Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 635–654

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654 УДК 517.929

СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. **В. В. ЛИЙКО, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. Рассматриваются сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области. Показана взаимосвязь таких задач с нелокальными смешанными задачами для сильно эллиптических дифференциальных уравнений, а также их однозначная разрешимость.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений изучалась многими авторами: А. Б. Антоневичем [1], Ф. Хартманом и Г. Стампакья [15], В. С. Рабиновичем [7] и др. Интерес к этим уравнениям связан с их важными приложениями: к теории многослойных пластин и оболочек [17–19], к нелинейной оптике [10], к теории многомерных диффузионных процессов [19], к теории нелокальных эллиптических задач [2, 10, 13, 14, 19], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [10, 16, 20] и др.

Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [8, 10, 19], см. также имеющуюся там библиографию. В работе [19] была доказана эквивалентность задачи Дирихле для эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптического дифференциального уравнения с нелокальными условиями на сдвигах границы. Нелинейные эллиптические функционально-дифференциальные уравнения и их применение к исследованию нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными условиями рассматривались в работах [12, 21].

Смешанные краевые задачи для сильно эллиптических систем дифференциально-разностных уравнений, описывающие упругие деформации трехслойной пластины с гофрированным заполнителем, рассматривались в [18].

Систематическое исследование широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений методами спектральной теории содержится в работах [3–5].

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» и гранта РФФИ № 17-01-00401.

В настоящей работе исследуется краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндрической области. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости такой задачи и о гладкости ее обобщенных решений. Эти результаты применяются для доказательства однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для уравнения Пуассона. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений такой задачи. В свою очередь, эти результаты применяются к исследованию гладкости обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений, которые не обязательно являются сильно эллиптическими.

1. Свойства разностных операторов

Приведем вспомогательные результаты о свойствах разностных операторов в цилиндре, доказательства см. в [19, §8, гл. II].

1.1. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вида

$$Ru(x) = \sum_{j=-k}^{k} a_j u(x_1 + j, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$.

Пусть $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$).

Заметим, что оператор R нелокальный: сдвиги по первой переменной могут отображать точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$ в точки $(x_1 + j, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus Q$.

Поэтому естественно ввести ограниченный разностный оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем вне Q, а $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Итак, оператор R_Q действует следующим образом на функцию $u(x)$: сначала мы продолжаем эту функцию нулем вне Q, затем применяем к полученному продолжению разностный оператор R, действующий во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и, наконец, рассматриваем сужение функции $RI_Q u(x)$ на Q.

Не ограничивая общности, будем считать, что $d = k + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$.

Очевидно, операторы R_Q, $R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограниченные, причем

$$R_Q^* = P_Q R^* I_Q, \quad R^* u(x) = \sum_{j=-k}^{k} \overline{a}_{-j} u(x_1 + j, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.2}$$

1.2. Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}\Big)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}$, где $N = N(s)$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$; $N(s) = k + 1$ при $s = 1$; $N(s) = k$ при $s = 2$;

$$Q_{1l} = (l - 1, l - 1 + \theta) \times G \quad (l = 1, \ldots, k + 1),$$
$$Q_{2l} = (l - 1 + \theta, l) \times G \quad (l = 1, \ldots, k).$$

Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\Big)$.

Очевидно,

$$L_2(Q) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{s=1,2} L_2\left(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\right), & \text{если} \quad \theta < 1, \\ L_2\left(\bigcup\limits_{l} Q_{1l}\right), & \text{если} \quad \theta = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Множество подобластей $\{Q_{sl}\}$ обозначим через $\mathscr{R}$ и назовем *разбиением* области Q.

Очевидно следующее утверждение:

Лемма 1.1. $L_2(\bigcup\limits_l Q_{sl})$ — *инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x_1 + l - 1, x_2, \dots, x_n), \quad l = 1, \dots, N, \quad x \in Q_{s1}, \tag{1.4}$$

где

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1}).$$

Введем матрицы R_1 порядка $(k+1) \times (k+1)$ с элементами

$$r_{ij}^1 = a_{j-i} \quad (i, j = 1, \dots, k+1) \tag{1.5}$$

и R_2 порядка $k \times k$ с элементами

$$r_{ij}^2 = a_{j-i} \quad (i, j = 1, \dots, k). \tag{1.6}$$

Матрица R_2 получается из матрицы R_1 вычеркиванием последнего столбца и последней строки. Справедлива следующая лемма (см. [19, лемма 8.6]):

Лемма 1.2. *Оператор* $R_{Qs} : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенный по формуле*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{1.7}$$

является оператором умножения на матрицу R_s. *Здесь* $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$; $s = 1$, *если* $\theta = 1$; $N(s) = k + 1$ *при* $s = 1$; $N(s) = k$ *при* $s = 2$.

Из леммы 1.2 вытекает следующий результат:

Лемма 1.3. *Если* $\theta < 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2)$; *если* $\theta = 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1)$. *Каждая точка спектра* $\sigma(R_Q)$ *имеет бесконечную кратность.*

Определение 1.1. Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ называется *невырожденным*, если $0 \notin \sigma(R_Q)$. В противном случае он называется *вырожденным*.

Определение 1.2. Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ называется *регулярным*, если $\det R_s \neq 0$ $(s = 1, 2)$.

Замечание 1.1. Если $\theta < 1$, в силу леммы 1.3 невырожденность оператора R_Q эквивалентна невырожденности матриц R_s $(s = 1, 2)$. Таким образом, в случае $\theta < 1$ регулярность оператора R_Q эквивалентна его невырожденности. Следовательно, регулярный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Если же $\theta = 1$, невырожденность оператора R_Q эквивалентна невырожденности матрицы R_1. В этом случае оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Невырожденный оператор R_Q будет регулярным, если к тому же $\det R_2 \neq 0$.

Пример 1.1. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(Ru)(x) = u(x) + u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2), \tag{1.8}$$

и пусть

$$Q = \left(0, 2\frac{1}{3}\right) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из двух классов подобластей (см. рис. 1):

$$Q_{1l} = (l - 1, l - \frac{2}{3}) \times (0, 1) \quad (l = 1, 2, 3),$$

$$Q_{2l} = (l - \frac{2}{3}, l) \times (0, 1) \quad (l = 1, 2).$$

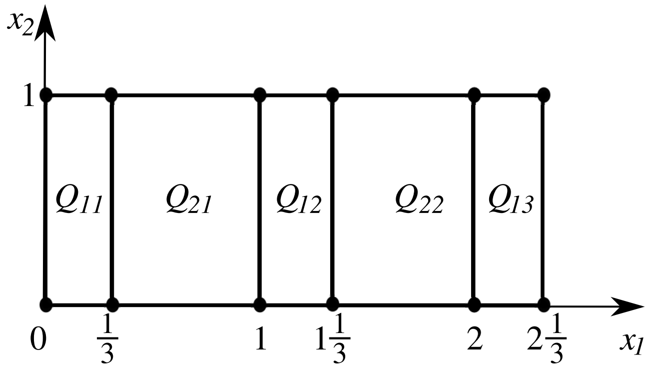

Рис. 1

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

В этом случае $\theta = \dfrac{1}{3} < 1$ и регулярность оператора R_Q эквивалентна его невырожденности. Так как

$$\det R_1 = -1, \quad \det R_2 = 0,$$

то оператор R_Q — вырожденный и нерегулярный.

Пример 1.2. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.8), и пусть $Q = (0,3) \times (0,1)$. Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_{1l} = (l-1, l) \times (0,1)$ $(l = 1,2,3)$ (см. рис. 2). Матрицы R_1 и R_2 имеют вид (1.9).

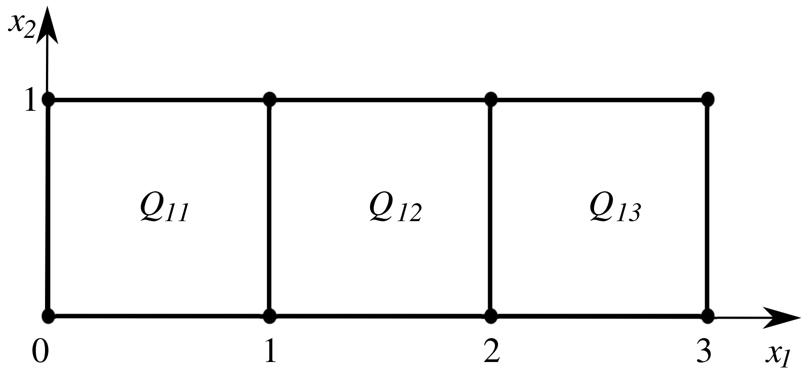

Рис. 2

В этом случае $\theta = 1$, $\det R_1 = -1$, $\det R_2 = 0$. Значит, оператор R_Q является невырожденным, однако при этом он нерегулярный.

Пример 1.3. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(Ru)(x) = u(x) + 2u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2), \tag{1.10}$$

и пусть

$$Q = (0,3) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей (см. рис. 2)

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times (0,1) \quad (l = 1,2,3).$$

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

В этом случае $\theta = 1$,

$$\det R_1 = -3, \quad \det R_2 = -1.$$

Значит, оператор R_Q является невырожденным и регулярным.

2. Свойства разностных операторов в пространствах Соболева

2.1. Введем некоторые функциональные пространства.

Через $W_2^k(Q)$ обозначим пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(Q)$ до порядка k включительно, со скалярным произведением, заданным по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q \mathscr{D}^\alpha u \cdot \overline{\mathscr{D}^\alpha v} dx,$$

где

$$\mathscr{D}^\alpha = \mathscr{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathscr{D}_n^{\alpha_n}, \quad \mathscr{D}_j = -i(\partial/\partial x_j),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_j \geqslant 0.$$

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание множества финитных в Q, бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(Q)$ в пространстве $W_2^k(Q)$.

Пусть $S \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^k. Через $W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим пространство следов функций из $W_2^k(Q)$ с нормой

$$\|\phi\|_{W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)} = \inf \|u\|_{W_2^k(Q)} \quad (u \in W_2^k(Q) : u|_S = \phi).$$

Справедлива следующая лемма (доказательство см. в [19, §8, гл. II]):

Лемма 2.1. *Для любого $u \in L_2(Q)$ такого, что $u \in W_2^k(Q'_{sl})$ ($s = 1, 2$; $l = 1, \ldots, N$ при $\theta < 1$; $s = 1; l = 1, \ldots, N$ при $\theta = 1$; $N = k + 1$ при $s = 1$; $N = k$ при $s = 2$) имеем $R_Q u \in W_2^k(Q'_{sl})$ и*

$$\|R_Q u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q'_{sj})}, \tag{2.1}$$

где $Q'_{sl} \subset Q_{sl}$ и $Q'_{sl} = Q'_{s1} + (l-1, 0, \ldots, 0)$ ($l = 1, \ldots, N$).

Если, кроме того, $\det R_s \neq 0$ ($s = 1, 2$ при $\theta < 1$; $s = 1$ при $\theta = 1$), то $R_Q^{-1} u \in W_2^k(Q'_{sl})$ и

$$\|R_Q^{-1} u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q'_{sj})}. \tag{2.2}$$

Здесь постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от s и u.

Обозначим через $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ в $W_2^1(Q)$, при этом*

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j} \tag{2.4}$$

для любых $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Тогда, поскольку $R_Q u_{x_j} \in L_2(Q)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, достаточно показать, что для любого $v \in C_0^\infty(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = -\int\limits_Q R_Q u_{x_j} \overline{v} dx. \tag{2.5}$$

Действительно, из (2.5) будет следовать, что существует обобщенная производная $(R_Q u)_{x_j} \in L_2(Q)$ и

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j}.$$

Также из равенства (2.4) и ограниченности оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будет следовать ограниченность оператора $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_2(Q)$.

Покажем справедливость тождества (2.5).

2. Пусть $\theta < 1$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\phi_i^+ &= u|_{x_1=i+0} && (i = 0, \ldots, k),\\
\phi_{i,\theta}^- &= u|_{x_1=i+\theta-1-0} && (i = 1, \ldots, k+1),\\
\phi_i^- &= u|_{x_1=i-0} && (i = 1, \ldots, k),\\
\phi_{i,\theta}^+ &= u|_{x_1=i+\theta-1+0} && (i = 1, \ldots, k).
\end{aligned}$$

По условию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Следовательно,

$$\phi_0^+ = 0, \tag{2.6}$$

$$\phi_j^+ = \phi_j^- \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{2.7}$$

$$\phi_{k+1,\theta}^- = 0, \tag{2.8}$$

$$\phi_{j,\theta}^+ = \phi_{j,\theta}^- \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{2.9}$$

В силу леммы 2.1 $R_Q u \in W_2^1(Q_{sl})$ $(s = 1, 2;\ l = 1, \ldots, k+1$, если $s = 1; l = 1, \ldots, k$, если $s = 2)$. Обозначим

$$v_i = v|_{x_1=i} \quad (i = 0, \ldots, k),$$
$$v_{i,\theta} = v|_{x_1=i-1+\theta} \quad (i = 1, \ldots, k+1).$$

Так как $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, то

$$v_0 = v_{k+1,\theta} = 0. \tag{2.10}$$

В силу леммы 1.1 $P_s R_Q = R_Q P_s$. Отсюда, а также из равенств (1.4)–(1.7), $v|_{\partial Q} = 0$ и формулы интегрирования по частям для подобластей Q_{sl} получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx &= \sum_s \sum_l \int\limits_{Q_{sl}} R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (U_s P_s R_Q u, U_s P_s v_{x_j}) dx = \\
&= \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u, U_s P_s v_{x_j}) dx = -\sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u_{x_j}, U_s P_s v) dx + \int\limits_G A(u,v) dx',
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$, $N = k+1$ при $s = 1$, $N = k$ при $s = 2$,

$$A(u,v) = -\sum_{i,l=0}^{k} a_{l-i} \phi_l^+ \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} \phi_l^- \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k+1} a_{l-i} \phi_{l,\theta}^- \overline{v}_{i,\theta} - \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} \phi_{l,\theta}^+ \overline{v}_{i,\theta}.$$

В силу равенств (2.6), (2.8) и (2.10) имеем

$$A(u,v) = \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_l^- - \phi_l^+) \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_{l,\theta}^- - \phi_{l,\theta}^+) \overline{v}_{i,\theta}.$$

Отсюда и из равенств (2.7) и (2.9) получим

$$A = 0. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12), используя равенства (1.4)–(1.7) и перестановочность операторов R_Q и P_s, выводим тождество

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = -\int\limits_Q R_Q u_{x_j} \cdot \overline{v} dx.$$

Таким образом, мы доказали интегральное тождество (2.5) в случае $\theta < 1$.

3. Пусть теперь $\theta = 1$. Обозначим

$$\phi_i^+ = u|_{x_1 = i+0} \quad (i = 0, \dots, k),$$

$$\phi_i^- = u|_{x_1 = i-0} \quad (i = 1, \dots, k+1).$$

По условию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Следовательно,

$$\phi_0^+ = \phi_{k+1}^- = 0, \tag{2.13}$$

$$\phi_j^+ = \phi_j^- \quad (j = 1, \dots, k). \tag{2.14}$$

Из равенств (1.4)–(1.7), а также формулы интегрирования по частям для подобластей Q_{1l} получим

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \sum_{l=1}^{k+1} \int\limits_{Q_{1l}} R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \int\limits_{Q_{11}} (U_1 R_Q u, U_1 v_{x_j}) dx =$$
$$= \int\limits_{Q_{11}} (R_1 U_1 u, U_1 v_{x_j}) dx = -\int\limits_{Q_{11}} (R_1 U_1 u_{x_j}, U_1 v) dx + \int\limits_G B(u,v) dx', \tag{2.15}$$

где

$$B(u,v) = -\sum_{i,l=0}^{k} a_{l-i} \phi_l^+ \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k+1} a_{l-i} \phi_l^- \overline{v}_i, \quad v_i = v|_{x_1 = i} \quad (i = 0, \dots, k+1).$$

Так как $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, то $v_0 = v_{k+1} = 0$. Отсюда и из (2.13), (2.14) следует, что

$$B(u,v) = \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_l^- - \phi_l^+) \overline{v}_i = 0. \tag{2.16}$$

Вновь используя равенства (1.4)–(1.7), из (2.15), (2.16) получим (2.5). □

2.2. Далее мы докажем, что регулярный разностный оператор R_Q осуществляет изоморфизм между пространством $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ и подпространством функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Этот результат устанавливает связь между смешанной задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением со смешанными нелокальными условиями.

Введем матрицы R_1^1 (R_1^2) порядка $(k+1) \times k$, полученные из R_1 вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно. Обозначим через e_i и g_i $(i = 1, \dots, k+1)$ строки матриц R_1^1 и R_1^2 соответственно. В силу формул (1.5), (1.6) матрица порядка $k \times k$, полученная из R_1^1 вычеркиванием первой строки, совпадает с матрицей R_2.

Замечание 2.1. Пусть оператор R_Q регулярный. Тогда $\det R_2 \neq 0$. Следовательно, существуют такие коэффициенты γ_i^+, γ_i^- $(i = 1, \dots, k)$, что

$$e_1 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^+ e_{1+i}, \tag{2.17}$$

$$g_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^- g_{k+1-i}. \tag{2.18}$$

Обозначим через $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{cases} w|_{x_1=0} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^+ w|_{x_1=i}\,, \\ w|_{x_1=d} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^- w|_{x_1=d-i}\,, \end{cases} \tag{2.19}$$

где $\gamma = \{\gamma_i^\pm\}$,

$$\Gamma = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x' \in G\} \cup \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = d, x' \in G\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — *регулярный. Тогда* $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *изоморфизм.*

В силу леммы 2.1 доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству [9, лемма 6].

Пример 2.1. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.10), и пусть

$$Q = (0,2) \times (0,1).$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей (см. рис. 3)

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times (0,1) \quad (l = 1, 2).$$

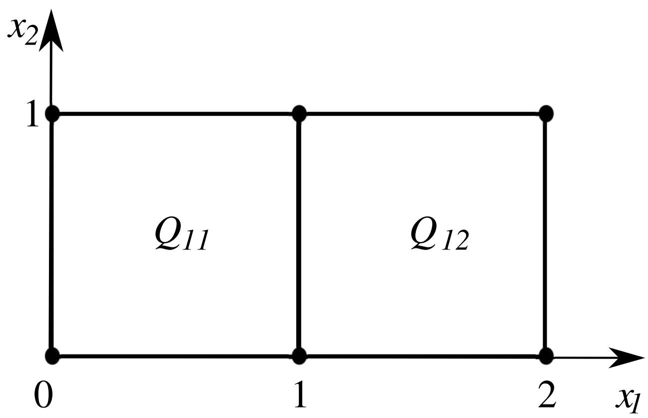

Рис. 3

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det R_1 = -1, \quad \det R_2 = 1.$$

Следовательно, оператор R_Q является регулярным. Тогда в силу теоремы 2.1 разностный оператор R_Q непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ на $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$, где

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0,1)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2, x_2 \in (0,1)\};$$

$$\gamma = \{\gamma_1^\pm\}, \quad \gamma_1^+ = 2, \quad \gamma_1^- = 1,$$

$$\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) = \{u \in W^1_2(Q) : u|_{x_1=0} = u|_{x_1=2} = 0\},$$

$W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w|_{x_1=0} = \gamma_1^+\, w|_{x_1=1}\,, \quad w|_{x_1=2} = \gamma_1^-\, w|_{x_1=1}\,.$$

2.3. При выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты регулярного оператора R_Q мы покажем, что если H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$ и $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, то подпространство $R_Q^{-1}(H_1)$ состоит из функций, имеющих нулевые следы на основаниях цилиндра Q.

Введем k-мерные векторы

$$b^1 = (a_k \dots a_1)^T, \quad b^2 = (a_{-1} \dots a_{-k})^T.$$

Теорема 2.2. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный, и пусть*

$$\begin{cases} b^1 \neq 0,\ b^2 \neq 0, \ \textit{если } \theta < 1, \\ \textit{векторы } b^1 \textit{ и } b^2 \textit{ линейно независимы, если } \theta = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Предположим также, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим случай $\theta < 1$.

1.1. Докажем, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$.

Пусть $u \in R_Q^{-1}(H_1)$. Тогда по условию теоремы $u \in W_2^1(Q)$. Следовательно, определены следы

$$\begin{aligned} \phi_i^+ &= u|_{x_1=i+0} && (i = 0, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^- &= u|_{x_1=i+\theta-1-0} && (i = 1, \dots, k+1), \\ \phi_i^- &= u|_{x_1=i-0} && (i = 1, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^+ &= u|_{x_1=i+\theta-1+0} && (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Поскольку $u \in W_2^1(Q)$, то

$$\phi_j^+ = \phi_j^-, \quad j = 1, \dots, k, \tag{2.21}$$

$$\phi_{j,\theta}^+ = \phi_{j,\theta}^-, \quad j = 1, \dots, k. \tag{2.22}$$

По предположению $u \in R_Q^{-1}(H_1)$, H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Следовательно, $w = R_Q u \in W_2^1(Q)$ и справедливы следующие равенства для следов w в подобластях Q_{sl}:

$$w|_{x_1=t+0} = w|_{x_1=t-0}, \qquad t = 1, \dots, k, \tag{2.23}$$

$$w|_{x_1=\theta+t+0} = w|_{x_1=\theta+t-0}, \quad t = 0, \dots, k-1. \tag{2.24}$$

В силу (1.1) равенство (2.23) примет вид

$$\sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t+0} = \sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t-0} \quad (x' \in G; t = 1, \dots, k). \tag{2.25}$$

Полагая $j = t + i$, получим

$$\sum_{j=t-k}^{t+k} a_{j-t}\, u(x_1, x')\big|_{x_1=j+0} = \sum_{j=t-k}^{t+k} a_{j-t}\, u(x_1, x')\big|_{x_1=j-0} \quad (x' \in G; t = 1, \dots, k). \tag{2.26}$$

Так как функция $u(x)$ вне области Q принимает нулевые значения, то равенство (2.26) равносильно следующему:

$$\sum_{j=0}^{k} a_{j-t}\phi_j^+ = \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}\phi_j^- \quad (t = 1, \dots, k). \tag{2.27}$$

Из последнего равенства, используя (2.21), получим

$$0 = a_{-t}\phi_0^+ + \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}(\phi_j^+ - \phi_j^-) = a_{-t}\phi_0^+ \quad (t = 1, \dots, k). \tag{2.28}$$

Отсюда и из (2.20) следует, что
$$\phi_0^+ = 0. \tag{2.29}$$
Аналогично, используя равенства (2.24), получим
$$\phi_{k+1,\theta}^- = 0. \tag{2.30}$$
Таким образом, $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$.

1.2. Теперь покажем, что $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Пусть $u \in H_1$. В силу вышедоказанного вложения $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$, для функции $w = R_Q^{-1}u$ справедливо $w \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$. В силу теоремы 2.1, $u = R_Q w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

2. Пусть теперь $\theta = 1$.

2.1. Докажем, что
$$R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q).$$
Пусть $u \in R_Q^{-1}(H_1)$. Тогда по условию теоремы $u \in W_2^1(Q)$. Следовательно, определены следы
$$\begin{aligned} \phi_i^+ &= u|_{x_1=i+0} \quad (i = 0, \ldots, k), \\ \phi_i^- &= u|_{x_1=i-0} \quad (i = 1, \ldots, k+1). \end{aligned}$$
Поскольку $u \in W_2^1(Q)$, то
$$\phi_j^+ = \phi_j^- \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{2.31}$$
По предположению $u \in R_Q^{-1}(H_1)$, H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Следовательно, $w = R_Q u \in W_2^1(Q)$ и справедливы следующие равенства для следов w в подобластях Q_{1l} ($l = 1, \ldots, k+1$):
$$w|_{x_1=t+0} = w|_{x_1=t-0} \qquad (t = 1, \ldots, k). \tag{2.32}$$
В силу (1.1) равенство (2.32) можно записать в виде
$$\sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t+0} = \sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t-0} \qquad (x' \in G; t = 1, \ldots, k). \tag{2.33}$$
Полагая $j = t + i$ и $u(x) = 0$ ($x \notin Q$), из последнего равенства мы получим
$$\sum_{j=0}^{k} a_{j-t}\phi_j^+ = \sum_{j=1}^{k+1} a_{j-t}\phi_j^- \qquad (t = 1, \ldots, k). \tag{2.34}$$
Отсюда и из (2.31) следует, что
$$0 = a_{-t}\phi_0^+ - a_{k+1-t}\phi_{k+1}^- + \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}(\phi_j^+ - \phi_j^-) = a_{-t}\phi_0^+ - a_{k+1-t}\phi_{k+1}^- \quad (t = 1, \ldots, k). \tag{2.35}$$
По условию (2.20) векторы b^1 и b^2 линейно независимы. Поэтому
$$\phi_0^+ = \phi_{k+1}^- = 0.$$
Таким образом, $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$.

2.2. Справедливость вложения $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ доказывается аналогично части 1.1 текущего доказательства. □

Пример 2.2. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.10), и пусть
$$Q = (0, 2\frac{1}{3}) \times (0, 1).$$
Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из двух классов подобластей (см. рис. 1):
$$Q_{1l} = (l-1, l-\frac{2}{3}) \times (0,1) \quad (l = 1,2,3), \qquad Q_{2l} = (l-\frac{2}{3}, l) \times (0,1) \quad (l = 1,2).$$
Матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det R_1 = -3, \quad \det R_2 = -1,$$

оператор R_Q является регулярным. Векторы

$$b^1 = (0 \quad 2)^T, \quad b^2 = (1 \quad 0)^T$$

ненулевые. Следовательно, в силу теоремы 2.2, если $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$, то $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$. Здесь

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0,1)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2\frac{1}{3}, x_2 \in (0,1)\},$$

$\gamma = \{\gamma_i^\pm\}$ $(i = 1,2)$, коэффициенты $\gamma_i^\pm$ определяются из систем линейных алгебраических уравнений (2.17), (2.18), которые имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_1^+ + \gamma_2^+ = 2, \\ 2\gamma_1^+ + \gamma_2^+ = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1^- + \gamma_2^- = 0, \\ \gamma_1^- + 2\gamma_2^- = 1, \end{cases}$$

то есть $\gamma_1^+ = -2$, $\gamma_2^+ = 4$, $\gamma_1^- = -1, \gamma_2^- = 1$.

Таким образом,

$$\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\frac{2}{3}} = 0\},$$

а $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ — подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w|_{x_1=0} = \gamma_1^+ \, w|_{x_1=1} + \gamma_2^+ \, w|_{x_1=2}\,,$$
$$w|_{x_1=2\frac{1}{3}} = \gamma_1^- \, w|_{x_1=1\frac{1}{3}} + \gamma_2^- \, w|_{x_1=\frac{1}{3}}\,.$$

Замечание 2.2. Теорема 2.2 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q, удовлетворяющего условиям (2.20), наличие «минимальной гладкости» функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на основаниях цилиндра, а функции из H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям.

Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (3.1) естественно задавать однородные условия Дирихле на основаниях цилиндра и краевые условия второго рода на боковой поверхности цилиндра (см. раздел 3). Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений (см. раздел 4).

Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями второго рода на сдвигах множества Γ, порожденных разностным оператором, приводит к переопределенным задачам.

3. Разрешимость смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

3.1. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\Delta R_Q u(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{3.1}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0, \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q_{sl} \cap ((0,d)\times\partial G)} = 0 \tag{3.3}$$

где $s = 1, 2$, $l = 1, \dots, N(s)$, если $\theta < 1$; $s = 1$, $l = 1, \dots, N(1)$, если $\theta = 1$; $N(1) = k + 1$, $N(2) = k$; $f_0 \in L_2(Q)$; ν — единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности $(0, d) \times \partial G$; R_Q — ограниченный разностный оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

оператор R задается по формуле (1.1).

Пусть матрица R_1, соответствующая разностному оператору R_Q, удовлетворяет условию

$$R_1 + R_1^* > 0. \tag{3.4}$$

Мы будем называть уравнение (3.1) *сильно эллиптическим*, если выполняется условие (3.4).

3.2. Рассмотрим разрешимость задачи (3.1)–(3.3).

Определение 3.1. Функция $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ называется *обобщенным решением* смешанной краевой задачи (3.1)–(3.3), если для любых $v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla(R_Q u) \nabla \overline{v} dx = \int\limits_Q f_0 \overline{v} dx. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* (3.4). *Тогда для любой функции* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ *задачи* (3.1)–(3.3), *при этом*

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{3.6}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство.

1. Введем в пространстве $L_2(Q)$ полуторалинейную форму a_R с областью определения $\mathscr{D}(a_R) = \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ по формуле

$$a_R[u, v] = (\nabla R_Q u, \nabla v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)). \tag{3.7}$$

Очевидно,

$$a_R[u, v] = p_R[u, v] + i q_R[u, v], \tag{3.8}$$

где

$$p_R[u, v] = \Big(\nabla \frac{R_Q + R_Q^*}{2} u, \nabla v\Big)_{L_2(Q)}, \tag{3.9}$$

$$q_R[u, v] = \Big(\nabla \frac{R_Q - R_Q^*}{2i} u, \nabla v\Big)_{L_2(Q)}. \tag{3.10}$$

В силу леммы 2.2

$$\nabla(R_Q u) = R_Q \nabla u, \quad \nabla(R_Q^* u) = R_Q^* \nabla u \quad \text{для всех} \quad u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q).$$

Поэтому формы $p_R[\cdot, \cdot]$ и $q_R[\cdot, \cdot]$ — симметричные.

2. Покажем, что в пространстве $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} = p_R[u, v] \quad (u, v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)). \tag{3.11}$$

Действительно, в силу ограниченности операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$ и неравенства Коши—Буняковского для любых $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ мы имеем

$$|p_R[u, u]| \leqslant k_1 \|u\|_{W_2^1(Q)}^2, \tag{3.12}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

С другой стороны, в силу формул (1.4)–(1.7) и условия (3.4) имеем

$$p_R[u,u]=\sum_i\Bigl(\frac{R_Q+R_Q^*}{2}u_{x_i},u_{x_i}\Bigr)_{L_2(Q)}=\sum_s\sum_i(R_s^H(U_sP_su)_{x_i},(U_sP_su)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})}=$$
$$=\sum_s\sum_i((\sqrt{R_s^H}U_sP_su)_{x_i},(\sqrt{R_s^H}U_sP_su)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})}\geqslant k_2\sum_i\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)},\quad (3.13)$$

где $k_2>0$ — постоянная, не зависящая от u, $R_s^H=(R_s+R_s^*)/2$.

Очевидно, в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|''_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}=\Bigl\{\sum_i\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\Bigr\}^{\frac12}.\quad (3.14)$$

В силу (3.13), (3.14) для любых $u\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$

$$p_R[u,u]\geqslant k_3\|u\|^2_{W_2^1(Q)},$$

где $k_3>0$ — постоянная, не зависящая от u.

Таким образом, в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле (3.11).

3. Используя ограниченность операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$, неравенство Коши—Буняковского и эквивалентное скалярное произведение в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, определенное по формуле (3.11), мы получим

$$|q_R[u,v]|\leqslant k_4\|u\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\|v\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)},\quad (3.15)$$

где $k_4>0$ — постоянная, не зависящая от u,v.

Из (3.15), теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и симметричности формы $q_R[\cdot,\cdot]$ в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ вытекает существование ограниченного самосопряженного оператора $S:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такого, что

$$q_R[u,v]=(Su,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\quad (u,v\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)).\quad (3.16)$$

Кроме того, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и неравенства Коши—Буняковского существует ограниченный оператор $B:L_2(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что

$$(f_0,v)_{L_2(Q)}=(Bf_0,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\quad (f_0\in L_2(Q),v\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)).\quad (3.17)$$

Из равенств (3.5), (3.7)–(3.10), (3.11), (3.16), (3.17) получим

$$(u+iSu,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}=(Bf_0,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}.\quad (3.18)$$

Поскольку v — произвольная функция в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, мы получим эквивалентное тождеству (3.18) операторное уравнение

$$(I+iS)u=Bf_0.\quad (3.19)$$

Оператор $S:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — ограниченный и самосопряженный. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $(I+iS)^{-1}:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Таким образом, для любой $f_0\in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение

$$u=(I+iS)^{-1}Bf_0$$

задачи (3.1)–(3.3), при этом имеет место оценка (3.6). □

3.3. Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

Введем множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \{\overline{Q}\cap(\partial Q+h_i)\cap\overline{[(\partial Q+h_j)\setminus(\partial Q+h_i)]}\}, \tag{3.20}$$

где $h_i=(i,0,\dots,0)$.

Очевидно, множество $\mathscr{K}$ можно представить в виде

$$\mathscr{K} = \begin{cases} \Big(\bigcup\limits_{l=1}^{k+1}\{l-1\}\times\partial G\Big)\cup\Big(\bigcup\limits_{l=1}^{k+1}\{l-1+\theta\}\times\partial G\Big), & \text{если} \quad \theta<1;\\ \bigcup\limits_{l=1}^{k+2}\{l-1\}\times\partial G, \quad \text{если} \quad \theta=1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Обозначим

$$\mathscr{K}^\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,\mathscr{K})<\varepsilon\}.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* (3.4)*, и пусть* $u\in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *— обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3)*. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *и всех* s,l ($s=1,2$, $l=1,\dots,N(s)$, *если* $\theta<1$; $s=1$, $l=1,\dots,N(1)$, *если* $\theta=1$; $N(1)=k+1$, $N(2)=k$) *имеем* $u\in W^2_2(Q_{sl}\setminus\mathscr{K}^\varepsilon)$.

Доказательство.

1. Из неравенства (3.13) следует, что дифференциально-разностный оператор $-\Delta R_Q$ удовлетворяет условиям теоремы [19, теорема 11.1, гл. II] о локальной гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в подобластях Q_{sl} и условиям теоремы [19, теорема 11.2, гл. II] о гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вблизи части границы, на которой задается краевое условие Дирихле. Следовательно, для любого $\varepsilon_0>0$ имеем $u\in W^2_2((l-1,l-1+\theta)\times G_{\varepsilon_0})$ ($l=1,\dots,k+1$) и $u\in W^2_2((l-1+\theta,l)\times G_{\varepsilon_0})$ ($l=1,\dots,k$), если $\theta<1$; $u\in W^2_2((l-1,l)\times G_{\varepsilon_0})$ ($l=1,\dots,k+1$), если $\theta=1$. Здесь $G_{\varepsilon_0}=\{x'\in G:\operatorname{dist}(x,\partial G)>\varepsilon_0\}$.

2. С другой стороны, легко видеть, что дифференциально-разностный оператор $-\Delta R_Q$ удовлетворяет условиям теоремы [11, теорема 4] о гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вблизи части границы, на которой задается краевое условие второго рода. Следовательно, для любого $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\min\{\theta,1-\theta\}/4$, имеем $u\in W^2_2((l-1+\varepsilon_0,l-1+\theta-\varepsilon_0)\times G)$ ($l=1,\dots,k+1$) и $u\in W^2_2((l-1+\theta+\varepsilon_0,l-\varepsilon_0)\times G)$ ($l=1,\dots,k$), если $\theta<1$; $u\in W^2_2((l-1+\varepsilon_0,l-\varepsilon_0)\times G)$ ($l=1,\dots,k+1$), если $\theta=1$.

Из этих утверждений, полагая $\varepsilon_0=\varepsilon/\sqrt{2}$, получим $u\in W^2_2(Q_{sl}\setminus\mathscr{K}^\varepsilon)$. □

3.4. Рассмотрим следствия из теоремы 3.2, которые объясняют, в каком смысле обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) удовлетворяет уравнению (3.1) и краевому условию (3.3).

Следствие 3.1. *Пусть выполняется условие* (3.4)*. Тогда обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3) $u\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *почти всюду в* Q_{sl} ($s=1,2$, $l=1,\dots,N(s)$, *если* $\theta<1$; $s=1$, $l=1,\dots,N(1)$, *если* $\theta=1$; $N(1)=k+1$, $N(2)=k$).

Доказательство. В силу теоремы 3.2 и леммы 2.1 $R_Q u_{x_j}\in W^1_2(Q_{sl}\setminus\mathscr{K}^\varepsilon)$ для любых s,l и $\varepsilon>0$. Выберем произвольным образом $s=s_0$ и $l=l_0$. Тогда для любой функции $v\in C_0^\infty(Q_{s_0l_0})$, интегрируя по частям в тождестве (3.5), получим

$$-\int\limits_{Q_{s_0l_0}}\Delta R_Q u\cdot\overline{v}dx=\int\limits_{Q_{s_0l_0}}f_0\overline{v}dx. \tag{3.22}$$

В силу произвольности функции v, мы убеждаемся, что уравнение (3.1) удовлетворяется почти всюду в $Q_{s_0l_0}$. □

Следствие 3.2. *Пусть выполняется условие* (3.4), *и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* s, l *определен след функции* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ *на поверхности* $(\partial Q_{sl} \cap ((0,d) \times \partial G)) \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$, *при этом краевое условие второго рода* (3.3) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

Доказательство. Выберем произвольным образом s и l. По теореме 3.2 мы можем проинтегрировать по частям левую часть тождества (3.5) для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q_{sl}} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$. В силу теоремы 3.2 и леммы 2.1 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W^1_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и определен след функции $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ на поверхности

$$M^{sl}_\varepsilon = (\partial Q_{sl} \cap ((0,d) \times \partial G)) \setminus \mathscr{K}^\varepsilon.$$

Проинтегрировав левую часть тождества (3.5) по частям, в силу следствия 3.1 и равенства $v|_{x_1=0} = v|_{x_1=d} = 0$ имеем

$$\int\limits_{M^{sl}_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} (R_Q u)_{x_i}|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) \cdot \overline{v}|_{M^{sl}_\varepsilon} \, dS_x = 0. \tag{3.23}$$

В силу произвольности функции v мы видим, что почти всюду на M^{sl}_ε выполняется следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} (R_Q u)_{x_i}|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) = 0. \tag{3.24}$$

В силу леммы 2.2 равенство (3.24) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (R_Q u_{x_i})|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) = 0. \tag{3.25}$$

Обозначим через

$$\phi_l(x) = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{M^{sl}_\varepsilon}$$

след нормальной производной функции $u(x)$ на границе M^{sl}_ε.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай $\theta = 1$.

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times G \quad (l = 1, \ldots, k+1).$$

В силу (1.1), для области Q_{1l} $(l = 1, \ldots, k+1)$ условие (3.25) примет вид

$$\sum_{j=-k}^{k} a_j \phi_l(x_1 + j, x') = 0 \quad (l - 1 + \varepsilon < x_1 < l - \varepsilon, x' \in \partial G), \tag{3.26}$$

что равносильно

$$\sum_{j=-k}^{k} a_j \phi_l(x_1 + j + l - 1, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.27}$$

Полагая $t = j + l - 1$, получим:

$$\sum_{t=-k+l-1}^{k+l-1} a_{t-l+1} \phi_l(x_1 + t, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.28}$$

Так как функция $u(x)$ вне области Q принимает нулевые значения, то равенство (3.28) равносильно следующему:

$$\sum_{t=0}^{k} a_{t-l+1} \phi_l(x_1 + t, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.29}$$

Объединяя равенства (3.29) для всех $l = 1, \dots, k+1$, получим:

$$R_1 \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x') \\ \phi_2(x_1 + 1.x') \\ \dots \\ \phi_{k+1}(x_1 + k, x') \end{pmatrix} = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in G). \tag{3.30}$$

В силу (3.4) матрица R_1 невырождена. Следовательно, $\phi_l(x) = 0$ почти всюду на M_ε^{sl} для всех $l = 1, \dots, k+1$, что и требовалось доказать.

□

4. Разрешимость нелокальной смешанной задачи для эллиптических дифференциальных уравнений

4.1. Рассмотрим приложения результатов раздела 3 о разрешимости смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения к вопросу о разрешимости нелокальной смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{4.1}$$

с нелокальными смешанными краевыми условиями

$$w\big|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^+ w\big|_{x_1=i}, \quad w\big|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^- w\big|_{x_1=d-i}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{(0,d)\times\partial G} = 0. \tag{4.3}$$

Здесь $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$; ν — единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности $(0, d) \times \partial G$, $\gamma_i^\pm$ $(i = 1, \dots, n)$ — комплексные числа.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \textit{Для заданных чисел } \gamma_i^\pm \in \mathbb{C} \ (i = 1, \dots, n) \textit{ существуют числа } a_j \\ (j = 0, \pm1, \dots, \pm k) \textit{ такие, что выполняются равенства } (2.17), (2.18), \\ \textit{при этом матрица } R_1 \textit{ вида } (1.5) \textit{ удовлетворяет условию } (3.4). \end{cases} \tag{4.4}$$

Напомним, что через $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ мы обозначили подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (2.19).

Определение 4.1. Функция $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ называется *обобщенным решением* нелокальной смешанной краевой задачи (4.1)–(4.3), если для любых $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \nabla w \nabla \overline{v} dx = \int_Q f_0 \overline{v} dx. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* (4.4). *Тогда для любой* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3), *при этом*

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_1 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{4.6}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство. В силу условий (4.4) матрицы R_1 и R_2, определенные по формулам (1.5), (1.6), невырождены, то есть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Следовательно, в силу теоремы 2.1 $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — изоморфизм. Пусть

$$w = R_Q u, \quad \text{где} \quad u = R_Q^{-1} w \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q).$$

Тогда интегральное тождество (4.5) примет вид

$$\int\limits_Q \nabla(R_Q u)\nabla\overline{v}dx = \int\limits_Q f_0\overline{v}dx. \tag{4.7}$$

Следовательно, функция $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ является обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3). В силу теоремы 3.1 существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ задачи (3.1)–(3.3), при этом выполняется априорная оценка (3.6). Значит, существует единственное обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3)

$$w = R_Q u \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q),$$

при этом в силу леммы 2.2 и неравенства (3.6) имеем

$$\|w\|_{W^1_2(Q)} = \|R_Q u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant k_1\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant k_1 c_0\|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{4.8}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

Таким образом, доказано неравенство (4.6). □

4.2. Рассмотрим теперь теорему о гладкости обобщенных решений задачи (4.1)–(4.3) и ее применение к исследованию гладкости обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 4.2. *Пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *имеем* $w \in W^2_2(Q \setminus K^\varepsilon)$, *где*

$$K = (\{0\} \times \partial G) \cup (\{d\} \times \partial G),$$

$$K^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\}.$$

Доказательство. В силу теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач вблизи гладкого куска границы имеем $w \in W^2_2((\delta, d-\delta) \times G)$ для любого $\delta > 0$ такого, что $\delta < \dfrac{\theta}{4}$ (см. [6, теорема 10.1, §10, гл. III]). Отсюда и из краевых условий (4.2) следует, что

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=d} \in W^{3/2}_2(G).$$

Применяя теорему о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач с неоднородными краевыми условиями вблизи плоского куска границы, получим $w \in W^2_2((0,d) \times G_\delta)$. Полагая $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$, имеем $w \in W^2_2(Q \setminus K^\varepsilon)$. □

4.3. Аналогично доказательству следствий 3.1, 3.2 можно доказать следующие утверждения, вытекающие из теоремы 4.2.

Следствие 4.1. *Пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда* $w(x)$ *удовлетворяет уравнению* (4.1) *почти всюду в* Q.

Следствие 4.2. *Пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *определен след функции* $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ *на поверхности* $(\varepsilon, d-\varepsilon) \times \partial G$, *при этом краевое условие* (4.3) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

4.4. Кроме того, из теоремы 4.2 легко получить обобщение теоремы 3.2 о гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, предполагая, что оператор R_Q регулярный.

Теорема 4.3. *Пусть оператор* R_Q — *регулярный. Предположим, что* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* s, l ($s = 1, 2$, $l = 1, \dots, N(s)$, *если* $\theta < 1$; $s = 1, l = 1, \dots, N(1)$, *если* $\theta = 1$; $N(1) = k+1$, $N(2) = k$) *имеем* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть оператор R_Q — регулярный. Пусть, кроме того, $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3). Тогда в силу теоремы 2.1

$$w = R_Q u \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q),$$

при этом, используя тождество (2.4), мы убеждаемся, что w — обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3). Поэтому согласно теореме 4.2 мы имеем $w = R_Q u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех s, l. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
7. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
8. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
9. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
10. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
11. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
12. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 417–428.
13. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
14. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
15. *Hartman F., Stampacchia G.* On some non-linear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–230.
16. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
17. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 192–207.
18. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — С. 491–500.
19. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem// Math. Nachr. — 2018. — *291*. — С. 2660–2692.
21. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional-differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — *9*. — С. 847–868.

В. В. Лийко
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `vikalijko@gmail.com`

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `skub@lector.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654 UDC 517.929

Strongly Elliptic Differential-Difference Equations with Mixed Boundary Conditions in a Cylindric Domain

© 2019 **V. V. Liiko, A. L. Skubachevskii**

Abstract. We consider strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindrical domain. We establish the connection between such problems and nonlocal mixed problems for strongly elliptic differential equations, and prove the uniqueness of solutions.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, “Ob indekse i normal’noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse” [On the index and normal solvability of general elliptic boundary-value problem with a finite group of shifts on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, “Issledovanie vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra” [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending of a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami” [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
6. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
7. V. S. Rabinovich, “O razreshimosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve” [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, “O spektre nekotorykh nelokal’nykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
12. O. V. Solonukha, “Ob odnoy nelineynoy nelokal’noy zadache ellipticheskogo tipa” [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 417–428 (in Russian).
13. F. Browder, “Non-local elliptic boundary value problems,” *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
14. T. Carleman, “Sur la théorie des équations intégrales et ses applications,” *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
15. F. Hartman and G. Stampacchia, “On some non-linear elliptic differential-functional equations,” *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–230.

16. T. Kato, “Fractional powers of dissipative operators,” *J. Math. Soc. Jpn.*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
17. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
18. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
19. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
20. A. L. Skubachevskii, “Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem,” *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.
21. O. V. Solonukha, “On nonlinear and quasilinear elliptic functional-differential equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, 847–868.

V. V. Liiko
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: vikalijko@gmail.com

A. L. Skubachevskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: skub@lector.ru