

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ И НЕПРЕРЫВНО-ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

АКИЛИ МИНКОВАМЕ ДЖОА МЕРСЬЯ, студент, (Габон)
Российский университет дружбы народов

В статье исследуется применение топографических и непрерывно-топографических поверхностей в маркшейдерском деле.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аналитические поверхности, поверхности вращения, топографические поверхности.

Естественные топографические поверхности невозможно описать ни одним из известных математике аналитических методов. Однако необходимость хоть как то их охарактеризовать возникает часто. Например, для вычисления соответствующих объемов породы, площадей поверхности или аппроксимации реального рельефа известными поверхностями, например, развертывающимися. Кроме того возводят множество искусственных земляных сооружений, которые также необходимо математически описать и запроектировать.

Рассмотрим, как из этого положения выходят в настоящее время.

Поверхности в геометрии рассматриваются либо как двумерные множества точек, либо как одномерные множества линий (рис.1).

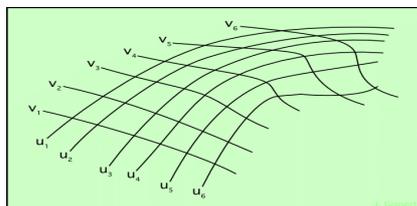


Рис.1

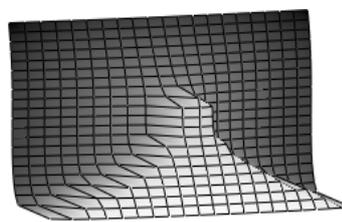


Рис.2

Этот подход предполагает формирование поверхности в результате перемещения одной кривой U (образующей) другой кривой V (направляющей) с изменениями формы и размеров одной из кривых. В общем случае понятия направляющей и образующей чисто условные. Перемещение кривой V по кривой U сформирует ту же самую поверхность. Наложение условий на форму кривых и условия перемещения позволяет формировать практически любые поверхности.

Топографическими поверхностями называются поверхности, заданные дискретным множеством их горизонталей. Такое задание топографической поверхности применяется главным образом в горном и строительном деле, в топографии [1].

Непрерывно-топографическая поверхность – это топографическая поверхность, задаваемая непрерывным множеством *линий уровня* (рис.2). Непрерывно - топографические поверхности применяются в основном в самолето- и кораблестроении. В этих случаях поверхность конструируется тремя семействами линий: 1) сечения горизонтальными плоскостями, 2) сечения фронтальными поверхностями и 3) сечения профильными плоскостями. Существуют понятия: *поверхности одной серии* – непрерывно-топографические поверхности, образованные распределением одного и того же семейства линий уровня и *поверхности разных серий* – непрерывно - топографические поверхности, образованные распределением разных семейств линий уровня [2].

Поверхности вращения можно рассматривать как непрерывно-топографические поверхности, исходным семейством линий которых является множество концентрических окружностей. *Соосные поверхности вращения* являются поверхностями одной серии, так как если соосные поверхности вращения пересекаются, то они пересекаются по параллелям. К непрерывно-топографическим поверхностям можно относить алгебраические поверхности, заданные в явной форме $z = z(x,y)$, поверхности параллельного переноса, циклические поверхности с плоскостью параллелизма и поверхности Каталана.

Известные геометрические свойства поверхности одинакового ската позволяют использовать ее для аппроксимации топографической поверхности. А.Г. Варварица предлагает для вычисления среднего угла ската местности на данном участке применять формулу $\alpha = Lh/(0,175s)$, где L – длина всех имеющихся на данном участке горизонталей, h – высота сечения рельефа, м; s – площадь участка, га.

В автодорожном строительстве линейчатые поверхности находят применение в качестве геометрических моделей откосов насыпи при подъеме и закруглении дороги. Эти поверхности могут проектироваться как поверхности одинакового ската. Приведем два конкретных примера, имеющих место в практике железнодорожного строительства: 1) направляющей кривой поверхности одинакового ската является цилиндрическая винтовая линия; 2) направляющая кривая есть пространственная кривая с постоянным уклоном по отношению к горизонтальной плоскости, в плане представляющая собой лемнискату. За направляющую кривую принималась бровка дорожного полотна.

Одним из эффективных средств борьбы с водной эрозией почв является сооружение противоэрозионных валов на склонах. Известные геометрические свойства поверхности одинакового ската позволяют использовать линейчатые поверхности для аппроксимации этих топографических поверхностей [3,4].

В горном деле в последнее большое значение имеет блочное геолого-технологическое моделирование.

Концепция блочной модели заключается в том, что скальный массив можно представить в виде 3-мерной сетки мелких параллелепипедов (блоков) с размерами от нескольких метров до нескольких десятков метров. Каждый блок при этом характеризует пространственное распределение инженерно-геологических элементов массива - однородных или квазиоднородных по своим физическим свойствам. На базе экспериментальных результатов геолого-технологического картирования, на базе исследования малообъемных технологических проб, которое проводится на стадии детальной разведки месторождения, с помощью специализированных программных комплексов и использования методов построения аналитических поверхностей можно смоделировать сложные геометрические формы скальных образований в виде суммы объектов простой геометрии. Такая модель позволяет оптимизировать процесс добычи (рис.3).

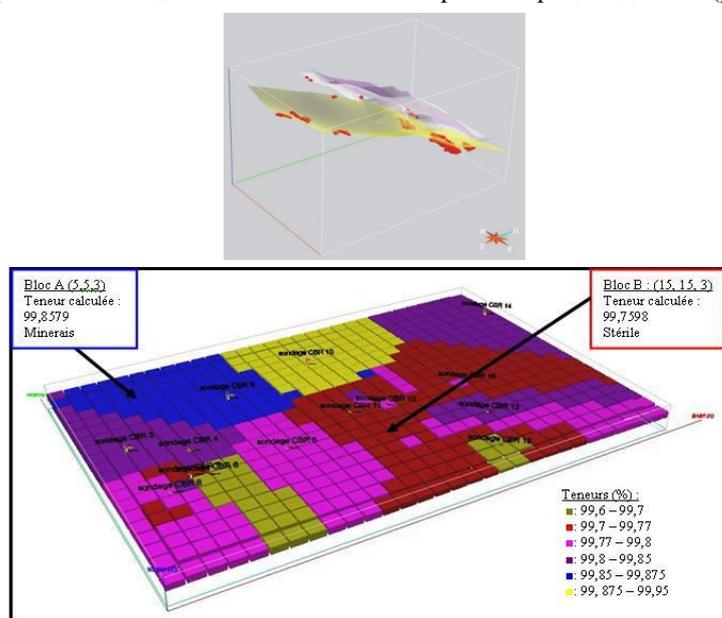


Рис.3.

Имеются компьютерные программы «DEVELOPABLE-MESH» и «UNFOLD program», с помощью которых по отдельным разрозненным числовым отметкам строятся разворачивающиеся поверхности, аппроксимирующие геологические структуры с заданной степенью точности. Эти компьютерные методика были применены в реальных условиях (Red Mountain area in the Ventura basin). Поиск реальных топографических поверхностей заданных аналитически показал, что на данный момент изучены следующие поверхности: топографическая поверхность с заданными

эллиптическими сечениями, непрерывно-топографическая поверхность Кассини, непрерывно-топографическая поверхность с распределяющим эллипсом и "Peninsula Surface". Остальные известные поверхности точнее отнести к аэродинамическим поверхностям [1].

НЕПРЕРЫВНО-ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КАССИНИ

Непрерывно-топографическая поверхность Кассини содержит в качестве линий уровня овалы Кассини

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$, где a – параметр изменения формы овалов; c – параметр изменения оси непрерывно - топографической поверхности.

Овалы Кассини представляют собой геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до точек $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ равно a^2 .

При $c \sqrt{2} < a$ овал Кассини представляет собой овальную линию, при $c < a < c\sqrt{2}$ – кривую с «талией». При $c > a$ будут получаться пара замкнутых овалов с центрами в точках $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. Если при постоянном значении a менять параметр c , то будет получаться однопараметрическое семейство овалов Кассини. Распределяя это семейство в пространстве по произвольной направляющей линии, можно получать поверхности различной формы. В англоязычной литературе поверхностями Кассини называют непрерывно- топографические поверхности, заданные неявным уравнением $(x^2 - a^2)^2 + 2y^2(x^2 + a^2) + y^4 = z^4$. Эта поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей. Две полости этой поверхности касаются друг друга в точках $x = \pm a; y = z = 0$.

Формы задания непрерывно-топографической поверхности Кассини

1) Неявная форма задания параболоида вращения, геометрическая модель: $(x^2 + y^2)^2 - 2f_1^2(z)(x^2 - y^2) = a^4 - f_1^4(z)$,

где $c = f_1(z)$ – функция, описывающая форму оси поверхности.

2) Параметрическая форма задания (рис. 4):

$$x = x(u, z) = r \cos u, y = y(u, z) = r \sin u, z = z, \text{ где}$$

$$r = r(u, z) = \sqrt{c^2 \cos 2u \pm \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2u}},$$

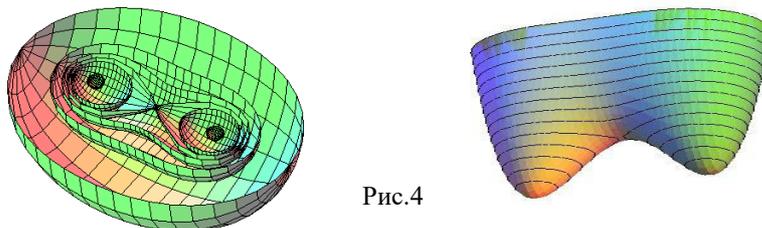


Рис.4

ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

Параболоид вращения образовывается вращением параболы $x^2=2pz$ вокруг оси z . Параболическую поверхность можно также получить движением подвижной параболы $y^2=2pz$ (рис.5).

При этом необходимо чтобы вершина подвижной параболы скользила по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы оставались параллельными. Обе параболы должны быть обращены вогнутостью одну в одну сторону.

Параболоид вращения является поверхностью, полученная вращением параболы вокруг своей оси [1].

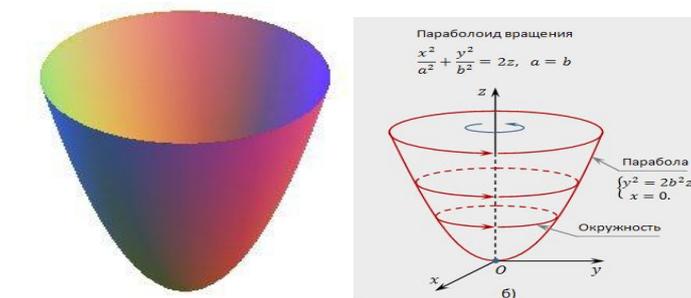


Рис.5

Литература

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей // - М. : Книжный дом "ЛИБЕРКОМ", 2010,-560 с.
2. Кириллов С.В. О конструировании непрерывно-топографических поверхностей со сложными сечениями// Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. – М.: МАИ, 1972. – Том IX. – Вып. 243. – С. 118-124 (библ.: 3 назв.)
3. Математическая энциклопедия (в 5-и томах), Москва, «Советская Энциклопедия», 1982, т.2Д-Коо, 759 стр.
4. Маркушевич А. И. Замечательные кривые. Популярные лекции по математике, выпуск 4, Гостехиздат 1952 г., 32 стр.

MATHEMATICAL MODELING OF TOPOGRAPHIC AND CONTINUOUSLY-TOPOGRAPHIC SURFACES

JOAH AKILI, Gabon

The paper investigates application of topographic and continuously-topographic surfaces in mine surveying practice.

KEYWORDS: analytic surfaces, surfaces of revolution, s topography surfaces, surface modeling .

