АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК И ПРОГУЛКАМИ ПРИБОРА

Зарипова Э.Р., Болотова Г.О.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ezarip@gmail.com, galinabolotova@gmail.com

В работе в явном виде представлены формулы для расчета среднего числа заявок в очереди, среднего времени ожидания начала обслуживания и дисперсии длины очереди для системы массового обслуживания (СМО) с прогулками прибора и групповым поступлением заявок.

Ключевые слова: групповое поступление заявок, прогулки прибора, система массового обслуживания, средняя длина очереди, среднее время ожидания в очереди, функция распределения длины группы заявок, закон Ципфа, детерминированное распределение, геометрическое распределение.

Введение

Актуальной остается проблема исследования характеристик СМО с групповым поступлении сообщений на сервер. Исследуемая СМО с неограниченной очередью может описывать поступление групп сигнальных сообщений, приходящих на сервер, и дальнейшее их обслуживание. В работе проведен численный анализ вероятностно-временных характеристик (ВВХ) системы для ординарного потока, а также для группового потока заявок с длиной группы, имеющей детерминированное распределение, геометрическое распределение, а также распределенной по закону Ципфа.

Исследование характеристик СМО

Для однолинейной СМО типа $M[X] \mid G \mid 1 \mid \inf$ с групповым поступлением заявок и прогулками прибора на периодах простоя [1,2] исследуются ВВХ. Поток групп заявок является пуассоновским с интенсивностью λ. В каждой группе приходит случайное число заявок с вероятностью l_i того, что поступит ровно *i* заявок, причем, группа не может быть пустой, т.е. $l_0 = 0$.

Длительность обслуживания является случайной величиной (СВ) с функцией распределения (ФР) $B(x)$ и средним $b^{(1)} < \infty$. Если в некоторый момент времени прибор освободился от обслуживания заявок, он уходит на прогулку, длительность которой есть СВ с ФР $F(x)$ и средним $f^{(1)} < \infty$. Введем обозначения: $\rho = l^{(1)} \lambda \cdot b^{(1)}$, где $l^{(1)}$ – среднее число заявок в группе.

При помощи метода производящих функций получены утверждения 1 и 2.

Утверждение 1.

Для СМО $M[X] \mid G \mid 1 \mid \inf$ средняя длина очереди, N, и среднее время ожидания заявки в очереди, w, определяются формулами (1) и (2) соответственно.

$$N = \frac{f\lambda l^{(2)(1)}}{2f^{(1)}} + \frac{\lambda^2 \left(l^{(1)}\right)^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\left(l^{(2)} - l^{(1)}\right)\rho}{2l^{(1)}(1-\rho)}, \tag{1}$$

$$w = \frac{N}{\lambda l^{(1)}} = \frac{f^{(2)}}{2f^{(1)}} + \frac{\lambda l^{(1)} b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\left(\frac{l^{(2)}}{l^{(1)}} - 1\right) b^{(1)}}{2(1-\rho)}. \tag{2}$$

Утверждение 2.

Дисперсия длины очереди в СМО $M[X]|G|1|\inf$ определяется формулой (3).

$$D_N = \frac{f^{(3)}\lambda^2\left(l^{(1)}\right)^2}{3f^{(1)}} + \frac{b^{(3)}\left(l^{(1)}\right)^3\lambda^3}{3(1-\rho)} - \frac{\left(f^{(2)}\right)^2\lambda^2\left(l^{(1)}\right)^2}{4\left(f^{(1)}\right)^2} +$$

$$+\frac{\lambda^4\left(l^{(1)}\right)^4\left(b^{(2)}\right)^2}{4(1-\rho)^2} - \frac{\left(l^{(2)}-l^{(1)}\right)^2\rho^2}{4\left(l^{(1)}\right)^2(1-\rho)^2} - \tag{3}$$

$$-\frac{f^{(2)}\left(l^{(2)}-l^{(1)}\right)\left(2\lambda\rho-\lambda\rho^2-2l^{(1)}+\lambda\right)}{2f^{(1)}(1-\rho)^2} - \frac{b^{(2)}\lambda^2 l^{(1)}\left(l^{(2)}-l^{(1)}\right)(\rho-2)}{2(1-\rho)^2} +$$

$$+\frac{\left(l^{(3)}-3l^{(2)}+2l^{(1)}\right)\left(-\left(l^{(1)}\right)^2 b^{(1)}-\rho^2+2\rho\right)}{3(1-\rho)^2 l^{(1)}} + \frac{\left(l^{(2)}-l^{(1)}\right)^2\rho^2}{2\left(l^{(1)}\right)^2(1-\rho)^2}.$$

Утверждение 1 подтверждает результаты исследований в источниках [1,2]. Утверждение 2 получено авторами лично и является развитием исследований источников [1,2].

Результаты численного эксперимента

Для численного эксперимента были взяты данные из источников [3,4]. Проведено сравнение ординарного поступления заявок и группового поступления заявок, где длина группы заявок распределена согласно детерминированному распределению, геометрическому распределению, а также закону Ципфа. Времена обслуживания сообщений и прогулки прибора распределены согласно экспоненциальному закону.

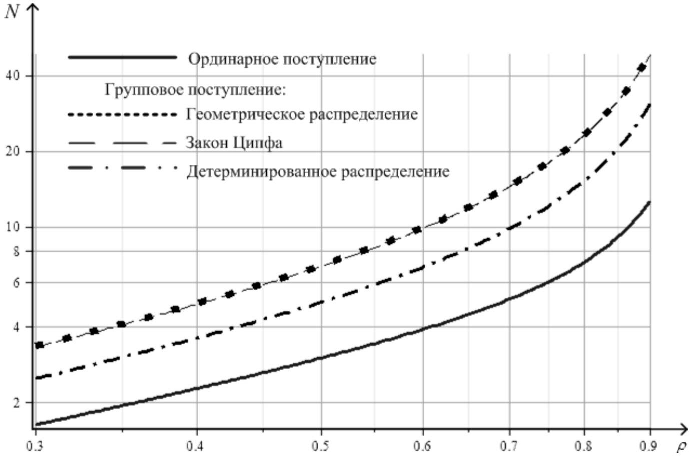

Рис. 1. График зависимости средней длины очереди от интенсивности предложенной нагрузки для ординарного, а также группового поступления заявок с распределением длины пачки согласно детерминированному распределению, геометрическому распределению, а также закону Ципфа

На рис. 1 представлен график зависимости средней длины очереди от интенсивности предложенной нагрузки.

Среднее время обслуживания заявки прибором составляет 15 мс ($b^{(1)} = 15$ мс). Среднее число заявок в группе для группового поступления составляет 5 ($l^{(1)} = 5$), а для ординарного поступления – 1 ($l^{(1)} = 1$). Среднее время прогулки выбрано равным среднему времени обслуживания группы сообщений, т.е. $f^{(1)} = 75$ мс.

Выводы и задачи дальнейших исследований

Работа содержит конечные результаты в виде явных формул для средней длины очереди, среднего времени ожидания начала обслуживания и дисперсии длины очереди для модели $M[X] \mid G \mid 1 \mid \inf$ с прогулками прибора. После проведения численного эксперимента замечено, что при групповом поступлении заявок средняя длина очереди увеличивается в несколько раз по сравнению с ординарным поступлением заявок в режиме, близком к режиму перегрузки, время ожидания обслуживания заявок в очереди почти не отличается для одних средних значений и разных распределений длины группы заявок. Дисперсия длины очереди для группового потока заявок отличается на несколько порядков относительно данных, полученных для ординарного поступления. Для закона Ципфа и геометрического распределения длины группы заявок исследуемые характеристики совпадают в точности до десятых долей. В дальнейшем авторы планируют исследовать различные длины групп сообщений, которые имеют прикладное значение.

Литература

1. *Choudhury G.* An M/G/1 Retrial Queue with an Additional Phase of Second Service and General Retrial Times // International Journal of Information and Management Sciences 20. – 2009. – Pp. 1-14.
2. *Самуйлов К.Е., Сопин Э.С.* К анализу системы M[x]|G|1|r с прогулками прибора // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. №1. – С.91-97.
3. *Самуйлов К.Е., Сопин Э.С., Чукарин А.В.* Оценка характеристик сигнального трафика в сети связи на базе подсистемы IMS. // T-COMM 2010, № 7, стр. 8-13.
4. *Abhayawardhana V.S., Babbage R.* A Traffic Model for the IP Multimedia Subsystem (IMS). // Proceedings of 65th Vehicular Technology Conference. - 2007. – Pp. 783-787.

AN ANALYSIS OF QUEUING MODEL WITH AGGREGATED ARRIVALS USING A HIKING DEVICE

Zaripova E.R., Bolotova G.O.
Peoples' Friendship University of Russia
ezarip@gmail.com, galinabolotova@gmail.com

In this paper we treat a single-line queuing system with aggregated arrivals, hiking device and unlimited queue. As an example of a numerical analysis of probabilistic characteristics of the system there are three explicit formulas for computation the average length of the queue, the average waiting time and the variance of the random variate, which describe the length of the queue.

Key words: aggregated arrivals, hiking device, queueing system, queue length, the average waiting time, Zipf's law, deterministic distribution, geometric distribution.