УДК 517.925.51

Алгебраические методы приводимости регулярно возмущённых модельных линейных периодических систем ОДУ

Нгуен Вьет Хоа

Кафедра высшей математики
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Доказаны теоремы об асимптотической приводимости регулярно возмущённых линейных модельных систем ОДУ с периодической матрицей, в том числе и при наличии кратного спектра и жордановой структуры предельной матрицы. Полученный результат является асимптотическим аналогом теоремы Флоке–Ляпунова о приводимости

Ключевые слова: асимптотическая приводимость, системы ОДУ с периодической матрицей, метод расщепления, устойчивость.

1. Введение

Рассмотрены теоремы об асимптотической приводимости линейных систем с периодической матрицей при наличии регулярного возмущения. Рассмотрен важный случай, когда предельная ($\varepsilon = 0$) матрица имеет кратный спектр. Полученные системы с почти постоянной матрицей более удобны для анализа устойчивости тривиального решения исходной системы.

2. О почти приводимости линейных систем ОДУ с периодической матрицей простой структуры при наличии малых возмущений

Исследование линейных систем с периодической матрицей, как известно [1–4], является нетривиальной задачей. Наиболее известная теорема Флоке–Ляпунова [1–4] о приводимости таких систем с периодической матрицей:

$$\dot{x} = A(t)\, x; \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

с помощью периодической замены $x = P(t)\, y$ к системе с постоянное матрицей $\dot{y} = Cy$ не является конструктивной.

Мы рассмотрим случай, когда в системе (1) T-периодическая матрица $A(t)$ представима в виде:

$$A(t) = A_0 + \varepsilon A_1(t); \quad A_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T A(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

где постоянная матрица A_0, равная среднему значению матрицы $A(t)$, может иметь и жорданову структуру, а T-периодическая матрица $A_1(t)$ имеет нулевое среднее значение, ε — малый параметр.

Рассмотрим более общую задачу.

Теорема 1. *Неавтономная система*

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)\, x; \quad x(0,\varepsilon) = x_0; \quad \left(A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, \varepsilon^k; \quad t \geqslant 0 \right), \tag{3}$$

где постоянная матрица A_0 имеет простой спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$, удовлетворяющий условиям:

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i2\pi q T^{-1}; \quad \left(j \neq k;\ \ j,k = \overline{1,n};\ \ q = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right), \tag{4}$$

а матричный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\,(t)\,\varepsilon^k$ *из T-периодических непрерывных матриц* $A_k\,(t)$ *сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме при* $|\varepsilon| \ll 1$ *и* $t \geqslant 0$, *может быть с помощью невырожденной при достаточно малых* ε $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$ *T-периодической замены:*

$$x = S_0 H_{(N)}\,(t,\varepsilon)\,z;$$
$$\left(H_{(N)}\,(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k\,(t)\,\varepsilon^k; \quad S_0^{-1} A_0 S_0 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{01}, ..., \lambda_{0n}\}\right), \tag{5}$$

приведена к системе с почти диагональной постоянной матрицей вида:

$$\dot{z} = Q\,(t,\varepsilon)\,z; \quad z\,(0,\varepsilon) = z_0; \quad \left(Q\,(t,\varepsilon) = \Lambda_{(N)}\,(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1} G\,(t,\varepsilon)\right), \tag{6}$$

$$\left(\Lambda_{(N)}\,(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k \varepsilon^k = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1\,(\varepsilon)\,, ..., \lambda_n\,(\varepsilon)\}\,; \quad \|G\,(t,\varepsilon)\| \leqslant C; \quad t \geqslant 0\right),$$

где постоянные диагональные матрицы Λ_k *и T-периодические матрицы* $H_k\,(t)$ *однозначно определяются с помощью простого итерационного алгоритма [5, 6].*

Доказательство. В условиях теоремы 1 всегда существует [7] невырожденная замена $x = S_0 y$, приводящая систему (3) к более простому виду:

$$\dot{y} = B\,(t,\varepsilon)\,y; \quad y\,(0,\varepsilon) = y_0; \quad \left(B\,(t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,(t)\,\varepsilon^k\right). \tag{7}$$

Последующее, невырожденное при достаточно малых ε $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$ преобразование $y = H_{(N)}\,(t,\varepsilon)\,z$, приводит к нужному результату (6), если матрицы $B\,(t,\varepsilon)$, $H_{(N)}\,(t,\varepsilon)$ и $Q\,(t,\varepsilon)$ связаны дифференциальным уравнением:

$$\dot{H}_{(N)} = B\,(t,\varepsilon)\,H_{(N)}\,(t,\varepsilon) - H_{(N)}\,(t,\varepsilon)\,Q\,(t,\varepsilon)\,. \tag{8}$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим однотипные дифференциальные матричные уравнения для последовательного и однозначного определения всех матриц Λ_k и $H_k\,(t)$:

$$\dot{H}_k = P_k\,(t) - \Lambda_k + \Lambda_0 H_k\,(t) - H_k\,(t)\,\Lambda_0; \tag{9}$$

$$\left(P_1\,(t) = B_1\,(t)\,; \quad P_k\,(t) = B_k\,(t) + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j\,(t)\,H_{k-j}\,(t) - H_{k-j}\,(t)\,\Lambda_j); \quad k = \overline{2,N}\right).$$

Для удобства изложения для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n$ введём специальные обозначения для её диагональной $\overline{A} = \mathrm{diag}\,\{a_{11}, ..., a_{nn}\}$ и «бездиагональной» $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$ частей.

Матричное дифференциальное уравнении (9) распадается на «диагональную» часть:

$$\dot{\overline{H}} = \overline{P}_k\,(t) - \Lambda_k, \tag{10}$$

и «бездиагональную» части:

$$\dot{\overline{\overline{H}}}_k = \Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k(t) - \overline{\overline{H}}_k(t)\Lambda_0 + \overline{\overline{P}}_k(t)\,; \; \overline{\overline{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}\,; \; \overline{\overline{P}}_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}\,, \quad (11)$$

При этом каждое из уравнений (10) имеет в классе Т-периодических функций единственное решение, определяемое формулой:

$$\overline{H}_k(t) = \int_0^T \left(\overline{P}_k(s) - \Lambda_k\right) \mathrm{d}s,$$

если $\Lambda_k = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{P}_k(t)\,\mathrm{d}t; \quad \left(k = \overline{1, N}\right)$.

Причём матричное уравнение (11) распадается на $\left(n^2 - n\right)$ скалярных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{h}_{ijk}(t) = \sigma_{ij} h_{ijk} + p_{ijk}(t)\,; \quad \left(i \neq j; \quad i, j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, N}\right), \qquad (12)$$

имеющих в условиях теоремы 1 единственное Т-периодическое решение (см. [2, с. 361]) вида:

$$h_{ijk}(t) = e^{\sigma_{ij}(t+T)}\left(1 - e^{\sigma_{ij}T}\right)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ij}s} p_{ijk}(s)\mathrm{d}s. \qquad (13)$$

Оценка $\|G(t, \varepsilon)\| \leqslant C \quad (t \geqslant 0)$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 1 доказана. □

Для удобства дальнейшего изложения (следуя методу расщепления [6]) введём для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n = \{A_{jk}\}_1^p$ (при её разбиении на «блоки» A_{jk}) специальные обозначения для её «блочно диагональной» $\widehat{A} = \mathrm{diag}\,\{A_{11}, ..., A_{pp}\}$ и «блочно бездиагональной» $\widehat{\widehat{A}} = A - \widehat{A}$ частей $(2 \leqslant p < n)$.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 матрица* A_0 *имеет полупростую структуру (т.е* $\Lambda_0 = S_0^{-1}A_0S_0 = \mathrm{diag}\,\{\Lambda_{01}, ..., \Lambda_{0p}\}\,;\ \Lambda_{0j} = \lambda_{0j}E_j; \ \ j = \overline{1, p}$ *), где её собственные значения* $\{\lambda_{0j}\}_1^p$ *, каждое с кратностью* p_j*,* $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} p_j = n\right)$ *удовлетворяют условиям вида* (4)*:*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i2\pi qT^{-1}; \quad \left(j \neq k; \ \ j, k = \overline{1, p}; \ \ q = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right). \qquad (14)$$

Тогда система (3) *может быть с помощью невырожденной Т-периодической замены вида* (5) *приведена к системе вида* (6)*, где*

$$Q(t, \varepsilon) = \widehat{F}_{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1} G(t, \varepsilon)\,;$$
$$\left(\widehat{F}_{(N)}(\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{N} \widehat{F}_k \varepsilon^k; \quad \|G(t, \varepsilon)\| \leqslant C\right). \qquad (15)$$

Здесь постоянные блочно-диагональные матрицы $\widehat{F}_k$ *и Т-периодические матрицы* $H_k(t)$*,* $\left(k = \overline{1, N}\right)$ *однозначно определяются с помощью конечного итерационного алгоритма, изложенного в теореме 1.*

Доказательство. После невырожденной замены $x = S_0 y$ получаем систему вида (7), где матрица $\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\Lambda_{01}, ..., \Lambda_{0p}\}$; $\left(\Lambda_{0j} = \lambda_{0j}E; j = \overline{1,p}\right)$ имеет собственные значения $\{\lambda_{0j}\}_1^p$ с указанной выше кратностью. После невырожденного при достаточно малых ε $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$ T-периодического преобразования вида:

$$y = H_{(N)}(t,\varepsilon)\, z; \quad \left(H_{(N)}(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\,\varepsilon^k\right)$$

получим систему вида (6), где $Q(t,\varepsilon)$ определена в (15), если имеет место соотношение вида (8).

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим однотипные дифференциальные матричные уравнения вида:

$$\dot{H}_k = P_k(t) - \widehat{F}_k + \Lambda_0 H_k(t) - H_k(t)\,\Lambda_0; \tag{16}$$

$$\left(P_1(t) = B_1(t); \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(B_j(t)\, H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\,\widehat{F}_j\right); \quad k = \overline{2,N}\right).$$

При этом $\widehat{H}_k(t) = \int\limits_0^t \left(\widehat{P}_k(s) - \widehat{F}_k\right) \mathrm{d}s$, если $\widehat{F}_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \widehat{P}_k(t)\,\mathrm{d}t$; $\left(k = \overline{1,N}\right)$, и каждое уравнение $\dot{\widehat{\widehat{H}}}_k = \Lambda_0 \widehat{\widehat{H}}_k(t) - \widehat{\widehat{H}}_k(t)\,\Lambda_0 + \widehat{\widehat{P}}_k(t)$; $\left(k = \overline{1,N}\right)$ распадается на $\left(p^2 - p\right)$ матричных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{H}_{ijk} = \sigma_{ij} H_{ijk} + P_{ijk}(t); \quad \left(i \neq j; \quad i,j = \overline{1,p}; \quad k = \overline{1,N}\right)$$

и далее на соответствующие дифференциальные скалярные уравнение вида (индексы опущены) $h = \sigma h + p(t)$, каждое из которых имеет единственное T-периодическое решение вида (13), что и завершает доказательство теоремы 2. □

Замечание 1. Так как приведённая система вида (6) распадается (с учётом (15)) на p подсистем вида:

$$\dot{z}_j = \left(\lambda_{0j}E + \sum_{k=1}^{N} F_{jk}\varepsilon^k + 0\left(\varepsilon^{N+1}\right)\right) z_j; \quad \left(j = \overline{1,p}\right), \tag{17}$$

то дальнейшее её расщепление зависит от структуры матриц F_{j1}.

Если в системе (17) матрица F_{j1} имеет простой спектр, то она может быть методами работы [6] и теоремы 1 приведена к почти диагональному виду, позволяя судить о характере устойчивости вектора $z_j(t)$, то есть об устойчивости решения исходной системы (3) по части переменных.

3. О приводимости периодических систем при наличии у матрицы A_0 жордановой структуры

Пусть в системе

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)\, x; \quad x(0,\varepsilon) = x_0; \quad \left(A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\,\varepsilon^k\right), \tag{18}$$

матрица A_0 имеет жорданову структуру, т.е. существует невырожденная матрица S_0, такая что

$$S_0^{-1} A_0 S_0 = J_0 = \operatorname{diag}\left\{J_{01}, ..., J_{0p}\right\}; \quad (1 \leqslant p < n), \quad J_{oj} = \lambda_{0j} E + M_j \quad \left(j = \overline{1, p}\right),$$

где M_j — известные нильпотентные матрицы.

Теорема 3. *Регулярно возмущённая T-периодическая система* (16)*, у которой матрица A_0 эквивалентна жордановой матрице J_0, может быть с помощью «срезающего преобразования» [6] приведена к системе виде* (6) *с блочно-диагональной матрицей*

$$A_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}\left\{\Lambda_{01}, ..., \Lambda_{0p}\right\}; \quad \left(\Lambda_{0j} = \lambda_{0j} E; \quad j = \overline{1, p}\right),$$

где диагональные матрицы Λ_{0j} имеют ту же размерность, что и жордановы клетки J_{0j} $\left(j = \overline{1, p}\right)$.

Доказательство. Следуя методу расщепления [6] и предполагая, что уже $A_0 = J_0$, можно доказать, что срезающее преобразование:

$$x = U(\varepsilon) y; \quad (U(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{U_1(\varepsilon_1), ..., U_p(\varepsilon_p)\right\},$$
$$U_j(\varepsilon_j) = \operatorname{diag}\left\{1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, ..., \varepsilon_j^{m_j - 1}\right\}; \quad m_j = \dim J_{0j}; \quad \varepsilon_j^{m_j} = \varepsilon; \quad j = \overline{1, p})$$

приводит систему

$$\dot{x} = \left(J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k\right) x,$$

к почти «блочно-диагональной» системе (рассмотренной в теореме 2) вида:

$$\dot{y} = \left(\Lambda_0 + \sum_{k=1}^{N} B_k(t) \varepsilon_0^k + 0\left(\varepsilon_0^{N+1}\right)\right) y, \tag{19}$$

по некоторым уже дробным степеням малого параметре $\varepsilon_0 = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Для упрощения доказательства ограничимся случаем, когда:

$$J_0 = \operatorname{diag}\left\{J_{01}, J_{02}\right\}; \quad J_{01} = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & 1 \\ 0 & \lambda_{01} \end{pmatrix}; \quad J_{02} = \begin{pmatrix} \lambda_{02} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{02} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{02} \end{pmatrix}.$$

При этом $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$; $\varepsilon_2 = \sqrt[3]{\varepsilon}$; $\varepsilon_0 = \sqrt[6]{\varepsilon}$; $U(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{U_1(\varepsilon_0), U_2(\varepsilon_0)\right\}$;

$$U_1(\varepsilon_0) = \operatorname{diag}\left\{1, \varepsilon_0^3\right\}; \quad U_2(\varepsilon_0) = \operatorname{diag}\left\{1, \varepsilon_0^2, \varepsilon_0^3\right\}.$$

Далее с учётом равенств:

$$U^{-1}(\varepsilon_0) J_0 U(\varepsilon_0) = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & \varepsilon_0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{02} & \varepsilon_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{02} & \varepsilon_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{02} \end{pmatrix}$$

получаем (используя алгоритм теоремы 2) систему вида (6), где $Q(t, \varepsilon)$ определяется формулой (15), что и завершает доказательство теоремы 3. □

4. Заключение

С помощью метода расщепления [5, 6] показана возможность, в отличие от известного [1–4], приведения неавтономных систем с периодической матрицей (в том числе и при наличии кратного спектра у определяющей матрицы A_0) к системе с почти постоянной матрицей, что существенно упрощает качественный и более точный численный анализ указанных систем, включая вопросы устойчивости, позволяя исследовать большой класс конкретных прикладных задач.

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, Изд-во МГУ, 1998. — 480 с. [Demidovich B. P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. – MGU: Nauka, 1998.- 480 pages. MGU, 1998, 480 p.]
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений ОДУ. — М.: МИР, 1998. — 464 с. [Vazov V. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations (ODE). — Math. world, 1998. — 464 p.]
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с. [Jacubovich. V. A., Starjinskii. V. M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications. — M.: Nauka, 1972]
4. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с. [Rozo M. Nonlinear oscillations and stability theory. – M.: Nauka, 1971]
5. *Коняев Ю. А.* О некоторых методах исследования устойчивости // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 65–82. [Konyaev Yu. A. Some Methods for Studying Stability // Mathematics Collection.— 2001. — T. 192, No 3. — P. 65–82]
6. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Математический сборник. — 1993. — Т. 184, № 12. — С. 133–144. [Konyaev Yu. A. A Method for the Study of Some Problems in Perturbation Theory // Mathematics Collection. — 1993. — T. 184, No 12. — P. 133–144]
7. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974. — 336 с. [Voevodin V. V. Linear algebra. — M.: Nauka, 1974. — 336 p.]

UDC 517.925.51

Algebraic Methods for Reducibility of Regularly Perturbed Model Linear Periodic Systems of ODE

Nguyen Viet Khoa

Department of Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Theorems of asymptotic reducibility of regularly perturbed linear model systems of ODE with a periodic matrix, including cases with multiple spectrum and the Jordan structure of the limiting matrix. The obtained result is an asymptotic analogue of Floque–Lyapunov theorem on the reducibility.

Key words and phrases: asymptotic reducibility, systems of ODE with a periodic matrix, splitting method, stability.