметрами 2-х ортогональных систем координат будут (α, β) и (φ, ψ) . На рисунке 1 представлены касательные векторы по соответствующим координатным линиям.

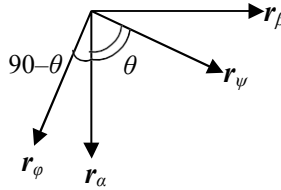


Рис. 1. Системы координат

В соответствии с [4, с. 61-62] формулы деформаций при переходе в ортогональной криволинейной системе координат имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \frac{u_{\square} r_{\square}}{A A}; \\ \square_{\square} = \frac{u_{\square} r}{A B} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \frac{u_{\square} r_{\square}}{B A}; \\ \square_{\square} = \frac{u_{\square} r}{B B} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \frac{\Omega_{\square} r_{\square}}{A A}; \\ \square_{\square} = \frac{\Omega_{\square} r}{A B} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \frac{u_{\square} r_{\square}}{\Omega B A}; \\ \square_{\square} = \frac{u_{\square} r}{\Omega B B} \end{array} \right. \quad (4)$$

Где u – вектор упругого перемещения; Ω – вектор упругого вращения;

r – радиус-вектор поверхности оболочки; $\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\beta}$ – тангенциальные деформации в ортогональной системе координат $\alpha\beta$; $\chi_{\alpha}, \chi_{\alpha\beta}, \chi_{\beta}$ – изгибные деформации в ортогональной системе координат $\alpha\beta$.

В практических расчётах в подавляющем большинстве случаев можно воспользоваться приближённым соотношением:

$$\square_{\square} = -\square_{\square} = \square. \quad (5)$$

Дифференциал произвольного вектора \mathbf{v} в системе координат $\alpha\beta$ имеет следующий вид:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\square} d\square + \mathbf{v}_{\square} d\square \quad (6)$$

Скалярно перемножив производные радиус-вектора, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = A^2 \frac{\partial \square}{\partial \square}; \quad \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = A^2 \frac{\partial \square}{\partial \square}; \\ \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = B^2 \frac{\partial \square}{\partial \square}; \quad \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = B^2 \frac{\partial \square}{\partial \square}. \end{array} \right. \quad (7)$$

С другой стороны, длины векторов \mathbf{r}_{α} , \mathbf{r}_{β} , \mathbf{r}_{φ} , \mathbf{r}_{ψ} равны соответственно A , B , Φ , Ψ , поэтому можно записать:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = A\Psi \cos \square; \quad \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = A\Phi \cos \square; \\ \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = B\Psi \cos \square; \quad \mathbf{r}_{\square} \mathbf{r}_{\square} = B\Phi \sin \square. \end{array} \right. \quad (8)$$

Из 5 и 4 находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A \partial \square}{\Psi \partial \square} = \cos \square; \quad \frac{A \partial \square}{\Phi \partial \square} = \cos \square; \\ \frac{B \partial \square}{\Psi \partial \square} = \sin \square; \quad \frac{B \partial \square}{\Phi \partial \square} = -\sin \square. \end{array} \right. \quad (9)$$

Выражения деформаций на площадке, наклонённой под углом θ к α , в соответствии с [4, с. 61-62] имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \frac{\mathbf{u}_{\square} \mathbf{r}_{\square}}{\Psi \Psi}; \\ \square_{\square} = \frac{\Omega_{\square} \mathbf{r}_{\square}}{\Psi \Phi}; \\ \square_{\square} \approx \frac{\Omega_{\square} \mathbf{r}_{\square}}{\Psi \Psi} \end{array} \right. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (10) с учётом (4)-(6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_{\square} = \square_{\square} \cos^2 \square + \square_{\square} \sin^2 \square + \square_{\square} \cos \square \sin \square; \\ \square_{\square} = \square_{\square} \cos^2 \square + \square_{\square} \sin^2 \square + \square_{\square} \sin 2\square; \\ \square_{\square} = \square_{\square} \cos \square \sin \square - \square_{\square} \cos \square \sin \square. - \square_{\square} \cos 2\square \end{array} \right. \quad (11)$$

3 Выражение угла наклона кривой.

Выражение косинуса угла между двумя кривыми на поверхности в произвольной косоугольной системе координат имеет вид [5, с.222] (Рис. 2):

$$\cos \varphi = \frac{Ed\alpha d\alpha + F(d\alpha d\beta + d\beta d\alpha) + Gd\beta d\beta}{\sqrt{Ed\alpha^2 + 2Fd\alpha d\beta + Gd\beta^2} \cdot \sqrt{E\delta\alpha^2 + 2F\delta\alpha\delta\beta + G\delta\beta^2}}. \quad (12)$$

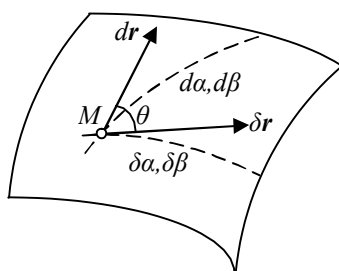


Рис. 2. Угол наклона между двумя кривыми на поверхности.

Отложим поверхностные координатные линии (α, β) и кривую φ на двумерной плоскости (Рис. 3). Пусть ζ – угол наклона дифференциала $d\varphi$ произвольной кривой к дифференциалу $d\alpha$ координаты α на этой плоскости.

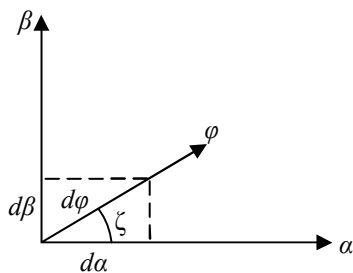


Рис. 3. Дифференциалы координат u и v .

Тогда принимая в (12) $d\beta = 0$, угол на поверхности между произвольной кривой и координатой α поверхностной системы координат (Рис. 4) ($F = 0$) может быть выражен следующей формулой:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (13)$$

где A и B – коэффициенты 1-ой квадратичной формы.

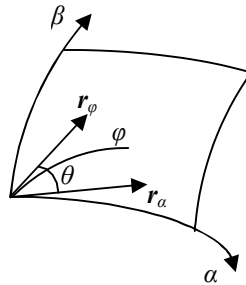


Рис. 4. Угол наклона между произвольной кривой и координатой α поверхностной системы координат

4 Коэффициент квадратичной формы вдоль линии ребра.

Для определения кривой интегрирования, необходимо выразить коэффициент 1-ой квадратичной формы вдоль линии ребра через коэффициенты 1-ой квадратичной формы оболочки.

Производные координат α, β по координате ребра φ (Рис. 3):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \sin \varphi. \quad (14)$$

Дифференциал радиус-вектора вдоль произвольной кривой, отвечающий смещению из точки M в точку M' (Рис.5):

$$dr = r_\alpha d\alpha + r_\beta d\beta. \quad (15)$$

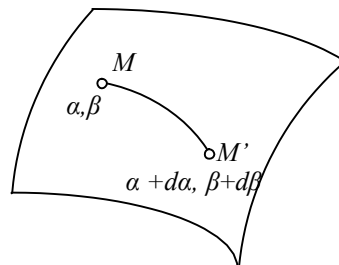


Рис.5. Дифференциалы координат u и v

Коэффициент, определяющий в бесконечно малом длину дуги, соединяющей эти 2 точки:

$$\begin{aligned}
E_{RA} = r_{\square} r_{\square} &= \left(r_{\square} \frac{\partial \square}{\partial \square} + r_{\square} \frac{\partial \square}{\partial \square} \right)^2 = r^2 \left(\frac{\partial \square}{\partial \square} \right)^2 + 2r_{\square} r_{\square} \frac{\partial \square}{\partial \square} \frac{\partial \square}{\partial \square} + r^2 \left(\frac{\partial \square}{\partial \square} \right)^2 \\
&= A^2 \left(\frac{\partial \square}{\partial \square} \right)^2 + 2F \frac{\partial \square}{\partial \square} \frac{\partial \square}{\partial \square} + B^2 \left(\frac{\partial \square}{\partial \square} \right)^2.
\end{aligned} \quad (16)$$

В случае ортогональной поверхностной системы координат ($F = 0$) с учётом соотношений (16), получается:

$$E_{RA} = A_{RA}^2 \cos^2 \square + B^2 \sin^2 \square. \quad (17)$$

5 Потенциальная энергия деформации ребра

Векторы обобщённых внутренних усилий и деформаций ребра имеют по три компоненты, связанных с растяжением, изгибом и кручением ребра:

$$\bar{Q}_{RA} = \begin{pmatrix} N_{RA} \\ M_{RA} \\ T_{RA} \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_{RA} = \begin{pmatrix} \epsilon_{RA} \\ \chi_{RA} \\ \tau_{RA} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где N_{RA}, M_{RA}, T_{RA} – растягивающая сила, изгибающий и крутящий моменты; $\epsilon_{RA}, \chi_{RA}, \tau_{RA}$ – деформации растяжения, изгиба и кручения ребра;

Вектор обобщённых внутренних усилий связан с вектором относительных деформаций законом Гука:

$$\bar{Q}_{RA} = E_{RA} [N_{RA}] \bar{\epsilon}_{RA}, \quad (19)$$

$$\text{где } [N_{RA}] = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & I_{RA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_R}{2(1+\nu_{RA})} \end{pmatrix} \text{ – матрица механических характеристик}$$

ребра; ν_{RA} – коэффициент Пуассона материала ребра; F_{RA} – площадь поперечного сечения ребра; I_{RA} – момент инерции ребра; J_R – постоянная кручения ребра; E_{RA} – модуль упругости ребра.

Потенциальная энергия деформации ребра может быть записана в виде интеграла вдоль кривой ребра S от скалярных произведений вектора внутренних усилий \bar{Q}_{RA} на вектор деформаций $\bar{\epsilon}_{RA}$ ребра:

$$U_{RA} = \frac{1}{2} \int_S \bar{Q}_{RA}^* \bar{\epsilon}_{RA} dS = \frac{E}{2} \int_S ([N_{RA}] \bar{\epsilon}_{RA})^* E_{RA} dS = \frac{E}{2} \int_S \bar{\epsilon}_{RA}^* [N_{RA}] \bar{\epsilon}_{RA} dS. \quad (20)$$

Деформации ребра, расположенного на расстоянии η от срединной поверхности, выражаются в соответствии с формулами (11):

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{RA} &= \varphi^0 \cos^2 \varphi + \varphi^0 \sin^2 \varphi + \varphi^0 \cos \varphi \sin \varphi; \\ \varphi_{RA} &= \frac{\varphi^0}{\vartheta} \cos^2 \varphi + \frac{\varphi^0}{\vartheta} \sin^2 \varphi + \frac{\varphi^0}{\vartheta} \sin 2\varphi; \\ \varphi_{RA} &= \varphi_0 \cos \varphi \sin \varphi - \varphi_0 \cos \varphi \sin \varphi - \varphi_{00} \cos 2\varphi \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Выражения деформаций на расстоянии η от срединной поверхности определяются по формулам [6]:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{\varphi} &= \frac{1}{1+k_0} (\varphi_0 + \varphi_{00}), \\ \varphi^0 &= \frac{1}{1+k_0} (\varphi + \varphi_{00}), \\ \varphi_{00} &= \frac{1}{(1+k_0)(1+k_0)} \left\{ (1-k_0 k_0^2) \varphi_{00} + 2 \left(1 + [k_0 + k_0] \frac{\varphi}{2} \right) \varphi_{00} \right\}, \\ \varphi_{\varphi} &= \varphi, \\ \varphi_{\varphi} &= \varphi, \\ \varphi_{\varphi} &= \varphi. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{RA} &= \frac{\cos^2 \varphi}{1+k_0} \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi}{1+k_0} \varphi_0 + \frac{(1-k_0 k_0^2) \sin \varphi \cos \varphi}{(1+k_0)(1+k_0)} \varphi_{00} + \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{1+k_0} \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi}{1+k_0} \varphi_0 + 2 \frac{\left(1 + [k_0 + k_0] \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi \cos \varphi}{(1+k_0)(1+k_0)} \varphi_{00}, \\ \varphi_{RA} &= \varphi_0 \cos^2 \varphi + \varphi_0 \sin^2 \varphi + \varphi_{00} \sin 2\varphi, \\ \varphi_{RA} &= \varphi_0 \cos \varphi \sin \varphi - \varphi_0 \cos \varphi \sin \varphi - \varphi_{00} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Подставляя выражения (23) в (18), получаем:

$$\varphi_{RA} = [Tr] \cdot \varphi_{SH}, \quad (24)$$

где

$$[Tr] = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \varphi}{1+k_{\varphi}\varphi} & \frac{\sin^2 \varphi}{1+k_{\varphi}\varphi} & \frac{(1-k_{\varphi}k_{\varphi}\varphi^2) \sin \varphi \cos \varphi}{(1+k_{\varphi}\varphi)(1+k_{\varphi}\varphi)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varphi \cos^2 \varphi}{1+k_{\varphi}\varphi} & \frac{\varphi \sin^2 \varphi}{1+k_{\varphi}\varphi} & \frac{\left(2 + \left[\frac{k_{\varphi}}{\varphi} + \frac{k_{\varphi}}{\varphi}\right] \sin \varphi \cos \varphi\right)}{(1+k_{\varphi}\varphi)(1+k_{\varphi}\varphi)} & \dots \\ \dots & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin 2\varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos 2\varphi & \dots \end{pmatrix} \quad (25)$$

$\vartheta_{SH}^* = \{ \varphi_{\varphi}, \varphi_{\varphi}, \varphi_{\varphi\varphi}, \varphi_{\varphi}, \varphi_{\varphi}, \varphi_{\varphi\varphi} \}$ – вектор деформаций оболочки.

В соответствии с [1] вектор относительных деформаций оболочки может быть разбит на 3 слагаемых, соответствующим направлениям перемещений:

$$\vartheta_{SH}^* = \sum_{k=1}^3 [O^k] \partial u_k = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} [H^k] \\ [K^k][1] \\ [K^k][2] \\ [K^k][3]/2 \end{pmatrix} \partial u_k, \quad (26)$$

где $\partial^* = \left(1, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)$ – вектор-оператор

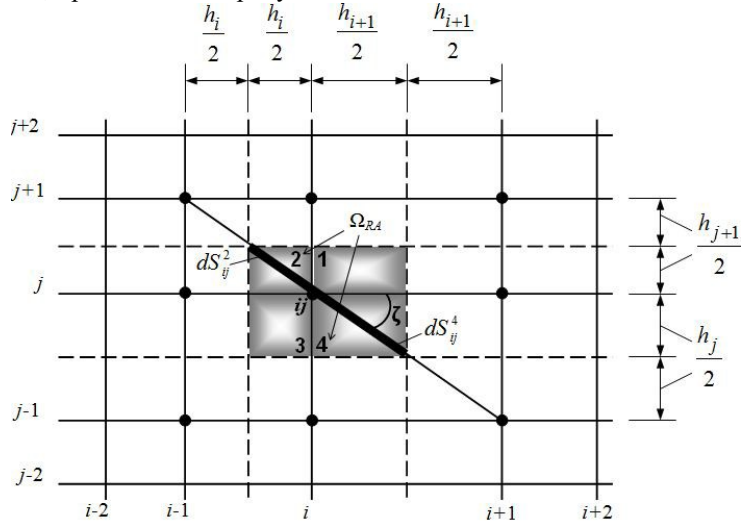
производных; индекс k – указывает направление вдоль координатных осей и нормали; $[H^k]$ и $[K^k]$ – матрицы коэффициентов [1, с. 419] (геометрических характеристик срединной поверхности оболочки) при производных функций перемещений u_k в выражениях относительных тангенциальных и изгибных деформаций; $[K^k][i]$ – i -ая строка матрицы $[K^k]$.

Подставляя формулы (21) и (22) в (16), получается формула потенциальной энергии деформаций ребра, не совпадающего с линиями главных кривизл:

$$U_{RA} = \frac{E^3}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int \left([Tr][O^k] \partial u_k \right)^* [N]_{RA} \left([Tr][O^l] \partial u_l \right) dS. \quad (27)$$

6 Подматрица жесткости ребра.

Разностный шаблон с ребром, не совпадающим с линиями главных кривизн, представлен на рисунке 6.



$$dS_{ij}^t = A_{RA}^{ij} d\tilde{S}_{ij}^t$$

$$d\tilde{S}_{ij}^1 = \frac{\sqrt{h_{i+1}^2 + h_{j+1}^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^2 = \frac{\sqrt{h_i^2 + h_{j+1}^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^3 = \frac{\sqrt{h_i^2 + h_j^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^4 = \frac{\sqrt{h_{i+1}^2 + h_j^2}}{2}.$$

Рис. 6. Разностный шаблон.

Заменяя в соответствии с [1] вектор производных перемещений в окрестности узла ij , разностными отношениями, подматрица жесткости $[r_{kl}^{RA}]_{ij}$ ребра (см. (4)), не совпадающего с линиями кривизн, имеет структуру:

$$[r_{kl}^{RA}]_{ij} = \sum_{t \in \Omega_{RA}} \int_{dS_{ij}^t} [d_t^{ij}]^* [O^t]^* [Tr]^* [N_{Rq}] [Tr] [O^t] [d_t^{ij}] dS, \quad (28)$$

где Ω_{RA} – подобласти в окрестности узла ij , в которых проходит ребро, $\Omega_{RA} = 1..4$; $[d_t^{ij}]$ – матрицы коэффициентов разностных производных при узловых перемещениях для всех типов производных вектора \bar{d} для каждого из квадрантов t . Матрицы $[d_t^{ij}]$ имеют такую же структуру, как и в книге [1].

Литература

1. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Аналитические методы расчёта оболочек неканонической формы. — Москва: РУДН, 2010. — 542с.
2. *Иванов В.Н., Кушнарченко И.В.* Подкрепления в вариационно-разностном методе расчёта оболочек сложной формы // *Вестник МГСУ*. — 2014. — № 5. — С. 25–34.
3. *Иванов В.Н., Кушнарченко И.В.* Расчёт подкреплённых пластинок с помощью вариационно-разностного метода (ВРМ), предназначенного для расчёта тонкостенных конструкций // *Строительная механика и расчёт сооружений*. — 2014. — № 3. — С. 43–49.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. — 544с.
5. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. — Москва: URSS, 2008. — 428с.
6. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. — Л.: Политехника, 1991. — 656с.

AN ACCOUNT OF RIBS, THAT DON'T COINCIDE WITH LINES OF PRINCIPAL CURVATURES, IN A SHELL ANALYSIS BY VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD

I.V. KUSHNARENKO

Peoples' friendship university of Russia, Moscow, Russia

It is considered stiffeners, that don't coincide with lines of principal curvatures, in the variational-difference method (BPM) analysis of shells of complex shape defined in the lines of the principal curvatures.

Ribs are described by the Kirchhoff-Clebsch theory of curved bars: a tension, a bending and torsion of a rib are taken into account; shells are described by the Kirchhoff-Love theory of thin elastic shells.

KEYWORDS: reinforcements, ribs, ribbed shells, ribs not in lines of curvature, form-finding, numerical methods, variational-difference method, total potential energy.

