Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 623–634

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-623-634 УДК 514.13+514.132

О ПРИМЕНЕНИИ СОВРЕМЕННОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ СФОРЦА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТЕТРАЭДРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. **В. А. КРАСНОВ**

Аннотация. В настоящей работе мы, используя современное доказательство формулы Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра, предложенное Н. В. Абросимовым и А. Д. Медных, выведем новые формулы, выражающие объемы гиперболических тетраэдров специального вида (ортосхемы и тетраэдры с группой симметрии S_4) через двугранные углы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Вычисление объемов неевклидовых многогранников является очень старой и сложной проблемой, которая и в настоящее время остается актуальной.

Первые результаты о вычислении объемов неевклидовых многогранников специального вида были получены Н. И. Лобачевским [3], Я. Бойяи [5] и Л. Шлефли [14], которые вычислили объем ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра).

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь сравнительно недавно эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [6], Дж. Мураками и У. Яно [13], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [12], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [7], а также Дж. Мураками [11].

Однако формула, выражающая объем произвольного неевклидова тетраэдра через двугранные углы, впервые была получена еще в 1906 году Г. Сфорца [15]. Оригинальное доказательство этой формулы основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама [15]. Однако позднее, в работе Н. В. Абросимова и А. Д. Медных [4], было предложено новое доказательство формулы Сфорца, которое базируется на использовании дифференциальной формулы Шлефли [14] и рассмотрении деформации, при которой меняется только один двугранный угол тетраэдра.

Известно, что в случае многогранника специального вида формула для вычисления его объема существенно упрощается. Этот факт был замечен самим Н. И. Лобачевским, который еще в 1835 году вычислил объем идеального гиперболического тетраэдра, а в 1982 году Дж. Милнор [10] представил этот результат в более элегантной форме.

В настоящей работе мы, используя современное доказательство Абросимова—Медных формулы Сфорца, выведем формулу, выражающую объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через двугранные углы, а также получим новые альтернативные формулы для объема гиперболической ортосхемы. Мы увидим, что если тетраэдр задается малым числом независимых

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100».

параметров, то данный подход зачастую приводит к довольно простым и обозримым формулам объема.

1. Некоторые предварительные результаты

Пусть $\mathbb{H}^3$ и $\mathbb{S}^3$ — гиперболическое пространство размерности $n = 3$ и трехмерная сфера с постоянными кривизнами $K = -1$ и $K = 1$ соответственно.

Одним из основных инструментов при вычислении объемов неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Данная формула была доказана Л. Шлефли [14] для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [9] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 1.1 (дифференциальная формула Шлефли). *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается по формуле*:

$$K\,dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\,d\alpha_i, \tag{1.1}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

Приведем теперь некоторые вспомогательные результаты, касающиеся произвольных неевклидовых тетраэдров.

Пусть T — гиперболический (или сферический) тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы (рис. 1).

Обозначим через

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij-й минор матрицы G.

В следующей теореме содержатся некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер неевклидова тетраэдра.

Теорема 1.2. *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический (сферический) тетраэдр (рис. 1) с матрицей Грама (1.2). Кроме того, пусть l_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины v_i и v_j. Тогда*:

(i) $\det G < 0$ $(\det G > 0)$;

(ii) $c_{ii} > 0$;

(iii) $\operatorname{ch} l_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$ $\quad\left(\cos l_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}\right)$.

В свою очередь, критерии существования гиперболического и сферического тетраэдра с наперед заданным набором двугранных углов задаются следующими теоремами (см. [2, 16]).

Теорема 1.3. *Для существования компактного гиперболического тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$ необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G вида* (1.2) *имела сигнатуру* $(3, 1)$, *а все элементы матрицы H были положительные.*

Теорема 1.4. *Для существования сферического тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$ необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G вида* (1.2) *была положительно определена.*

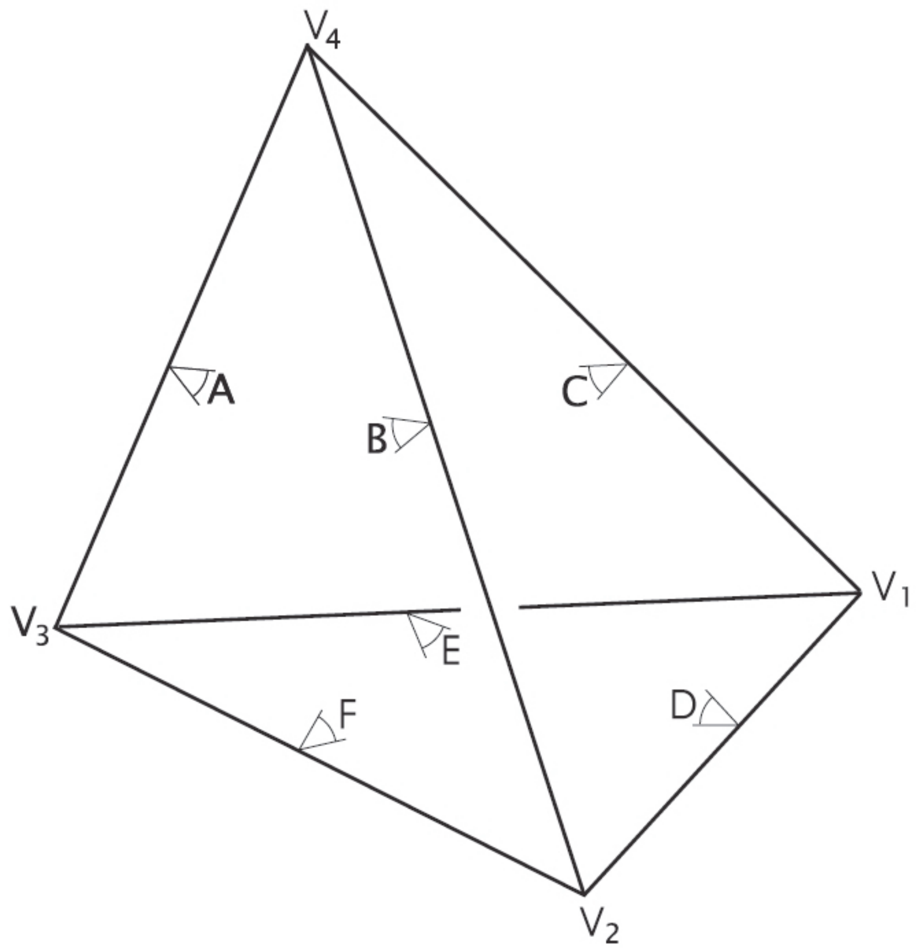

Рис. 1

Наконец, нам понадобится также следующее утверждение, впервые доказанное Якоби (см., напр., [4]).

Теорема 1.5 (Якоби). *Пусть* $M = \langle m_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$ — *матрица с определителем*

$$\Delta = \det M.$$

Далее, пусть $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$, *где*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

а M_{ij} — ij*-й минор матрицы* G. *Тогда для любых* $k, 1 \leqslant k \leqslant n-1$ *имеет место равенство*:

$$\det\langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,k} = \Delta^{k-1} \det\langle m_{ij} \rangle_{i,j=k+1,\dots,n}. \tag{1.3}$$

2. Формула Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра

Как было отмечено во введении к настоящей работе, задача о вычислении объема произвольного неевклидова тетраэдра через двугранные углы впервые была решена в 1906 году Г. Сфорца.

Оригинальное доказательство формулы Сфорца, помимо использования дифференциального тождества Шлефли (1.1), основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама [15]. В данном разделе будет приведено современное доказательство данной формулы, принадлежащее Н. В. Абросимову и А. Д. Медных [4]. Схема изложенного ниже доказательства будет использоваться нами для вывода формул объема гиперболических тетраэдров специального вида.

Теорема 2.1 (G. Sforza, 1907). *Пусть T — произвольный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$ (рис. 1) с матрицей Грама* (1.2). *Будем рассматривать*

$$\det G = \det G(A)$$

как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра $V = V(T)$ задается формулой:

$$V = \frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A} \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)}\sin A} dA, \tag{2.1}$$

где угол A_0 есть решение уравнения $\det G(A) = 0$, *а* $c_{34} = c_{34}(A)$ — *алгебраическое дополнение к элементу* 34 *матрицы* $G(A)$.

Доказательство. (Абросимов, Медных, 2014). Обозначим $\det G$ через Δ, а длину ребра двугранного угла A через l_A. К матрице G применим формулу (1.3). При $n = 4$ и $k = 2$ имеем:

$$c_{33}c_{44} - c_{34}^2 = \Delta(1 - \cos^2 A).$$

Применяя формулу (iii) теоремы 1.2, получим

$$\operatorname{ch} l_A = \frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} l_A = \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_A - 1} = \sqrt{\frac{c_{34}^2 - c_{33}c_{44}}{c_{33}c_{44}}} = \frac{\sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Так как

$$\exp(\pm l_A) = \operatorname{ch} l_A \pm \operatorname{sh} l_A,$$

то:

$$\exp(\pm l_A) = \frac{c_{34} \pm \sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Таким образом,

$$\exp(2l_A) = \frac{\exp(l_A)}{\exp(-l_A)} = \frac{c_{34} + \Delta\sin A}{c_{34} - \Delta\sin A}$$

и

$$l_A = \frac{1}{2}\ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)}\sin A}.$$

Теперь запишем для тетраэдра T формулу Шлефли (1.1):

$$-dV = \frac{1}{2} l_A dA.$$

Учтем тот факт, что $\Delta \to 0$ при $A \to A_0$. Следовательно, $V \to 0$ при $A \to A_0$. Наконец, интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$V = \int\limits_{A_0}^{A}\left(-\frac{l_A}{2}\right) dA = \frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A}\ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)}\sin A} dA.$$

□

В свою очередь, следующая теорема представляет собой сферический вариант формулы Сфорца.

Теорема 2.2. *Пусть T — произвольный сферический тетраэдр* (*рис.* 1) *с матрицей Грама* (1.2). *Будем рассматривать*

$$G = G(A)$$

как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра $V = V(T)$ задается формулой:

$$V = \frac{1}{4i}\int\limits_{A_0}^{A}\ln\frac{c_{34} - i\sqrt{\det G(A)}\sin A}{c_{34} + i\sqrt{\det G(A)}\sin A} dA, \tag{2.2}$$

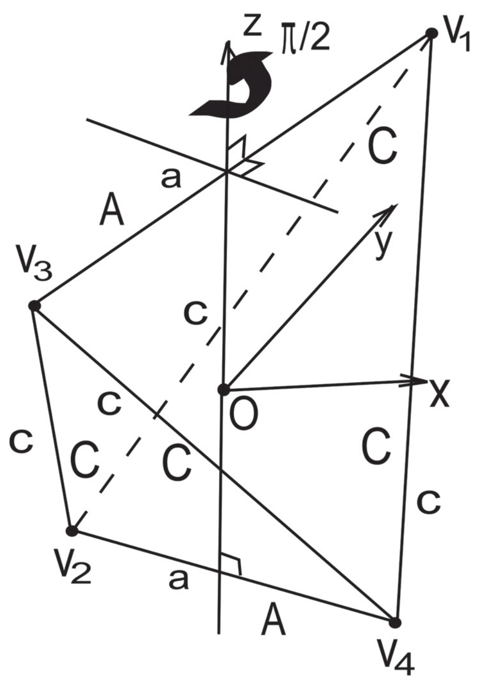

Рис. 2. Тетраэдр с группой симметрии S_4.

где угол A_0 — *решение уравнения* $\det G(A) = 0$, *а* $c_{34} = c_{34}(A)$ *есть алгебраическое дополнение к элементу* 34 *матрицы* $G(A)$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству для гиперболического случая.

3. Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4

В настоящем разделе будут приведены формулы, выражающие объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через его *двугранные углы*.

Определение 3.1. Мы скажем, что тетраэдр T имеет *группу симметрии* S_4, если он остается инвариантным относительно поворота вокруг некоторой оси на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и последующего отражения относительно перпендикулярной к ней плоскости.

Введем прямоугольную систему координат Oxyz и рассмотрим тетраэдр T с группой симметрии S_4, который переводится в себя вращением вокруг оси Oz на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и последующим отражением относительно плоскости Oxy (рис. 2).

Из определения 3.1 следует, что рассматриваемый гиперболический тетраэдр с группой симметрии S_4 однозначно с точностью до движения определяется двумя независимыми параметрами (двугранными углами) A и C. Однако для вычисления объема такого тетраэдра можно использовать длины ребер a и c, связанные с двугранными углами формулами [1]:

$$\cos A = \frac{\mathrm{ch}a + \mathrm{ch}^2 a - 2\mathrm{ch}^2 c}{1 + \mathrm{ch}a - 2\mathrm{ch}^2 c},$$

$$\cos C = \frac{\mathrm{ch}c(1 - \mathrm{ch}a)}{1 + \mathrm{ch}a - 2\mathrm{ch}^2 c}.$$

Таким образом, $T = T(A, C) = T(a, c)$ (см. рис. 2).

Формула объема, выражающая объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через *длины ребер*, выражается теоремой [1].

Теорема 3.1 (Абросимов, Вьюнг Хыу, 2017). *Объем $V = V(T)$ гиперболического тетраэдра $T = T(a,c)$ с группой симметрии S_4, заданного длинами ребер a и c, может быть вычислен по одной из следующих формул*:

$$V(T) = \int\limits_0^a \frac{a((1+\mathrm{ch}a)^2 - 4\mathrm{ch}^2 c\cdot \mathrm{ch}a) + 4c\cdot \mathrm{sh}c\cdot \mathrm{ch}c\cdot \mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}2c - \mathrm{ch}a)\sqrt{4\mathrm{ch}^2c - (1+\mathrm{ch}a)^2}}da,$$

$$V(T) = \int\limits_{\mathrm{arch}(\mathrm{ch}a+1)/2}^{c} \frac{2c(1-\mathrm{ch}a)(1+\mathrm{ch}a + 2\mathrm{ch}^2c) + 4a\cdot \mathrm{sh}c\cdot \mathrm{ch}c\cdot \mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}2c - \mathrm{ch}a)\sqrt{4\mathrm{ch}^2c - (1+\mathrm{ch}a)^2}}dc.$$

Подробное доказательство теоремы 3.1 приведено в работе [1] и основано на подходе, при котором соответствующий евклидов многогранник помещается в проективную модель Кэли—Клейна гиперболического пространства.

Вычислим теперь объем гиперболического тетраэдра $T = T(A,C)$ с группой симметрии S_4 через *двугранные углы*.

Прежде чем перейти к вычислению объема, исследуем сначала проблему существования $T = T(A,C)$ в $\mathbb{H}^3$.

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для существования компактного гиперболического тетраэдра T с группой симметрии S_4, заданного набором двугранных углов (A,B), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств*:

$$\begin{cases} 0 < C < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 - 2\cos^2 C < \cos A < 1 - 2\cos C, \\ \cos A + 2\cos A\cos^2 C + 2\cos^2 C - \cos^3 A > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.1 воспользуемся теоремой 1.3.

Рассмотрим гиперболический тетраэдр $T = T(A,C)$ с группой симметрии S_4 и его матрицу Грама $G = G(T)$:

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos C & -\cos C \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos C \\ -\cos C & -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos C & -\cos C & -\cos A & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями найдем алгебраические дополнения (элементы присоединенной матрицы) и определитель Δ матрицы $G = G(T)$. Имеем:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = (1+\cos A)(1 - \cos A - 2\cos^2 C),$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{34} = c_{43} = \cos A + 2\cos A\cos^2 C + 2\cos^2 C - \cos^3 A,$$

$$c_{13} = c_{31} = c_{14} = c_{41} = c_{24} = c_{42} = \cos C\cdot(1+\cos A)^2,$$

$$\Delta = (1+\cos A)^2(\cos A - 1 - 2\cos C)(\cos A - 1 + 2\cos C).$$

Таким образом, система (3.1) получается из неравенств $c_{ij} > 0, \Delta < 0$, которые непосредственно следуют из теоремы 1.3. □

Переходим теперь к вычислению объема гиперболического тетраэдра T с группой симметрии S_4. Объем такого тетраэдра может быть вычислен с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть $T = T(A,C)$ — компактный тетраэдр с группой симметрии S_4 в $\mathbb{H}^3$ (рис. 2). Тогда его объем $V = V(T)$ выражается формулой*:

$$V(T) = -2\int\limits_{\arccos\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}^{C} \mathrm{arch}\frac{(1+\cos A)^2\cos t}{1 - 2\cos A\cos^2 t - 2\cos^2 t - \cos^2 A}dt. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.3 воспользуемся схемой доказательства Абросимова—Медных формулы Сфорца (2.1) (см. теорему 2.1 и ее доказательство).

Рассмотрим сначала деформацию тетраэдра $T = T(A, C)$, при которой изменяется только один двугранный угол C (при этом угол A мы считаем фиксированным), т. е. $T = T(C)$. В этом случае формула Шлефли для дифференциала объема $V = V(C)$ тетраэдра T примет вид:

$$dV = -2 \cdot l \cdot dC, \tag{3.3}$$

где l — длина ребра V_2V_4 (рис. 2).

Вычислим теперь величину l с помощью формулы (iii) теоремы 1.2. Имеем:

$$l = \operatorname{arch} \frac{(1+\cos A)^2 \cos C}{1 - 2\cos A \cos^2 C - 2\cos^2 C - \cos^2 C}. \tag{3.4}$$

В свою очередь, решая уравнение $\Delta = 0$ относительно C, получаем:

$$C = \arccos\left(\frac{1-\cos A}{2}\right).$$

Таким образом, формула (3.2) получается после интегрирования выражения (3.3) (после подстановки в него формулы (3.4) в пределах от $\arccos\left(\dfrac{1-\cos A}{2}\right)$ до C. □

Очевидно, что правильный тетраэдр $T = T(A)$ (т. е. тетраэдр, у которого все двугранные углы равны) является частным случаем тетраэдра с группой симметрии S_4 (при $A = B$). Формула объема гиперболического правильного тетраэдра, ранее полученная в работе [4], задается следующей теоремой.

Теорема 3.4 (Абросимов, Вьюнг Хыу, 2017). *Объем $V = V(T)$ правильного гиперболического тетраэдра $T = T(A)$ находится по формуле*:

$$V = -3 \int\limits_{\arccos\frac{1}{3}}^{A} \operatorname{arch}\left(\frac{\cos t}{1-2\cos t}\right) dt. \tag{3.5}$$

В свою очередь, используя теорему 1.3, нетрудно доказать критерий существования гиперболического правильного тетраэдра. Справедлива

Теорема 3.5. *Для существования компактного правильного гиперболического тетраэдра $T = T(A)$ необходимо и достаточно, чтобы его двугранный угол A удовлетворял следующему двойному неравенству*:

$$\frac{1}{3} < \cos A < \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу Грама тетраэдра $T = T(A)$:

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos A & -\cos A \\ -\cos A & 1 & -\cos A & -\cos A \\ -\cos A & -\cos A & 1 & -\cos A \\ -\cos A & -\cos A & -\cos A & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями найдем элементы присоединенной матрицы для матрицы $G(T)$, а также собственные значения λ_i матрицы $G(T)$:

$$c_{ij} = \begin{cases} (\cos A + 1)^2(1 - 2\cos A), & \text{если } i = j, \\ \cos A \cdot (\cos A + 1)^2, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 - 3\cos A, \quad \lambda_{2,3,4} = 1 + \cos A. \tag{3.7}$$

Таким образом, неравенство (3.6) получается после применения утверждения теоремы 1.3 к формулам (3.7). □

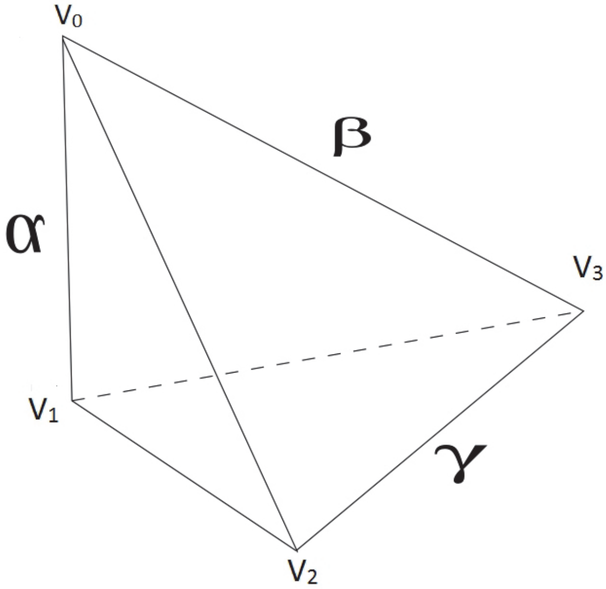

Рис. 3. Ортосхема (бипрямоугольный тетраэдр) $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Для численной проверки результата теоремы 3.3 вычислим сначала по формуле (3.2) объем правильного гиперболического тетраэдра (при $A = C$), а затем сравним полученный результат с формулой (3.5).

Пример 3.1. Рассмотрим правильный гиперболический тетраэдр с двугранным углом $A = \arccos\dfrac{8}{21}$. Вычислив его объем V в среде MathCad по формуле (3.5), получим, что $V = 0{,}012$.

В свою очередь, при вычислении объема гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 по формуле (3.2) (если $A = C = \arccos\dfrac{8}{21}$), мы получим тот же самый результат.

4. Объем гиперболической ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра)

Заключительный раздел настоящей работы посвящен формулам объема гиперболической ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра).

Определение 4.1. *Ортосхемой* (или *бипрямоугольным тетраэдром*) называется тетраэдр $V_0V_1V_2V_3$, у которого ребро V_0V_1 перпендикулярно плоскости $V_1V_2V_3$, а ребро V_2V_3 перпендикулярно плоскости $V_0V_1V_2$ (рис. 3).

Из определения 4.1 следует, что три из шести двугранных углов ортосхемы — прямые. Обозначим остальные углы через α, β и γ, как показано на рис. 3. Таким образом, $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Замечание 4.1. Ортосхема особенно интересна тем, что всякий тетраэдр можно разбить на бипрямоугольные тетраэдры, опустив из какой-либо его вершины перпендикуляры на плоскость противоположной грани и на прямые, ограничивающие эту грань (рис. 4). Таким образом, объем любого тетраэдра можно представить в виде алгебраической суммы объемов ортосхем.

Формула, выражающая объем гиперболической ортосхемы через двугранные углы, впервые была получена Н. И. Лобачевским [3].

Теорема 4.1 (Лобачевский, 1836)**.** *Пусть T — гиперболический бипрямоугольный тетраэдр $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ с двугранными углами α, β, γ (см. рис.* 3)*. Тогда его объем $V = V(T)$ задается формулой*:

$$V(T) = \frac{1}{4}[\Lambda(\alpha+\delta)-\Lambda(\alpha-\delta)+\Lambda(\gamma+\delta)-\Lambda(\gamma-\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}-\beta+\delta)+\Lambda(\frac{\pi}{2}-\beta-\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}+\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}-\delta)], \quad (4.1)$$

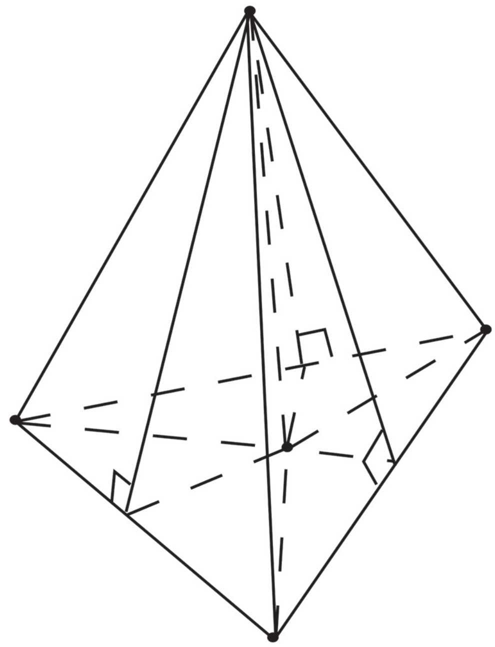

Рис. 4. Разбиение тетраэдра на ортосхемы

где

$$\Lambda(x) = -\int\limits_0^x \ln|2\,\sin t|dt,$$

а острый угол δ *определяется из уравнения*:

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Замечание 4.2. Функция $\Lambda = \Lambda(x)$, введенная Дж. Милнором [10], называется *спецфункцией Лобачевского*. Стоит отметить, что Н. И. Лобачевский в своих исследованиях по «воображаемой геометрии» [3] для вычисления объемов использовал функцию:

$$L(x) = -\int\limits_0^x \ln|\cos t|dt,$$

связанную с функцией $\Lambda = \Lambda(x)$ соотношением:

$$L(x) = \Lambda(x + \frac{\pi}{2}) + x\ln 2.$$

Формула (4.1), выражающая объем гиперболической ортосхемы в виде линейной комбинации семи значений спецфункции Лобачевского, была выведена Р. Келлерхальц и Э. Б. Винбергом в работах [2, 8].

Также в работе [2] показано, что для существования компактной гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin^2\alpha \cdot \sin^2\gamma - \cos^2\beta < 0, \\ \alpha + \beta > \dfrac{\pi}{2}, \\ \gamma + \beta > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Как и в случае гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4, мы поставим задачу получить формулы объема гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$, используя формулу Сфорца и схему ее доказательства, предложенного Н. В. Абросимовым и А. Д. Медных (см. теорему 2.1).

Рассмотрим сначала деформацию T, при которой изменяется только один двугранный угол α. В этом случае формула Шлефли для объема V тетраэдра $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ примет вид:

$$dV = -\frac{1}{2} l_\alpha dA, \tag{4.2}$$

где l_α — длина ребра двугранного угла α.

Используя формулу (iii) теоремы 1.2, выразим l_α через двугранные углы тетраэдра. Имеем:

$$l_\alpha = \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha}}. \tag{4.3}$$

Выразим теперь двугранный угол α из уравнения

$$\det G = 0,$$

где G — матрица Грама ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma \\ 0 & 0 & -\cos\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями находим:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right). \tag{4.4}$$

Подставив формулу (4.3) в (4.2) и проинтегрировав полученную формулу от (4.4) до A, мы получим, что объем V гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть найден по формуле:

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt.$$

Если рассмотреть деформации ортосхемы T, при которых изменяется только лишь двугранный угол β (или γ), то проделав аналогичные выкладки, мы получим следующие формулы для вычисления объема V:

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arccos(\sin\alpha \sin\gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \cos\gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2\gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2\alpha - \cos^2 t)}} dt,$$

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.2. *Объем $V = V(T)$ гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть вычислен по одной из следующих трех формул*:

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt, \tag{4.5}$$

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arccos(\sin\alpha \sin\gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \cos\gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2\gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2\alpha - \cos^2 t)}} dt, \tag{4.6}$$

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \sin t}{\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2 t}} dt. \tag{4.7}$$

Пример 4.1. Рассмотрим гиперболическую ортосхему $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$, двугранные углы которой равны:

$$\alpha = \gamma = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = 1{,}0001 \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Вычислив объем $V = V(T)$ данного тетраэдра по формулам (4.1), (4.5)–(4.7), мы получим одинаковый результат для $V = V(T)$:

$$V(T) = 0{,}253.$$

Замечание 4.3. Формулы (3.2), (4.5)–(4.7) можно обобщить на случай сферического пространства $\mathbb{S}^3$. В этом случае в правых частях соответствующих формул для сферических тетраэдров будет отсутствовать знак «минус», а вместо функции $y = \operatorname{arch}(x)$ под знаками интегралов будет присутствовать обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$. Это следует из формулы (iii) теоремы 1.2, формулы Шлефли (1.1) и схемы доказательства Абросимова—Медных формулы Сфорца (см. теоремы 2.1 и 2.2 раздела 2).

Автор благодарит В. П. Лексина за полезные обсуждения и ценные замечания, способствовавшие написанию настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В., Выонг Хыу Б.* Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрий S_4// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2017. — *23*, № 4. — С. 7–17.
2. *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2. — С. 17–46.
3. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия// В сб.: «Полное собр. соч. Т. 3». — М.—Л., 1949.
4. *Abrosimov N. V., Mednykh A. D.* Volumes of polytopes in spaces of constant curvature// Rigidity and Symmetry. — 2014. — *70*. — С. 1–26.
5. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
6. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — С. 347–366.
7. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Russ. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 2. — С. 346–348.
8. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra// Math. Ann. — 1989. — *285*. — С. 541–569.
9. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — *1*. — С. 337–340.
10. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — С. 307–332.
11. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv. — 2011. — 1011.2584v4.
12. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — С. 153–163.
13. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Comm. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — С. 379–400.
14. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.
15. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — *8*, № 3. — С. 3–66.
16. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — *581*. — С. 249–265.

В. А. Краснов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: krasnov_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-623-634 UDC 514.13+514.132

On Application of Contemporary Proof of the Sforza Formula to Computation of Volumes of Hyperbolic Tetrahedra of Special Kind

 V. A. Krasnov

Abstract. In this paper, we use the contemporary proof (by Abrosimov and Mednykh) of the Sforza formula for volume of an arbitrary non-Euclidean tetrahedron to derive new formulas that express volumes of hyperbolic tetrahedra of special kind (orthoschemes and tetrahedra with the symmetry group S_4) via dihedral angles.

REFERENCES

1. N. V. Abrosimov and B. Vuong Huu, "Obyem giperbolicheskogo tetraedra s gruppoy simmetriy S_4" [Volume of hyperbolic tetrahedron with the group of symmetry S_4], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2017, **23**, No. 4, 7–17 (in Russian).
2. E. B. Vinberg, "Obyemy neevklidovykh mnogogrannikov" [Volumes of non-Euclidean polyhedra], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 2, 17–46 (in Russian).
3. N. I. Lobachevskiy, "Voobrazhaemaya geometriya" [Imaginary geometry], In: *Polnoe sobr. soch. T. 3* [Full Collection of Works. Vol. 3], Moscow–Leningrad, 1949 (in Russian).
4. N. V. Abrosimov and A. D. Mednykh, "Volumes of polytopes in spaces of constant curvature," *Rigidity and Symmetry*, 2014, **70**, 1–26.
5. J. Bolyai, "Appendix. The theory of space," In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
6. Yu. Cho and H. Kim, "On the volume formula for hyperbolic tetrahedra," *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
7. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, "A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron," *Russ. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 2, 346–348.
8. R. Kellerhals, "On the volume of hyperbolic polyhedra," *Math. Ann.*, 1989, **285**, 541–569.
9. H. Kneser, "Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie," *Deutsche Math.*, 1936, **1**, 337–340.
10. J. Milnor, "Hyperbolic geometry: the first 150 years," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
11. J. Murakami, "The volume formulas for a spherical tetrahedron," *Arxiv*, 2011, 1011.2584v4.
12. J. Murakami and A. Ushijima, "A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths," *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
13. J. Murakami and M. Yano, "On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron," *Comm. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
14. L. Schläfli, "Theorie der vielfachen Kontinuität," In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.
15. G. Sforza, "Spazi metrico-proiettivi," *Ric. Esten. Different. Ser.*, 1906, **8**, No. 3, 3–66.
16. A. Ushijima, "A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra," *Non-Euclid. Geom.*, 2006, **581**, 249–265.

V. A. Krasnov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `krasnov_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com`