ОБ УСТОЙЧИВОМ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Вдовин Я. О., Пономаренко Е.Ю.
Российский университет дружбы народов, VdoYar90@mail.ru

Данная работа посвящена нахождению численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в физике плазмы.

Ключевые слова: численные решения, дискретизация, уравнение Фредгольма первого рода.

Введение

Функция распределения электронов плазмы по энергиям $f(\varepsilon)$ является одной из главных характеристик высокотемпературной плазмы. Она определяется по экспериментально измеряемому спектру тормозного излучения $N(E_0)$. Для её определения необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода вида

$$\int_a^b H(E_0,\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N(E_0). \tag{1}$$

Трудности решения такой задачи заключаются в отсутствии непрерывной зависимости решения от правой части $N(E_0)$ малым изменениям $N(E_0)$ соответствуют сколь угодно большие изменения решения. Так как экспериментально получаемый спектр тормозного излучения $N(E_0)$ содержит неконтролируемые ошибки измерений, то эти трудности присущи и задаче определения функции распределения электронов $f(\varepsilon)$ по спектру тормозного излучения $N(E_0)$. Для решения этой задачи будем применять устойчивый метод решения интегральных уравнений первого рода (метод регуляризации), в котором малым изменениям $N(E_0)$ отвечают малые изменения искомой функции $f(\varepsilon)$. Отсюда мы сможем определить функцию распределения $f(\varepsilon)$ и установить наличие второго локального максимума, т.е. что плазма является «двухтемпературной».

Решение задачи

Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M^{\alpha}\left[z,u\right] = \rho^2_{L_2}(Az,u) + \alpha\Omega\left[z\right] \tag{2}$$

где Az есть левая часть интегрального уравнения (1) со стабилизатором

$$\Omega\left[z\right] = \int_a^b \left\{ z^2(s) + \rho(z''(s))^2 \right\} ds, \tag{3}$$

где ρ - положительное число.

Для нахождения приближённого решения уравнения (1) достаточно найти функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую сглаживающий функционал $M^{\alpha}\left[z,u_\delta\right]$, и соответствующее значение α.

Будем искать функцию $z_\alpha(s)$, решая уравнение Эйлера, соответствующее функционалу $M^{\alpha}\left[z,u_{\delta}\right]$.

Искомой функцией $z_{\alpha}(s)$, минимизирующей функционал $M^{\alpha}\left[z,u_{\delta}\right]$, будет решение интегрально-дифференциального уравнения Эйлера

$$A*A_z+\alpha Lz=A*u_{\delta}, \tag{4}$$

где $L\equiv z+z^{(4)}$, отвечающих следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &z''(a)=0, z''(b)=0 \\ &z'''(a)=0, \quad z''(b)=0 \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь мы можем провести дискретизацию краевой задачи для уравнения Эйлера и решить получившуюся при этом систему линейных алгебраических уравнений.

Проведём дискретизацию на равномерной сетке.

Напишем разностный аналог уравнения (4) на равномерной сетке с шагом h. Разобьём промежуток [a,b] на n равных частей и возьмём в качестве узловых точек сетки середины полученных отрезков, т.е.

$$\begin{aligned} &s_i=a+0{,}5\cdot h+(i-1)h,\ i=0,1,\dots,n-1;\ h=\frac{b-a}{n}, \\ &z(a)=z_0,\ z(b)=z_{n-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Заменив в левой части уравнения (4) интеграл соответствующей ему интегральной суммой по формуле прямоугольников, получим:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\bar{K}(s_i,t_j)hz_j+az_i+\alpha\rho z^{(4)}(s)=g_i \tag{7}$$

Пусть B - матрица с элементами $B_{ij}=\overline{K}(s_i,t_j)h$. Тогда систему уравнений (7) относительно вектора z с компонентами $(z_1,z_2,\dots,z_n)$ можно записать в виде

$$B_{\alpha}z\equiv\left[B+\alpha C\right]z=g, \tag{8}$$

где g - вектор с компонентами $(g_1,g_2,\dots,g_n)$, а αC - симметричная матрица вида:

$$C=\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Таким образом, задача сводится к решению СЛАУ (9)

Выводы

Основным результатом работы является построение устойчивого решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова со стабилизатором второго порядка.

Литература

1. А.Н. Тихонов, В.В. Аликаев, В.Я. Арсенин, А.А. Думова. Определение функции распределения электронов плазмы по спектру тормозного излучения. Журнал экспериментальной и теоретической физики, Вып. 5(11), 1968.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1976.
3. Ланеев Е.Б. Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения. М.: РУДН. 2006
4. Тихонов А.Н. Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука 1979.
5. Иванов Б.К., Танана В.П., Васин В.В. "Теория линейных некорректных задач и её приложения», Наука, 1978, с. 102

THE STABLE NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION OF FREDHOLM IN PLASMA PHYSICS

Vdovin Y.O., Ponomarenko E.Y.

People's Friendship University Russia, VdoYar90@mail.ru

The purpose of this work is to create an approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind by means of Tikhonov A.N. regularization method in plasma physics.

Keywords: numerical solution, sampling, Fredholmintegral equation of the first king.