

Синтез динамических систем, фазовые портреты которых имеют элементарные ячейки данных топологических структур

С. В. Волков, М. А. Давыдова

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия*

Представлен метод построения дифференциальных динамических систем на плоскости, фазовые портреты которых имеют ячейки с данной топологической структурой разбиения на траектории. Решения такого типа обратных задач теории дифференциальных уравнений могут быть использованы для нахождения управлений поведением динамических систем различной физической природы.

Ключевые слова: динамические системы, системы дифференциальных уравнений, фазовые портреты, топологические структуры разбиения на траектории, особые траектории.

1. Динамические системы на плоскости и элементарные ячейки их фазовых портретов

Рассмотрим динамические системы вида

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены в некоторой области G фазовой плоскости (x, y) и имеют в этой области непрерывные частные производные. Предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не имеют общих множителей, отличных от постоянных. Будем полагать, что в области G каждая из рассматриваемых динамических систем имеет конечное число особых траекторий. Такими траекториями являются состояния равновесия (особые точки), их сепаратрисы и предельные циклы [1]. Особыми траекториями область G разбивается на ячейки, которые не содержат внутри себя особых траекторий и которые будем называть *элементарными ячейками*. Известно [1], что для динамических систем класса C^1 : 1) в ограниченной области фазовой плоскости число элементарных ячеек конечно; 2) каждая их элементарных ячеек не может быть более чем двусвязной и 3) заполнена неособыми фазовыми траекториями, взаимное расположение которых подобно¹ расположению относительно друг друга либо элементов семейства параллельных прямых (в случае односвязных ячеек), либо элементов семейства концентрических окружностей (в случае двусвязных ячеек). В данной работе главной характеристикой элементарной ячейки будем полагать топологическую структуру её разбиения на траектории. Элементарные ячейки, которые имеют одинаковые топологические структуры, могут отличаться друг от друга как особыми траекториями, образующими их границы, так и их числом. Поэтому для удобства изложения будем без ограничения общности дальнейших рассуждений полагать, что односвязные ограниченные элементарные ячейки ограничены тремя попарно пересекающимися прямыми, а неограниченные ячейки — двумя пересекающимися прямыми, к которым в случае двусвязных ячеек добавляется особая точка или замкнутая кривая (не имеющая точек самопересечения), лежащие внутри этих ячеек. Это предположение не ограничивает также и возможности применения изложенного в данной работе метода решения обратных задач теории дифференциальных уравнений.

Статья поступила в редакцию 14 октября 2011 г.

¹Математически строго похожесть взаимного расположения траекторий в ячейках называется эквивалентностью топологических структур разбиения этих ячеек на траектории [1].

2. Основные типы элементарных ячеек

В данной статье ограничимся рассмотрением элементарных ячеек указанных ниже типов, для обозначения которых используются заглавные буквы латинского алфавита, заключённые в круглые скобки.

Ограниченные элементарные ячейки (рис. 1):

(A) односвязная ячейка, две соседние вершины которой являются вершинами параболических секторов, а остальные — вершинами гиперболических секторов;

(B) односвязная ячейка, одна из вершин которой является вершиной эллиптического сектора, а остальные — вершинами параболических секторов;

(C) двусвязная ячейка, все вершины которой являются вершинами параболических секторов, и внутри которой содержится изолированная особая точка типа фокус;

(D) двусвязная ячейка, все вершины которой являются вершинами параболических секторов и внутри которой содержится изолированная особая точка типа центр;

(E) двусвязная ячейка, граница которой состоит из предельных циклов (континуумов) [1] и которая не содержит внутри себя иных особых траекторий.

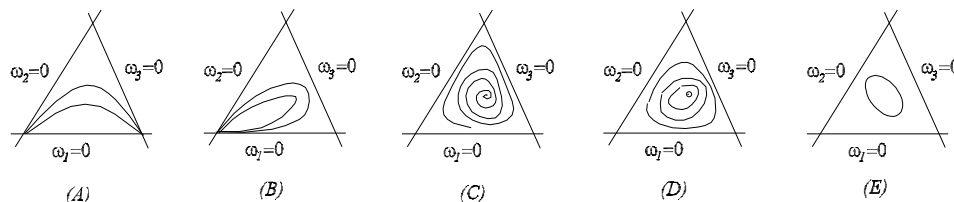


Рис. 1. Ограниченные элементарные ячейки

Неограниченные элементарные ячейки (рис. 2):

(F) ячейка, которая не содержит внутри себя особых точек и все вершины которой являются вершинами гиперболических секторов;

(G) ячейка, которая не содержит внутри себя особых точек, одна из вершин которой является вершиной параболического сектора, а остальные — вершинами гиперболических секторов;

(H) ячейка, которая не содержит внутри себя особых точек, одна из вершин которой является вершиной эллиптического сектора, а остальные — вершинами гиперболических секторов;

(I) ячейка, которая содержит внутри себя только одну особую точку типа фокус и все вершины которой являются вершинами гиперболических секторов;

(J) ячейка, которая содержит внутри себя только одну особую точку типа центр и все вершины которой являются вершинами гиперболических секторов.

(K) ячейка, граница которой состоит из предельных циклов (континуумов) и которая не содержит внутри себя иных особых траекторий.

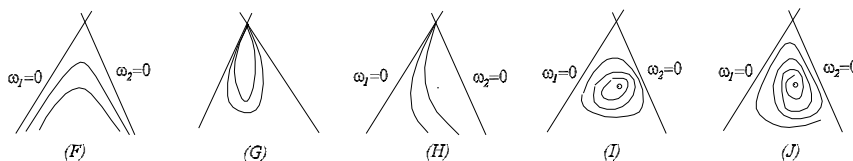


Рис. 2. Неограниченные элементарные ячейки

3. Общая постановка задачи и описание метода её решения

Основная задача. Найти правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ динамической системы (1), фазовый портрет которой содержит элементарную ячейку D указанного типа и ограниченную данными особыми траекториями.

Для решения этой задачи предлагается использовать семейства гладких кривых, которые соответствуют:

- а) совокупности особых траекторий, образующих границу данной элементарной ячейки,
- б) данной топологической структуре её разбиения на траектории.

В частности, для каждой из элементарных ячеек в качестве кривых сравнения возьмём элементы однопараметрического семейства кривых, которые:

- а) являются непрерывными и гладкими кривыми внутри этих ячеек;
- б) не имеют друг с другом общих точек и точек самопересечения;
- в) полностью заполняют эту ячейку;
- г) содержат кривые, ограничивающие данную элементарную ячейку.

Векторные поля касательных и нормальных направлений к этим кривым используются как векторные поля направлений сравнения. Установление аналитической зависимости между знаками проекций вектора фазовой скорости $\vec{v}(P, Q)$ на направления сравнения в точках данной элементарной ячейки позволяет составить два равенства, линейные относительно искомым функций P и Q . Из этих равенств и находятся искомые правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ динамической системы (1). Такой подход к решению поставленной задачи является результатом развития методов решения обратных задач теории дифференциальных уравнений. Эти методы изложены в работах [2–4].

3.1. Построение кривых сравнения

Пусть элементарная ячейка ограничена кривыми

$$\omega_i(x, y) = 0, \quad (2)$$

где $i \in I = \{1, \dots, n\}$.

Для элементарных ячеек типов (B) , (G) , (I) и (J) к этим уравнениям добавляется ещё одно уравнение. Таким уравнением может быть, например, уравнение

$$\omega_0(x, y) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0, \quad (3)$$

где x_0, y_0 являются координатами вершины эллиптического сектора ячейки типа (B) и (G) или координатами особой точки типа фокус или центр, расположенной внутри элементарной ячейки типа (I) и (J) . В этих случаях через I_0 обозначим множество, состоящее из одного элемента $I_0 = \{0\}$. Для элементарных ячеек остальных типов это множество $I_0 = \emptyset$.

В зависимости от типа элементарной ячейки её границу можно представить как объединение двух частей, каждая из которых является либо её непрерывным участком, состоящим из одной или нескольких особых траекторий, либо изолированной особой точкой. Этим частям соответствуют множества индексов I_1 и I_2 : $I \cup I_0 = I_1 \cup I_2$ и $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Используя эти обозначения, семейство кривых сравнения для элементарной ячейки любого типа можно задать уравнением

$$\lambda \Omega_1(x, y) + (1 - \lambda) \Omega_2(x, y) = 0, \quad (4)$$

где функции $\Omega_i(x, y) = \prod_{j \in I_i} \omega_{s_{ij}}$ ($i = 1, 2$), λ — параметр. Уравнение (4) можно разрешить относительно параметра λ и привести к виду

$$\frac{\Omega_1(x, y)}{\Omega_2(x, y)} = C, \quad (5)$$

где $C = (\lambda - 1)/\lambda$. Из уравнения (5) следует, что кривые сравнения являются линиями уровней функции

$$z = \frac{\Omega_1(x, y)}{\Omega_2(x, y)}. \quad (6)$$

Используя это замечание, составим функции $\Omega_1(x, y)$ и $\Omega_2(x, y)$, соответствующие элементарным ячейкам, представленным на рис. 1, 2:

$$\begin{aligned} (A) : & \quad \Omega_1 = \omega_2\omega_3, & \Omega_2 = \omega_1; \\ (B) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2\omega_3, & \Omega_2 = \omega_0^k, \quad \text{где } k > 1; \\ (C), (D) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2\omega_3, & \Omega_2 = \omega_0, \quad \text{где } k \geq 1; \\ (E) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2\omega_3, & \Omega_2 = \omega_4; \\ (F) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2, & \Omega_2 \equiv 1; \\ (G) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2, & \Omega_2 = \omega_0, \quad \text{где } k > 1; \\ (H) : & \quad \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_2 = \omega_2; \\ (I), (J) : & \quad \Omega_1 = \omega_1\omega_2, & \Omega_2 = \omega_0, \quad \text{где } k \geq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_4 = 0$ — уравнение предельного цикла внутри элементарной ячейки типа (E), k — некоторое натуральное число. Из (7) и (8) следует, что в тех вершинах элементарных ячеек, которые соответствуют параболическим секторам, при $k = 1$ каждой прямой, проходящей через эту вершину, касается одна и только одна из кривых сравнения; а в вершинах, соответствующих эллиптическим секторам, кривые сравнения разными своими ветвями касаются кривых, ограничивающих этот сектор.

3.2. Направления сравнения

Уравнения кривых сравнения, представленные в виде (5), можно использовать для построения двух векторных полей $\vec{n}(n_x, n_y)$ и $\vec{\tau}(\tau_x, \tau_y)$, которые назовём полями направлений сравнения. В частности, положим

$$\vec{n} : \quad n_x = \nu(x, y) \cdot \frac{\Omega_{1x}\Omega_2 - \Omega_1\Omega_{2x}}{\Omega_2^2}, \quad n_y = \nu(x, y) \cdot \frac{\Omega_{1y}\Omega_2 - \Omega_1\Omega_{2y}}{\Omega_2^2}, \quad (8)$$

где Ω_{ix}, Ω_{iy} ($i = 1, 2$) — частные производные по переменным x и y , $\nu(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция, с помощью которой упрощается вид координат векторов \vec{n} и $\vec{\tau}$ без нарушения их свойств, требуемых от векторов направлений сравнения. Эти свойства указаны ниже. Второе векторное поле $\vec{\tau}(\tau_x, \tau_y)$ возьмём ортогональным векторному полю \vec{n} , полагая

$$\tau_x = n_y, \quad \tau_y = -n_x, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\tau_x = \nu(x, y) \cdot \frac{\Omega_{1y}\Omega_2 - \Omega_1\Omega_{2y}}{\Omega_2^2}, \quad \tau_y = \nu(x, y) \cdot \frac{-\Omega_{1x}\Omega_2 + \Omega_1\Omega_{2x}}{\Omega_2^2}. \quad (10)$$

Из равенств (5)–(7) можно вывести следующие общие свойства направлений сравнения.

1. В каждой точке плоскости векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ являются соответственно нормальным и касательным векторами для кривой сравнения в этой точке. Это утверждение относится, в частности, и к кривым $\omega_i = 0$, ограничивающим элементарные ячейки.
2. Во всех точках плоскости векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ взаимно ортогональны и могут рассматриваться как векторы, образующие локальные базисы в точках плоскости.
3. Векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ обращаются в нуль только в вершинах элементарных ячеек, которые являются точками пересечения кривых $\omega_i = 0$, и в особых точках других типов. В этих точках локальный базис, образованный векторами \vec{n} и $\vec{\tau}$, является вырожденным.

4. Получение правых частей искомой системы уравнений

Для решения основной задачи пусть векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ соответствуют кривым $\omega_i = 0$, ограничивающим данную элементарную ячейку, и указанному типу этой ячейки. Эти векторы можно использовать для аналитического представления свойств разбиения данной ячейки на траектории. Такое представление сводится к составлению двух равенств

$$F_1(x, y) = \vec{n} \cdot \vec{v}, \quad F_2(x, y) = \vec{\tau} \cdot \vec{v}, \quad (11)$$

где скалярные произведения вектора фазовой скорости $\vec{v}(P, Q)$ на векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ задаются как функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, отношения значений и знаков которых в точках данной элементарной ячейки соответствуют её типу. Важно отметить, что поля направлений могут быть выбраны такими, что топологическая структура искомой системы будет зависеть только от соотношения знаков скалярных произведений F_1 и F_2 и не зависит от их конкретных значений: в этом случае решение основной задачи упрощается. После того как такие функции F_1 и F_2 будут получены, равенства (11) следует переписать, учитывая соотношения (9), в виде системы уравнений

$$F_1(x, y) = n_x P + n_y Q, \quad F_2(x, y) = n_y P - n_x Q, \quad (12)$$

линейных относительно функций P и Q . Формальным решением этой системы является

$$P = \frac{n_x F_1 + n_y F_2}{n_x^2 + n_y^2}, \quad Q = \frac{n_y F_1 - n_x F_2}{n_x^2 + n_y^2}. \quad (13)$$

Так как справедливы равенства

$$\text{sign}(F_1) = \text{sign}(F_1 \cdot [n_x^2 + n_y^2]), \quad \text{sign}(F_2) = \text{sign}(F_2 \cdot [n_x^2 + n_y^2]), \quad (14)$$

то в силу сделанного выше замечания и свойств векторов \vec{n} и $\vec{\tau}$ функции $\tilde{F}_1 = F_1 \cdot (n_x^2 + n_y^2)$ и $\tilde{F}_2 = F_2 \cdot (n_x^2 + n_y^2)$ также соответствуют данной элементарной ячейке. Использование этих функций позволяет избежать деления на $n_x^2 + n_y^2$ в формулах (13) и получить искомые правые части в виде

$$P = n_x F_1 + n_y F_2, \quad Q = n_y F_1 - n_x F_2. \quad (15)$$

5. Построение системы дифференциальных уравнений, имеющей элементарную ячейку типа (А)

Применение изложенного выше метода синтеза систем дифференциальных уравнений (1), имеющих элементарные ячейки заданных типов, проиллюстрируем на примере ячейки типа (А).

5.1. Составление функций F_1 и F_2

Элементарные ячейки типа (A) могут отличаться друг от друга типами сепаратрисных траекторий $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ в вершинах A_1 и A_3 этих ячеек. Это должно учитываться при составлении соответствующих этим ячейкам функций F_1 и F_2 . Возможны следующие случаи (рис. 3):

- A.1) в вершине A_1 фазовые траектории касаются кривой $\omega_2 = 0$, а в вершине A_3 — кривой $\omega_3 = 0$;
- A.2) в вершинах A_1 и A_3 фазовые траектории касаются кривой $\omega_1 = 0$;
- A.3) в вершине A_1 фазовые траектории касаются кривой $\omega_1 = 0$, а в вершине A_3 — кривой $\omega_3 = 0$;
- A.4) в вершине A_1 фазовые траектории касаются кривой $\omega_2 = 0$, а в вершине A_3 — кривой $\omega_1 = 0$.

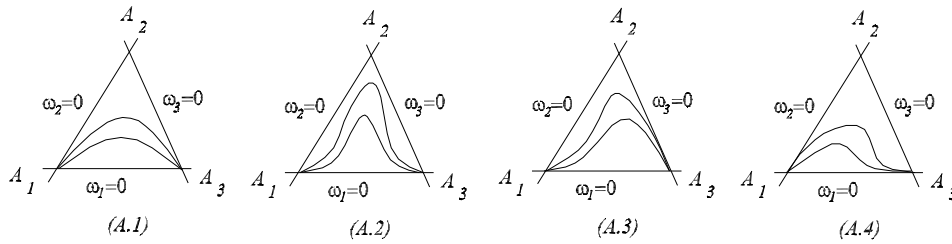


Рис. 3. Возможные случаи элементарных ячеек типа (A)

Во всех этих случаях функции F_1 и F_2 можно взять в виде

$$F_1 = \bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3, \quad F_2 = \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3, \quad (16)$$

где $\hat{\omega}_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ ($i = 1, 2, 3$), а $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ — некоторые произвольные множители, которые будут определены ниже в процессе согласования свойств функций F_1 и F_2 с топологической структурой рассматриваемой ячейки.

Приведём наиболее простые условия на функции, при выполнении которых им будут соответствовать элементарные ячейки типа (A) в случаях A.1)–A.4). Для определённости предположим, что а) внутри рассматриваемых ячеек изображающие фазовые точки движутся вдоль фазовых траекторий от точки A_1 к точке A_3 и б) во внутренних точках этих ячеек $\omega_i < 0$ ($i = 1, 2, 3$). Из предположения а) следует, что во всех случаях A.1)–A.4) внутри ячейки будет $F_2 > 0$. Перейдём к рассмотрению свойств функции F_1 .

В случае A.1) в окрестности вершины A_1 функция $F_1 < 0$, а в окрестности вершины A_3 функция $F_1 > 0$, что обеспечивается, если кривая $\bar{\omega} = 0$ делит ячейку на две части, проходя через вершину A_2 и некоторую внутреннюю точку дуги A_1A_3 кривой $\omega_1 = 0$, причём $\bar{\omega}(A_1) > 0$ и $\bar{\omega}(A_3) < 0$.

В случае A.2) в окрестности вершины A_1 функция $F_1 > 0$, а в окрестности вершины A_3 функция $F_1 < 0$, что обеспечивается, если кривая $\bar{\omega} = 0$ делит ячейку на две части, проходя через вершину A_2 и некоторую внутреннюю точку дуги A_1A_3 кривой $\omega_1 = 0$, причём $\bar{\omega}(A_1) < 0$ и $\bar{\omega}(A_3) > 0$.

В случае A.3) в окрестностях вершин A_1 и A_3 функция $F_1 > 0$, а в окрестности вершины A_2 функция F_1 имеет разные знаки по разные стороны кривой $\bar{\omega} = 0$, которая делит ячейку на две части, проходя через вершину A_2 и некоторую внутреннюю точку дуги A_1A_2 кривой $\omega_2 = 0$, причём $\bar{\omega}(A_1), \bar{\omega}(A_3) > 0$.

В случае A.4) в окрестностях вершин A_1 и A_3 функция $F_1 < 0$, а в окрестности вершины A_2 функция F_1 имеет разные знаки по разные стороны кривой $\bar{\omega} = 0$, которая делит ячейку на две части, проходя через вершину A_2 и некоторую внутреннюю точку дуги A_1A_3 кривой $\omega_3 = 0$, причём $\bar{\omega}(A_1), \bar{\omega}(A_3) < 0$.

Приведённые условия на функции F_1 и F_2 являются достаточными для получения по формуле (17) правых частей системы уравнений (1), для которой область, ограниченная кривыми $\omega_i < 0$ ($i = 1, 2, 3$), является элементарной ячейкой типа (A.1) одной из разновидностей A.1)–A.4). Для доказательства справедливости этого утверждения воспользуемся методом Фроммера [4] исследования особых точек дифференциальных уравнений и изучим топологические структуры вершин A_1, A_2 и A_3 этой элементарной ячейки.

5.2. Исследование топологических структур вершин A_1, A_2 и A_3

В (8) подставим функции Ω_1 и Ω_2 из (4), соответствующие случаю (A). В результате получим векторное поле \vec{n} направлений сравнения:

$$\begin{aligned} n_x &= -\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x}, \\ n_y &= -\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y}, \end{aligned} \quad (17)$$

где ω_{ix}, ω_{iy} ($i = 1, 2, 3$) — частные производные. Используя формулы (13), найдём правые части системы уравнений (1), которая соответствует функциям F_1 и F_2 из (16):

$$\begin{aligned} P &= \bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3(-\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x}) + \\ &\quad + \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(-\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q &= \bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3(-\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y}) - \\ &\quad - \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(-\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x}). \end{aligned}$$

5.3. Исследование особой точки $A_1(x_1, y_1)$

Следуя [4], рассмотрим разность

$$R_1(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} - \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad (19)$$

где заменим функции P и Q их выражениями из (18). В результате получим

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \{[\bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3(-\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y}) - \\ &\quad - \hat{\omega}_1\hat{\omega}(-\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x})](x - x_1) - \\ &\quad - [\bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3(-\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x}) + \\ &\quad + \hat{\omega}_1\hat{\omega}(-\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y})](y - y_1)\} \times \\ &\quad \times \{[\bar{\omega}\omega_1\omega_2\omega_3(-\omega_{1x}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2x}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3x}) + \\ &\quad + \hat{\omega}_1\hat{\omega}_1(-\omega_{1y}\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_{2y}\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_{3y})](x - x_1)\}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) выполним подстановку $y - y_1 = u(x - x_1)$. Используя представления

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{1x1}(x - x_1) + \omega_{1y1}(y - y_1) + o(\rho_1), \\ \omega_2 &= \omega_{2x1}(x - x_1) + \omega_{2y1}(y - y_1) + o(\rho_1), \\ \omega_3 &= \omega_{31} + o(\rho_1), \quad \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3 = \hat{\omega} + o(\rho_1), \end{aligned}$$

где

$$\omega_{31} = \omega_3(x_1, y_1), \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_2(x_1, y_1) \cdot \hat{\omega}_3(x_1, y_1),$$

$$\omega_{ix1} = \frac{\partial \omega_i(x_1, y_1)}{\partial x}, \quad \omega_{iy1} = \frac{\partial \omega_i(x_1, y_1)}{\partial y}, \quad \rho_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

и обозначения

$$u_1 = -\frac{\omega_{1x1}}{\omega_{1y1}}, \quad u_2 = -\frac{\omega_{2x1}}{\omega_{2y1}}, \quad (21)$$

получим функцию

$$\tilde{R}_1(x, u) = \frac{Q(x, u(x - x_1))}{P(x, u(x - x_1))} - u. \quad (22)$$

После элементарных преобразований эта функция приводится к виду

$$\tilde{R}_1(x, u) = \frac{\alpha_1(u) \cdot (u - u_1)(u - u_2) + \xi_1(x, u)}{\hat{\omega} \hat{\omega}_1(u_2 - u_1) + \beta_1(u) + \zeta_1(x, u)}, \quad (23)$$

где функции $\xi_1(x, u)$ и $\zeta_1(x, u)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_1$,

$$\alpha_1(u) = \bar{\omega}_1 \omega_{1y1} \omega_{2y1} \omega_{31} (u_2 - u_1) (1 + u^2),$$

$$\beta_1(u) = \bar{\omega}_1 \omega_{1y1} \omega_{2y1} \omega_{31} (u - u_1) (u - u_2) u (u_1 - u_2)]. \quad (24)$$

Согласно предположениям, сделанным выше, в точках проколотой окрестности вершины A_1 , которые являются также внутренними точками рассматриваемой элементарной ячейки, будет $\hat{\omega}, \hat{\omega}_1 > 0$, $\omega_{31} < 0$, $\omega_{1y1} < 0$, $\omega_{2y1} > 0$. Из (22) и (23) следует, что при условии $u_1 < u_2$ в достаточно малой окрестности значения u_1

$$R_1(x_1, u) = \lambda_1(u)(u - u_1), \quad \text{где } \text{sign}(\lambda_1(u_1)) = -\text{sign}(\bar{\omega}_1), \quad (25)$$

а в достаточно малой окрестности значения u_2

$$R_1(x_1, u) = \mu_1(u)(u - u_2), \quad \text{где } \text{sign}(\mu_1(u_2)) = \text{sign}(\bar{\omega}_1). \quad (26)$$

Из вида правой части (23) следует, что особая точка A_1 имеет только два исключительных направления $u = u_1$ и $u = u_2$. А из (25) и (26) следует, что при $\bar{\omega}(A_1) > 0$ исключительное направление $u = u_1$ является гиперболическим, а направление $u = u_2$ — параболическим, что согласуется с утверждениями относительно случаев $A.1)–A.4)$.

5.4. Исследование особой точки $A_2(x_2, y_2)$

Рассмотрим разность

$$R_2(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} - \frac{y - y_2}{x - x_2}. \quad (27)$$

Пусть

$$\omega_2 = \omega_{2x2}(x - x_2) + \omega_{2y2}(y - y_2) + o(\rho_2),$$

$$\omega_3 = \omega_{3x2}(x - x_2) + \omega_{3y2}(y - y_2) + o(\rho_2),$$

$$\omega_1 = \omega_{12} + o(\rho_2), \quad \hat{\omega}_1 \cdot \hat{\omega}_3 = \hat{\omega} + o(\rho_2)$$

где

$$\omega_{12} = \omega_1(x_2, y_2), \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_1(x_2, y_2) \cdot \hat{\omega}_3(x_2, y_2),$$

$$\omega_{ix2} = \omega_{ix}(x_2, y_2), \quad \omega_{iy2} = \omega_{iy}(x_2, y_2) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Используя эти представления, равенства (17) и учитывая, что $\bar{\omega}(A_2) = 0$, для функции $R_2(x, y)$ из (27) получим

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{-\hat{\omega}_2 \hat{\omega} \omega_{12} [(\omega_{2x2} \omega_3 + \omega_2 \omega_{3x2}) X_2 + (\omega_{2y2} \omega_3 + \omega_2 \omega_{3y2}) Y_2] + o(\rho_2^4)}{\hat{\omega}_2 \hat{\omega} \omega_{12} (\omega_{2y2} \omega_3 + \omega_2 \omega_{3y2}) X_2 + o(\rho_2^4)} = \\ &= \frac{-\hat{\omega}_2 \hat{\omega} \omega_{12} [(\omega_{2x2} X_2 + \omega_{2y2} Y_2) \omega_3 + (\omega_{3x2} X_2 + \omega_{3y2} Y_2) \omega_2] + o(\rho_2^4)}{\hat{\omega}_2 \hat{\omega} \omega_{12} (\omega_{2y2} \omega_3 + \omega_2 \omega_{3y2}) X_2 + o(\rho_2^4)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где для краткости записи принято $X_2 = x - x_2$ и $Y_2 = y - y_2$. Пусть

$$u_2 = -\frac{\omega_{2x2}}{\omega_{2y2}}, \quad u_3 = -\frac{\omega_{3x2}}{\omega_{3y2}}. \quad (29)$$

В (28) выполним подстановку $y - y_2 = u(x - x_2)$. В результате получим функцию

$$\tilde{R}_2(x, u) = \frac{Q(x, u(x - x_2))}{P(x, u(x - x_2))} - u, \quad (30)$$

которая после арифметических преобразований приводится к виду

$$\tilde{R}_2(x, u) = -\frac{(u - u_2)(u - u_3) + o(x - x_2)}{(u - u_2) + (u - u_3) + o(x - x_2)}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) следует, что вершина A_2 является особой точкой, которая имеет только два исключительных направления $u = u_2$ и $u = u_3$, каждое из которых является исключительным направлением гиперболического типа. Таким образом, как и предполагалось в случаях $A.1)–A.4)$, сектор с вершиной в точке A_2 является сектором гиперболического типа.

5.5. Исследование особой точки $A_3(x_3, y_3)$

Топологические структуры секторов с вершинами A_1 и A_3 одинаковы в том смысле, что одна из сепаратрис, их ограничивающих, является сепаратрисой параболического типа, а другая — гиперболического типа. Поэтому возможно использование результатов исследования особой точки A_1 для изучения особой точки A_3 . В частности, сравнение взаимного расположения линий $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ в точке A_1 с расположением линий $\omega_1 = 0$ и $\omega_3 = 0$ в точке A_3 даёт основание для замены в (23) обозначения u_1 на u_3 , u_2 на u_1 , $\omega_3 = 0$ на $\omega_2 = 0$, $\hat{\omega}_1$ на $\hat{\omega}_3$, что соответствует одной циклической перестановке в последовательности индексов (1, 2, 3). Таким образом получим функцию

$$\tilde{R}_3(x, u) = \frac{Q(x, u(x - x_3))}{P(x, u(x - x_3))} - u = \frac{\alpha_3(u)(u - u_3)(u - u_1) + \xi_3(x, u)}{\hat{\omega} \hat{\omega}_3 (u_1 - u_3) + \beta_3(u) + \zeta_3(x, u)}, \quad (32)$$

где функции $\xi_3(x, u)$ и $\zeta_3(x, u)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_3$,

$$\begin{aligned} \alpha_3(u) &= \bar{\omega}_3 \omega_{3y3} \omega_{1y3} \omega_{23} (u_1 - u_3) (1 + u^2), \\ \beta_3(u) &= \bar{\omega}_3 \omega_{3y3} \omega_{1y3} \omega_{23} (u - u_3) (u - u_1) u (u_3 - u_1), \\ \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}(x_3, y_3), \quad \omega_{23} = \omega_2(x_3, y_3), \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_1(x_3, y_3) \hat{\omega}_2(x_3, y_3), \\ y - y_3 &= u(x - x_3), \quad u_1 = -\frac{\omega_{1x3}}{\omega_{1y3}}, \quad u_3 = -\frac{\omega_{3x3}}{\omega_{3y3}}. \end{aligned}$$

Согласно предположениям, сделанным выше, в точках проколотой окрестности вершины A_3 , которые являются также внутренними точками рассматриваемой

элементарной ячейки, будет $\hat{\omega}, \hat{\omega}_3 > 0$, $\omega_{23} < 0$, $\omega_{1y3} < 0$, $\omega_{3y3} > 0$. Из (29) и (30) следует, что при условии $u_3 < u_1$ в достаточно малой окрестности значения u_3

$$R_3(x_3, u) = \lambda_3(u)(u - u_3), \text{ где } \text{sign}(\lambda_3(u_3)) = -\text{sign}(\bar{\omega}_3), \quad (33)$$

а в достаточно малой окрестности значения u_1

$$R_3(x_3, u) = \mu_3(u)(u - u_1), \text{ где } \text{sign}(\mu_3(u_1)) = \text{sign}(\bar{\omega}_3). \quad (34)$$

Из (31) заключаем, что при $\bar{\omega}(A_3) \cdot \omega_2(A_3) > 0$ для точки A_3 исключительное направление $u = u_3$ является гиперболическим, а направление $u = u_1$ — параболическим.

Из вида правой части последнего равенства в (32) следует, что особая точка A_3 имеет только два исключительных направления $u = u_1$ и $u = u_3$. Из (33) и (34) следует, что при $\bar{\omega}(A_3) < 0$ исключительное направление $u = u_3$ является параболического типа, а направление $u = u_1$ — гиперболического типа, что согласуется с утверждениями относительно случаев $A.1)–A.4)$.

Литература

1. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // УМН. — 1941. — Т. 9. — С. 212–253. [Frommer M. Integraljnihe krivihe obihknovennoho diferencialjnogo uravneniya pervogo poryadka v okrestnosti osoboyj točki, imeyutheyj racionaljnihyj kharakter // UMN. — 1941. — Т. 9. — S. 212–253.]
2. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М.: Наука, 1966. [Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka / A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Mayjer. — M.: Nauka, 1966.]
3. Волков С. В. Построение на плоскости систем дифференциальных уравнений по разбиению на траектории области, имеющей особые точки только на границе. — Минск, 1985. — Т. XXI, С. 1313–1317. [Volkov S. V. Postroenie na ploskosti sistem differencialjnihkh uravneniyj po razbieniyu na traektorii oblasti, imeyutheyj osobihe točki toljko na granice. — Minsk, 1985. — Т. XXI, S. 1313–1317.]
4. Волков С. В. Построение дифференциальных операторов динамических систем. — РУДН, 1999. [Volkov S. V. Postroenie differencialjnihkh operatorov dinamicheskikh sistem. — RUDN, 1999.]

UDC 531.3, 531/534.01

Synthesis of Dynamical Systems, which Phase Portraits Contain Elementary Cells with a Prescribed Topological Structure. Part 1

S. V. Volkov, M. A. Davydova

*Department of Optimization and Nonlinear Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia*

A method for construction of differential plane dynamical systems which phase portraits have elementary cells with a prescribed topological structure is presented. The solutions of such type inverse problems of differential equations theory may be used to obtain control over dynamical systems behavior.

Key words and phrases: dynamical systems, systems of differential equations, phase portraits, phase portraits topological structure, singular phase trajectories.