Теоретическая механика

УДК 531.13

Программные связи и обеспечение устойчивости движения электромеханического манипулятора

А. В. Соколов

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Для теоретического изучения динамики манипуляционных роботов, определения конструктивных параметров и законов управления необходимо иметь расчётные механические модели, с достаточной точностью описывающие свойства реальных роботов. Выбор расчётной модели в каждом конкретном случае определяется кинематической схемой манипулятора, механическими свойствами (инерционными, упругими, диссипативными и т.п.) его деталей и узлов, типом и характеристиками приводов, а также необходимой точностью производимых расчётов.

Задачей управления является обеспечение движения механической системы согласно некоторым требованиям, которые составляют её программу. Программное движение системы может быть осуществлено приложением к системе управляющих сил, изменением параметров системы в процессе движения, построением специальных управляющих устройств (регуляторов) или сочетанием этих возможностей. Исходными задачами теории управления являются обратные задачи классической динамики.

С математической точки зрения расчётная модель манипуляционного робота представляет собой систему дифференциальных уравнений. Эта модель может содержать уравнения, описывающие также явления немеханической природы, например электрические процессы в цепях электродвигателей приводов.

В данной статье автором исследуются вопросы обеспечения условий асимптотической устойчивости программного движения механических и электромеханических систем с голономными и неголономными связями. На примере модели трёхзвенного управляемого электромеханического манипулятора обеспечиваются условия асимптотической устойчивости заданного движения. Описываемые подходы к обеспечению условий асимптотической устойчивости электромеханических систем могут быть использованы при исследовании устойчивости движения несвободных механических систем, в механике управляемого движения, при решении задач управления роботами–манипуляторами, транспортными и космическими системами.

Ключевые слова: динамика, манипуляционные системы, голономные и неголономные связи, управление, асимптотическая устойчивость.

1. Исследование условий асимптотической устойчивости движения управляемого электромеханического манипулятора

Поставим задачу нахождения условий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость программного движения электромеханических систем с голономными и неголономными связями.

Для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением выполняются соотношения [1]:

$$L^* \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + R^*\mu + k^2 n^* \dot{\varphi} = ku, \tag{1}$$

$$M^* = -n^*\mu - I_0 n *^2 \ddot{\varphi}, \tag{2}$$

где φ — угол поворота ведомой шестерни редуктора; n^* — передаточное число редуктора (отношение числа зубьев ведомой и ведущей шестерен); L^* и R^* —

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 13-08-00535.

соответственно коэффициент индуктивности и электрическое (омическое) сопротивление обмотки ротора электродвигателя; u — управляющее электрическое напряжение; μ — момент электромагнитных сил, создаваемых двигателем и приложенных к его ротору; I_0 — суммарный момент инерции ротора электродвигателя и ведущей шестерни редуктора относительно оси вращения; M^* — момент сил реакции, действующих на ведущую шестерню; k – коэффициент, зависящий от напряжения на входе цепи возбуждения. Будем предполагать, что это напряжение постоянно. Тогда $k = \mathrm{const}$.

При описании динамики манипуляционных роботов обычно используют уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = M^*. \tag{3}$$

Уравнения (1), (2) описывают электрические процессы, проходящие в электродвигателе звена манипулятора; уравнения (3) описывают динамику звена манипулятора. Аналогичные уравнения можно записать для каждого звена. Уравнения типа (1), (2), (3) можно объединить в систему [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar q}{\mathrm{d}t} = \dot{\bar q}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\dot{\bar q}}{\mathrm{d}t} = \tilde M^{-1}(-n^*\bar\mu - \bar\gamma), \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar\mu}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R^*}{L^*}\bar\mu + \dfrac{k^2 n^*}{L^*}\dot{\bar q} + \dfrac{k}{L^*}\bar u. \end{cases} \tag{4}$$

Заданной программой движения манипуляционной системы можно считать ограничения, наложенные на обобщённые координаты и скорости, которые в общем виде можно представить как совокупность уравнений голономных и неголономных связей:

$$\bar f(\bar q, t) = 0, \quad \bar f'(\dot{\bar q}, \bar q, t) = 0. \tag{5}$$

В [3] было показано, что для обеспечения асимптотической устойчивости интегрального многообразия, описываемого уравнениями (5), следует использовать вместо уравнений связей (5) уравнения программных связей:

$$\begin{cases} \bar f(\bar q, t) = \bar\alpha, \\ \dot{\bar f}(\dot{\bar q}, \bar q, t) = \dot{\bar\alpha}, \\ \bar f'(\dot{\bar q}, \bar q, t) = \bar\alpha', \\ \ddot{\bar f}(\ddot{\bar q}, \dot{\bar q}, \bar q, t) = \ddot{\bar\alpha}, \\ \dot{\bar f}'(\ddot{\bar q}, \dot{\bar q}, \bar q, t) = \dot{\bar\alpha}', \end{cases} \tag{6}$$

в которых возмущения связей $\bar\alpha, \dot{\bar\alpha}, \ddot{\bar\alpha}, \bar\alpha', \dot{\bar\alpha}'$ рассматриваются как переменные, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\dot\alpha_i^* = \varphi_i(\bar\alpha^*, \dot{\bar q}, \bar q, t), \quad \ddot\alpha_i^* = \dot\varphi_i(\dot\alpha^*, \bar\alpha^*, \ddot{\bar q}, \dot{\bar q}, \bar q, t), \tag{7}$$

$$\alpha^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \dot\alpha_1, \ldots, \dot\alpha_m, \alpha_1', \ldots, \alpha_m'),\ \varphi(0, \dot{\bar q}, \bar q, t) = 0,\ \dot\varphi(0, 0, \ddot{\bar q}, \dot{\bar q}, \bar q, t) = 0.$$

Правые части уравнений (7) можно выбрать так, чтобы их тривиальное решение

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \dot\alpha_1 = \ldots = \dot\alpha_m = \ddot\alpha_1 = \ldots = \ddot\alpha_m = \alpha_1' = \\ = \ldots = \alpha_r' = \dot\alpha_1{}' = \ldots = \dot\alpha_r{}' \equiv 0$$

было асимптотически или экспоненциально устойчиво [4]. Будем считать, что из асимптотической или экспоненциальной устойчивости тривиального решения

$$\bar{\alpha} = \dot{\bar{\alpha}} = \ddot{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}' = \dot{\bar{\alpha}}' \equiv 0$$

уравнений (7) следует соответственно асимптотическая или экспоненциальная устойчивость интегрального многообразия $\Omega(t)$.

Подставим вместо $\ddot{\bar{q}}$ выражение, полученное из (4), $\ddot{\bar{q}} = \bar{Q}(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, \bar{\mu})$. Тогда получим

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{q}, t) = \bar{\alpha}, \\ \dot{\bar{f}}(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, t) = \dot{\bar{\alpha}}, \\ \bar{f}'(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, t) = \bar{\alpha}', \\ \ddot{\bar{f}}(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, \bar{\mu}, t) = \ddot{\bar{\alpha}}, \\ \dot{\bar{f}}'(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, \bar{\mu}, t) = \dot{\bar{\alpha}}'. \end{cases} \tag{8}$$

Уравнения (7) подбираем так, чтобы они удовлетворяли системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\ddot{\bar{\alpha}}}{\mathrm{d}t} = A_1^1\bar{\alpha} + A_2^1\dot{\bar{\alpha}} + A_3^1\ddot{\bar{\alpha}} + A_4^1\bar{\alpha}' + A_5^1\dot{\bar{\alpha}}', \\ \dfrac{\mathrm{d}\dot{\bar{\alpha}}'}{\mathrm{d}t} = A_1^2\bar{\alpha} + A_2^2\dot{\bar{\alpha}} + A_3^2\ddot{\bar{\alpha}} + A_4^2\bar{\alpha}' + A_5^2\dot{\bar{\alpha}}', \end{cases} \tag{9}$$

где матрицы имеют размерности: A_0^1, A_1^1, A_2^1 — $(m \times m)$; A_3^1, A_4^1 – $(m \times r)$, A_0^2, A_1^2, A_2^2 — $(r \times m)$; A_3^2, A_4^2 — $(r \times r)$; и состоят из коэффициентов, которые подбираются из условий асимптотической устойчивости движения.

Рассмотрим более подробно поиск коэффициентов (матриц коэффициентов) A_j^i, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 5$ из (9), которые подбираются из условий асимптотической устойчивости движения.

Введём обозначения:

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \\ \bar{\alpha}' \\ \dot{\bar{\alpha}}' \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{g}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \\ \dddot{\bar{\alpha}} \\ \dot{\bar{\alpha}}' \\ \ddot{\bar{\alpha}}' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Тогда можно записать уравнения (9) в виде:

$$\dot{\bar{g}} = A.\bar{g}, \tag{11}$$

где в матрице A на соответствующих местах находятся соответствующие блок-матрицы.

Функцию Ляпунова возьмём в виде

$$2V = \bar{g}^T.R.\bar{g}, \tag{12}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} \ldots R_{15} \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_{51} \ldots R_{55} \end{bmatrix},$$

$R = R^T$; R_{ij}, $i, j = 1, \ldots, 5$ — блок-матрицы соответствующих размерностей.

Так как вектора $\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}', \dot{\bar{\alpha}}'$ и матрицы R_{ij}, $i,j=1,\ldots,5$ состоят из скалярных функций; и $R_{ij}=R_{ji}^T$, то будут выполняться равенства

$$\bar{\alpha}^T.R_{ij}.\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}'^T.R_{ji}.\bar{\alpha}.$$

Отсюда следует, что $\bar{\alpha}^T.R_{ij}.\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}'^T.R_{ji}.\bar{\alpha} = 2\bar{\alpha}^T.R_{ij}.\bar{\alpha}'$.

Выражение для функции Ляпунова (12) с учётом вышеизложенного примет вид:

$$\begin{aligned}2V &= \bar{\alpha}^T.R_{11}.\bar{\alpha} + \dot{\bar{\alpha}}^T.R_{22}.\dot{\bar{\alpha}} + \ddot{\bar{\alpha}}^T.R_{33}.\ddot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}'^T.R_{44}.\bar{\alpha}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.R_{55}.\dot{\bar{\alpha}}' + \\ &+ 2\bar{\alpha}^T.R_{12}.\dot{\bar{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^T.R_{13}.\ddot{\bar{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^T.R_{14}.\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}^T.R_{15}.\dot{\bar{\alpha}}' + 2\dot{\bar{\alpha}}^T.R_{23}.\ddot{\bar{\alpha}} + \\ &+ 2\dot{\bar{\alpha}}^T.R_{24}.\bar{\alpha}' + 2\dot{\bar{\alpha}}^T.R_{25}.\dot{\bar{\alpha}}' + 2\ddot{\bar{\alpha}}^T.R_{34}.\bar{\alpha}' + \ddot{\bar{\alpha}}^T.R_{35}.\dot{\bar{\alpha}}' + 2\bar{\alpha}'^T.R_{45}.\dot{\bar{\alpha}}'. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем искать функцию Ляпунова V в виде [5]:

$$\begin{aligned}2V &= \bar{\alpha}^T.B.\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}^T.C.\dot{\bar{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^T.D.\ddot{\bar{\alpha}} + \dot{\bar{\alpha}}^T.E.\dot{\bar{\alpha}} + \\ &+ \ddot{\bar{\alpha}}^T.G.\ddot{\bar{\alpha}} + 2\dot{\bar{\alpha}}^T.F.\ddot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}'^T.K.\bar{\alpha}' + 2\bar{\alpha}'^T.L.\ddot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.M.\dot{\bar{\alpha}}', \end{aligned} \quad (14)$$

где $B, C, D, E, F, G, K, L, M$ — симметрические матрицы с постоянными коэффициентами. Сравнивая правые части в выражениях (12), (13), (14) для функций V, получим:

$$R = \begin{bmatrix} B & C & D & 0 & 0 \\ C & E & F & 0 & 0 \\ D & F & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & L \\ 0 & 0 & 0 & L & M \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Таким образом, $R_{11}=B$, $R_{12}=R_{21}=C$, $R_{13}=R_{31}=D$, $R_{22}=E$, $R_{23}=R_{32}=F$, $R_{33}=G$, $R_{44}=K$, $R_{45}=R_{54}=L$, $R_{55}=M$, остальные $R_{ij}=0$.

Найдём производную $\dot{V}$. Для этого продифференцируем выражение (12). Получим

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \bar{\alpha}^T.B.\dot{\bar{\alpha}} + \dot{\bar{\alpha}}^T.C.\dot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}^T.C.\ddot{\bar{\alpha}} + \dot{\bar{\alpha}}^T.D.\ddot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}^T.D.\dddot{\bar{\alpha}} + \dot{\bar{\alpha}}^T.E.\ddot{\bar{\alpha}} + \\ &+ \ddot{\bar{\alpha}}^T.F.\ddot{\bar{\alpha}} + \dot{\bar{\alpha}}^T.F.\dddot{\bar{\alpha}} + \ddot{\bar{\alpha}}^T.G.\dddot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}'^T.K.\dot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.L.\dot{\bar{\alpha}}' + \bar{\alpha}'^T.L.\ddot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.M.\ddot{\bar{\alpha}}'. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив в (12) вместо $\dddot{\bar{\alpha}}$ и $\ddot{\bar{\alpha}}'$ выражения из (12), производную от функции Ляпунова $\dot{V}$ можно выразить в виде:

$$\dot{V} = \bar{g}^T.H.\bar{g}, \quad (17)$$

где матрица примет вид:

$$H = \begin{bmatrix} DA_1^1 & B + DA_2^1 & C + DA_3^1 & DA_4^1 & DA_5^1 \\ FA_1^1 & C + FA_2^1 & E + D + FA_3^1 & FA_4^1 & FA_5^1 \\ GA_1^1 & GA_2^1 & F + GA_3^1 & GA_4^1 & GA_5^1 \\ LA_1^2 & LA_2^2 & LA_3^2 & LA_4^2 & K + LA_5^2 \\ MA_1^2 & MA_2^2 & MA_3^2 & MA_4^2 & L + MA_5^2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда:

$$A_4^1 = 0, \quad A_5^1 = 0, \quad A_1^2 = 0, \quad A_2^2 = 0, \quad A_3^2 = 0. \quad (19)$$

Тогда матрица H будет иметь вид:

$$H = \begin{bmatrix} DA_1^1 & B + DA_2^1 & C + DA_3^1 & 0 & 0 \\ FA_1^1 & C + FA_2^1 & E + D + FA_3^1 & 0 & 0 \\ GA_1^1 & GA_2^1 & F + GA_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & LA_4^2 & K + LA_5^2 \\ 0 & 0 & 0 & MA_4^2 & L + MA_5^2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Функцию Ляпунова V и её производную $\dot{V}$ можно записать ещё так:

$$V = V(\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}', \dot{\bar{\alpha}}') = V_1(\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}) + V_2(\bar{\alpha}', \dot{\bar{\alpha}}'),$$

$$\dot{V} = \dot{V}(\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}', \dot{\bar{\alpha}}') = \dot{V}_1(\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}) + \dot{V}_2(\bar{\alpha}', \dot{\bar{\alpha}}'),$$

где

$$2V_1 = (\bar{\alpha}^T, \dot{\bar{\alpha}}^T, \ddot{\bar{\alpha}}^T). \begin{bmatrix} B & C & D \\ C & E & F \\ D & E & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}, \quad 2V_2 = (\bar{\alpha}'^T, \dot{\bar{\alpha}}'^T). \begin{bmatrix} K & L \\ L & M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha}' \\ \dot{\bar{\alpha}}' \end{bmatrix},$$

$$\dot{V}_1 = (\bar{\alpha}^T, \dot{\bar{\alpha}}^T, \ddot{\bar{\alpha}}^T). \begin{bmatrix} DA_1^1 & B + DA_2^1 & C + DA_3^1 \\ FA_1^1 & C + FA_2^1 & E + D + FA_3^1 \\ GA_1^1 & GA_2^1 & F + GA_3^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix},$$

$$\dot{V}_2 = (\bar{\alpha}'^T, \dot{\bar{\alpha}}'^T). \begin{bmatrix} LA_4^2 & K + LA_5^2 \\ MA_4^2 & L + MA_5^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha}' \\ \dot{\bar{\alpha}}' \end{bmatrix}. \tag{21}$$

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости будем добиваться положительной определённости функции V и отрицательной определённости функции $\dot{V}$. Это эквивалентно требованию положительной определённости матрицы R и отрицательной определённости матрицы H.

1. Положительная определённость матрицы R: главные миноры матрицы R удовлетворяют условию

$$\Delta_i(R) > 0, \quad i = 1, \ldots, 2m + r. \tag{22}$$

2. Отрицательная определённость матрицы H: главные миноры матрицы H удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \Delta_i(H) < 0, \quad i \in [1; 2m + r], \quad i \text{ — нечётное}, \\ \Delta_j(H) < 0, \quad j \in [1; 2m + r], \quad j \text{ — чётное}, \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, мы будем иметь $2(2m + r)$ условий (22), (23) типа неравенств, наложенных на искомые коэффициенты матриц A_j^i, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 5$, и на коэффициенты матриц B, C, D, E, F, G, K, L, M.

В общем случае условий (22), (23) недостаточно для однозначного нахождения коэффициенты матриц A_j^i. Поэтому при решении конкретных задач используется произвол при выборе постоянных коэффициентов матриц B, C, D, E, F, G, K, L, M, а также дополнительные условия задачи.

2. Исследование условий асимптотической устойчивости движения трёхзвенного управляемого электромеханического манипулятора

Найдём коэффициенты матриц A_j^i, обеспечивающих асимптотическую устойчивость движения, при попадании схвата трёхзвенного электромеханического манипулятора из произвольной точки $X_0(x_0, y_0)$ рабочей зоны, полуплоскость левее прямой $x = 6$, в точку $A^*(6, 5)$, минуя препятствие, которое ограничено замкнутой кривой Ψ: $(x-3)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$. К тому же потребуем, чтобы схват манипулятора во время движения был параллелен оси Ox.

В данном случае голономные и неголономные связи, накладываемые на движения манипулятора, имеют вид [6]:

$$\begin{gathered}
f_1 \equiv \cos(q_1 + q_2 + q_3) - 1 = 0, \\
f_2 \equiv \dot{x} + (x-6)\left(\frac{1}{8}((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1) + (y-3)(2x - 3y + 3)\right) = 0, \\
f_3 \equiv \dot{y} + (2x - 3y + 3)\left(\frac{1}{24}((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1) - (x-3)(x-6)\right) - \\
- \frac{1}{3}((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1)(x-6) = 0,
\end{gathered} \tag{24}$$

где координаты схвата x и y, используя кинематику, выражаются через обобщённые координаты $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)$:

$$\begin{cases}
x = L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3), \\
y = L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3).
\end{cases}$$

Уравнения (9) примут вид:

$$\begin{cases}
\dddot{\alpha}_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\dot{\alpha}_1 + a_{13}\ddot{\alpha}_1 + a_{14}\alpha_2 + a_{15}\alpha_3 + a_{16}\dot{\alpha}_2 + a_{17}\dot{\alpha}_3, \\
\ddot{\alpha}_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\dot{\alpha}_1 + a_{23}\ddot{\alpha}_1 + a_{24}\alpha_2 + a_{25}\alpha_3 + a_{26}\dot{\alpha}_2 + a_{27}\dot{\alpha}_3, \\
\ddot{\alpha}_3 = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\dot{\alpha}_1 + a_{33}\ddot{\alpha}_1 + a_{34}\alpha_2 + a_{35}\alpha_3 + a_{36}\dot{\alpha}_2 + a_{37}\dot{\alpha}_3.
\end{cases} \tag{25}$$

Обозначим вектора $\dot{\bar{g}}$, $\bar{g}$ и матрицу A:

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{g}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_1 \\ \dddot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \\ \ddot{\alpha}_2 \\ \ddot{\alpha}_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Тогда можно записать $\dot{\bar{g}} = A.\bar{g}$.

Будем искать функцию Ляпунова V в виде (14):

$$\begin{split}
2V = \alpha_1.b.\alpha_1 + 2\alpha_1.c.\dot{\alpha}_1 + 2\alpha_1.d.\ddot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_1.e.\dot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_1.f.\ddot{\alpha}_1 + \\
+ 2\dot{\alpha}_1.g.\ddot{\alpha}_1 + \bar{\alpha}'^T.K.\bar{\alpha}' + 2\bar{\alpha}'^T.L.\dot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.M.\dot{\bar{\alpha}}',
\end{split} \tag{27}$$

где

$$\bar{\alpha}' = \begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}$$

— матрицы с постоянными коэффициентами, причём $k_{12} = k_{21}$, $l_{12} = l_{21}$, $m_{12} = m_{21}$; b, c, d, e, f, g — постоянные коэффициенты.

В уравнении (12) $2V = \bar{g}^T.R.\bar{g}$, матрица R будет иметь вид:

$$R = \begin{bmatrix} b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0\\ c & e & f & 0 & 0 & 0 & 0\\ d & f & g & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & l_{11} & l_{12}\\ 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & l_{21} & l_{22}\\ 0 & 0 & 0 & l_{11} & l_{12} & m_{11} & m_{12}\\ 0 & 0 & 0 & l_{21} & l_{22} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0\\ 0 & R_2 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Найдём производную $\dot{V}$. Для этого продифференцируем выражение (27). Получим

$$\dot{V} = \alpha_1.b.\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_1.c.\dot{\alpha}_1 + \alpha_1.c.\ddot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_1.d.\ddot{\alpha}_1 + \alpha_1.d.\dddot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_1.e.\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_1.f.\ddot{\alpha}_1 + \\ + \dot{\alpha}_1.f.\dddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_1.g.\dddot{\alpha}_1 + \bar{\alpha}'^T.K.\dot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.L.\dot{\bar{\alpha}}' + \bar{\alpha}'^T.L.\ddot{\bar{\alpha}}' + \dot{\bar{\alpha}}'^T.M.\ddot{\bar{\alpha}}'. \tag{29}$$

Подставим в (29) вместо $\dddot{\alpha}$ и $\ddot{\bar{\alpha}}'$ выражения из (25). Производная от функции Ляпунова $\dot{V}$ имеет структуру вида $\dot{V} = \bar{g}^T.H.\bar{g}$, где из (18) мы получаем вид матрицы H:

$$H = \begin{bmatrix} da_{11} & b + da_{12} & c + da_{13} & dA_4^1 & dA_5^1\\ fa_{11} & c + fa_{12} & e + d + fa_{13} & fA_4^1 & fA_5^1\\ ga_{11} & ga_{12} & f + ga_{13} & gA_4^1 & gA_5^1\\ LA_1^2 & LA_2^2 & LA_3^2 & LA_4^2 & K + LA_5^2\\ MA_1^2 & MA_2^2 & MA_3^2 & MA_4^2 & L + MA_5^2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Здесь $A_4^1 = (a_{14}, a_{15})$, $A_5^1 = (a_{16}, a_{17})$, $A_1^2 = \begin{bmatrix}a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix}$, $A_2^2 = \begin{bmatrix}a_{22}\\ a_{32}\end{bmatrix}$, $A_3^2 = \begin{bmatrix}a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}$, $A_4^2 = \begin{bmatrix}a_{24} & a_{25}\\ a_{34} & a_{35}\end{bmatrix}$, $A_5^2 = \begin{bmatrix}a_{26} & a_{27}\\ a_{36} & a_{37}\end{bmatrix}$.

Рассмотрим случай когда:

$$A_4^1 = 0, \quad A_5^1 = 0, \quad A_1^2 = 0, \quad A_2^2 = 0, \quad A_3^2 = 0. \tag{31}$$

Тогда матрица H будет иметь вид:

$$H = \begin{bmatrix} da_{11} & b + da_{12} & c + da_{13} & 0 & 0\\ fa_{11} & c + fa_{12} & e + d + fa_{13} & 0 & 0\\ ga_{11} & ga_{12} & f + ga_{13} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & LA_4^2 & K + LA_5^2\\ 0 & 0 & 0 & MA_4^2 & L + MA_5^2 \end{bmatrix} \text{или } H = \begin{bmatrix} H_1 & 0\\ 0 & H_2 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Функцию Ляпунова V и её производную $\dot{V}$ можно записать ещё так:

$$V = V(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_1, \alpha_2, \alpha_3, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3) = V_1(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_1) + V_2(\alpha_2, \alpha_3, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3),$$

$$\dot{V} = \dot{V}(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_1, \alpha_2, \alpha_3, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3) = \dot{V}_1(\alpha_1, \dot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_1) + \dot{V}_2(\alpha_2, \alpha_3, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3),$$

где

$$2V_1 = [\alpha_1 \quad \dot{\alpha}_1 \quad \ddot{\alpha}_1] . \begin{bmatrix} b & c & d \\ c & e & f \\ d & f & g \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_1 \end{bmatrix},$$

$$2V_2 = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_3] . \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & l_{11} & l_{12} \\ k_{12} & k_{22} & l_{12} & l_{22} \\ l_{11} & l_{12} & m_{11} & m_{12} \\ l_{12} & l_{22} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix},$$

$$\dot{V}_1 = [\alpha_1 \quad \dot{\alpha}_1 \quad \ddot{\alpha}_1] . \begin{bmatrix} da_{11} & b + da_{12} & c + da_{13} \\ fa_{11} & c + fa_{12} & e + d + fa_{13} \\ ga_{11} & ga_{12} & f + ga_{13} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{V}_2 = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_3] . H_2 . \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} l_{11}a_{24} + l_{12}a_{34} & l_{11}a_{25} + l_{12}a_{35} & k_{11} + l_{11}a_{26} + l_{12}a_{36} & k_{12} + l_{11}a_{27} + l_{12}a_{37} \\ l_{12}a_{24} + l_{22}a_{34} & l_{12}a_{25} + l_{22}a_{35} & k_{12} + l_{12}a_{26} + l_{22}a_{36} & k_{22} + l_{12}a_{27} + l_{22}a_{37} \\ m_{11}a_{24} + m_{12}a_{34} & m_{11}a_{25} + m_{12}a_{35} & k_{11} + m_{11}a_{26} + m_{12}a_{36} & k_{12} + m_{11}a_{27} + m_{12}a_{37} \\ m_{12}a_{24} + m_{22}a_{34} & m_{12}a_{25} + m_{22}a_{35} & k_{12} + m_{12}a_{26} + m_{22}a_{36} & k_{22} + m_{12}a_{27} + m_{22}a_{37} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости будем добиваться положительной определённости функции V и отрицательной определённости функции $\dot{V}$. Это эквивалентно выполнению условий (22), (23) для матриц R и H, содержащей коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{37}.

Найдём частное решение задачи поиска коэффициентов a_{ij}, обеспечивающих асимптотическую устойчивость заданного движения манипулятора.

Возьмём коэффициенты b, c, d, e, f, g:

$$b = 8, \quad c = 3, \quad d = 2, \quad e = 4, \quad f = 1, \quad g = 5. \tag{34}$$

Матрица R_1 будет положительно определённой и примет вид:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Соответственно, матрица H_1 из (32) будет иметь вид:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 8 + 2a_{12} & 3 + 2a_{13} \\ a_{11} & 3 + a_{12} & 6 + a_{13} \\ 5a_{11} & 5a_{12} & 1 + 5a_{13} \end{bmatrix}.$$

Пусть $a_{11} = -3$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 1$. Матрица H_1 будет отрицательной определённости и примет вид:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ -15 & -10 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пусть $k_{11} = 6$, $k_{22} = 5$, $k_{12} = 2$, $l_{11} = 1$, $l_{22} = 1$, $l_{12} = 0$, $m_{11} = 4$, $m_{22} = 3$, $m_{12} = 0$. Матрица R_2 будет положительно определённой и примет вид:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Матрица H_2 из (33) будет иметь вид:

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_{24} & a_{25} & 6 + a_{26} & 2 + a_{27} \\ a_{34} & a_{35} & 2 + a_{36} & 5 + a_{37} \\ 2a_{24} & 4a_{25} & 1 + a_{26} & 4a_{27} \\ 3a_{34} & 3a_{35} & a_{36} & 1 + 3a_{37} \end{bmatrix}.$$

Пусть $a_{24} = -7$, $a_{25} = 0$, $a_{26} = -4$, $a_{27} = -2$, $a_{34} = 2$, $a_{35} = -6$, $a_{36} = 0$, $a_{37} = -2$. Условия отрицательной определённости матрицы H_2 выполняются.

Таким образом, мы подобрали все искомые коэффициенты a_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 7$, при помощи которых будет обеспечиваться асимптотическая устойчивость заданного движения (24) трёхзвенного электромеханического манипулятора.

В результате матрица коэффициентов a_{ij} из (26) примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Литература

1. *Чиликин М. В., Ключев В. И., Сандлер А. С.* Теория автоматизированного электропривода. — М.: Энергия, 1979. — 616 с.
2. *Соколов А. В.* Об управлении движением электромеханического манипулятора // Проблемы механики и процессов управления. Пермь, Меж. вуз. сборн. — 2003. — № 35. — С. 136–151.
3. *Мухарлямов Р. Г.* Математическое моделирование динамики несвободных механических систем // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — 1996. — № 1. — С. 31–37.
4. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. — 1969. — № 4. — С. 688–699.
5. Программное движение механических систем / под ред. А. С. Галиуллина. — М., 1971. — С. 158.
6. *Соколов А. В.* Управление программным движением многозвенного манипулятора // Проблемы механики и процессов управления. Пермь, Меж. вуз. сборн. — 2002. — № 34. — С. 76–93.

UDC 531.13

Program Constraints and Ensuring Stability of Movement of the Electromechanical Manipulator

A. V. Sokolov

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

For the theoretical study of the dynamics of manipulation robots, define design parameters and control laws, you must have a current mechanical models that accurately describe the properties of real robots. The choice of the computational model in each case is determined by the kinematic scheme of the manipulator, mechanical properties (inertial, elastic, dissipative, and the like) parts and assemblies, type and characteristics of the drives, as well as the required accuracy of the calculation.

The objective of the control is to ensure the motion of the mechanical system under some requirements that make up its program. Program motion of the system can be performed by the application to the system of control of forces, the system settings change in the process, building of special control devices (controllers) or a combination of these. The original objectives of the control theory are inverse problems of classical dynamics.

From the mathematical point of view, calculation model manipulation robot is a system of differential equations. This model may include equations describing the phenomena non-mechanical nature, for example, electrical processes in the circuits of the motors of the actuators.

In this article the author examines the issues of ensuring conditions of the asymptotic stability software movement mechanical and electromechanical systems with holonomic and nonholonomic constraints. For example, the three-tier model controllable electromechanical manipulator conditions of the asymptotic stability of a given movement.

The described approaches to ensuring the asymptotic stability of electromechanical systems can be used in the study of stability of motion proprietary mechanical systems, mechanics of controlled motion in the solution of management tasks manipulators, transport and space systems.

Key words and phrases: dynamics, manipulating systems, holonomic and nonholonomic constraints, control, asymptotic stability.

References

1. M. V. Chilikin, V. I. Klyuchev, A. S. Sandler, Theory of the Automated Electric Drive, Energy, Moscow, 1979, in Russian.
2. A. V. Sokolov, About the Electromechanical Motion Control Manipulator, Problems of Mechanics and Control Processes. Perm. (35) (2003) 136–151, in Russian.
3. R. G. Mukharlyamov, Mathematical Modeling of the Dynamics of Unfree Mechanical Systems, PFUR Bulletin. "Applied Matematics and Computer Science" (1) (1996) 31–37, in Russian.
4. R. G. Mukharlyamov, About the Construction of the Set of Systems of Differential Equations of Stability of Motion in Integral Manifold, Differential Equations (4) (1969) 688–699, in Russian.
5. A. S. Galiullin (Ed.), Programm Motion of Mechanical Systems, Moscow, 1971, in Russian.
6. A. V. Sokolov, Control of Program Movement of the Multilink Manipulator, Problems of Mechanics and Control Processes. Perm (34) (2002) 76–93, in Russian.