Теоретическая механика

УДК 531.31:62-56

Управление процессом приведения механических систем за конечное время в неголономное программное многообразие в условиях неопределённости

И. А. Мухаметзянов

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
улица Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

Строится алгоритм управления процессом приведения за конечное время в неголономное программное многообразие фазового состояния механических систем любой конфигурации при произвольно действующих на них неуправляющих активных сил и ограниченных возмущений.

Ключевые слова: управление, неголономное многообразие, программное движение, алгоритм управления, конечное время.

1. Постановка задачи

Рассматривается механическая система, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q', \tag{1}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\dot q^T A(q,t)\dot q + \dot q^T b(q,t) + T_0(q,t). \tag{2}$$

Здесь q, $\dot q \in \mathbb{R}^n$ — векторы обобщённых координат и скоростей, Q — вектор управляющих обобщённых сил, Q' — вектор неуправляющих активных сил, в том числе случайных возмущений, ограниченных по величине, удовлетворяющих условию Липшица. Матрица кинетической энергии A положительно определена:

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\dot q^T A(q,t)\dot q \leqslant \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2, \quad \lambda_\nu = \mathrm{const} > 0, \quad \nu = 1, 2, \tag{3}$$

а её элементы $a_{ik}(q,t)$ — гладкие.

Пусть программное многообразие системы задано в виде, образованном неголономными программными связями:

$$\tilde A(q,t)\dot q + a(q,t) = 0, \tag{4}$$

где $\tilde A(q,t)$ — матрица $(k \times n)$ с гладкими элементами, удовлетворяющая условию $\det \left\| \tilde A \tilde A^T \right\| \neq 0$.

Задача заключается в построении выражения Q, обеспечивающего приведение за конечное время фазового состояния системы (1) на многообразие (4) при любых начальных условиях q_0, $\dot q_0$, t_0, независимо от конкретного вида $A(q,t)$, $b(q,t)$, $T_0(q,t)$, Q', используя лишь информацию об отклонениях от многообразия (4), выражаемую через q и $\dot q$.

Статья поступила в редакцию 7 февраля 2012 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00381-а.

Заметим, что эту задачу можно решить по принципу декомпозиции [1], но при размерности управляющего вектора, равной числу степеней свободы системы. Здесь предлагается решение при меньшей размерности вектора управления. Отметим, что идеи, изложенные в [1], развивались в работах [2–5].

2. Алгоритм управления укороченной системой

Для решения задачи переходим от координат q_ν к квазикоординатам ω_i $(i = 1, 2, \dots, k)$, а также к координатам $p_1, p_2, \dots, p_{n-k}$, ортогональным ω_i, при этом квазискорости вводим в виде

$$\dot\omega = \tilde A(q,t)\dot q + a(q,t). \tag{5}$$

Выражая T через $\dot\omega$, $\dot p$ в виде $T = T_\omega + T_p + \tilde T_0$, где $T_\omega = \frac{1}{2}\dot\omega^T A_\omega \dot\omega + \dot\omega^T b_{\tilde\omega}$, $\tilde T_0 = T_0 + T^0_\omega$, $b_{\tilde\omega} = b_\omega - A_\omega a$, $T^{(2)}_\omega = \frac{1}{2}\dot\omega^T A_\omega\dot\omega$, получим уравнение (1) в квазикоординатах:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\omega}{\partial\dot\omega}\right) - \frac{\partial T_\omega}{\partial\omega} = Q_\omega + Q'_\omega, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot p}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} = Q_p + Q'_p. \tag{7}$$

Систему (6) назовём укороченной системой.

Подставляя $\frac{\partial T_\omega}{\partial\dot\omega} = A_\omega\dot\omega + b_{\tilde\omega}$ в (6), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_\omega\dot\omega\right) + B_{\tilde\omega}\dot\omega - \frac{\partial T^{(2)}_\omega}{\partial\omega} = Q_\omega + \tilde Q_\omega, \tag{8}$$

где $B_{\tilde\omega} = \left(\frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial\omega} - \frac{\partial b^T_{\tilde\omega}}{\partial\omega}\right)$, $\tilde Q_\omega = Q'_\omega - \frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial p}\dot p - \frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial t} + \frac{\partial T^0_\omega}{\partial\omega}$.

Умножая уравнение (8) скалярно на $\dot\omega$, получим

$$\frac{\mathrm{d}T^{(2)}_\omega}{\mathrm{d}t} = \dot\omega^T\left(Q_\omega + \tilde Q_\omega + \frac{1}{2}\dot\omega^T\frac{\partial A_\omega}{\partial\omega}\dot\omega\right) - \frac{1}{2}\dot\omega^T\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\dot\omega. \tag{9}$$

Вектор обобщённых сил выберем в виде

$$Q_\omega = U_\omega + D\dot\omega, \quad D > \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right|, \tag{10}$$

где

$$U_\omega = -\left(\operatorname{sign}\dot\omega\right)\left(U_0 + \dot\omega^T D_0\dot\omega\right), \tag{11}$$

U_0 — постоянный вектор с элементами $U_{0i} > \left|\tilde Q^i_\omega\right|$, $\dot\omega^T D_0\dot\omega$ — вектор с элементами $\dot\omega^T D_{0i}\dot\omega$, D_{0i} — определённо положительные матрицы, удовлетворяющие условию

$$D_{0i} > \frac{1}{2}\max\left|\frac{\partial A_\omega}{\partial\omega_i}\right|, \tag{12}$$

$\operatorname{sign}\dot\omega$ — диагональная матрица с элементами $\operatorname{sign}\dot\omega_i$. При этом правая часть (9) становится определённо отрицательной функцией по $\dot\omega$. Следовательно, значение $|\dot\omega|$ со временем будет убывать.

Заметим, что при выборе U_ω в виде (11) при любых ограниченных начальных значениях $\dot\omega(0)$ время обращения $|\dot\omega|$ будет конечным. Доказательство этого утверждения приводится ниже.

3. Оценка времени приведения системы в терминальное состояние

Так как правая часть (9) является определённо отрицательной по $\dot\omega$, то в силу (3) имеет место

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant -\left(b_1\sqrt{V} + b_2 V\right), \tag{13}$$

где b_1, b_2 — положительные постоянные, $V = T_\omega^{(2)}$.

Интегрируя правую часть неравенства $\dfrac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}b_1 + b_2 V} \leqslant -\mathrm{d}t$ от 0 до t_1, а левую от V_0 до 0, получим оценку времени приведения системы в состояние $\dot\omega = 0$:

$$t_1 \leqslant \frac{2}{b_2}\ln\left(1 + \frac{b_2}{b_1\sqrt{V_0}}\right), \tag{14}$$

где V_0 — начальное значение $T_\omega^{(2)}$.

4. Алгоритм управления исходной системой

Теперь необходимо определить вектор обобщённых сил управления Q исходной системой (1). С этой целью определим зависимость между Q и построенной в п. 2 функцией Q_ω. Для этого определим сумму элементарных работ всех активных сил управления

$$\delta A^\alpha = Q^T \delta q, \tag{15}$$

где δq — вектор изохронных вариаций элементов q.

Выделим из (15) элементарную работу $\delta A_\omega^\alpha = Q_\omega^T \delta\omega$, совершаемую лишь при вариациях

$$\delta\omega = \Omega\delta q, \tag{16}$$

вытекающих из (4), где $\Omega = \left\|\tilde{A}\right\|$ — прямоугольная $(k \times n)$ матрица.

Из системы k уравнений (16) определим элементы вектора δq в количестве n через k элементов вектора $\delta\omega$. Для этого вектор δq разложим на две составляющие: $(\delta q)_N$ — вектор, нормальный к многообразию (4), и $(\delta q)_\tau$ — вектор, касательный к (4). Первый из них ищем в виде $(\delta q)_N = \Omega^T\lambda$, где λ — k-мерный искомый вектор.

Подставляя

$$\delta q = (\delta q)_N + (\delta q)_\tau \tag{17}$$

в (16), получим $\Omega\Omega^T\lambda + \Omega(\delta q)_\tau = \delta\omega$. Следовательно, имеем $(\delta q)_N = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega$.

Подставляя в (15) значение (17), получим

$$\delta A^\alpha = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega + Q^T(\delta q)_\tau.$$

Второй член в правой части этого выражения не зависит от $\delta\omega$. Следовательно, частью суммы элементарных работ управляющих сил, совершаемых на элементарных перемещениях δq, вносящих вклад в вариацию $\delta\omega$, является

$$\delta A_\omega^\alpha = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega,$$

откуда

$$Q_\omega^T = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}. \tag{18}$$

Если вектор обобщённых сил управления исходной системой (1) задавать в виде $Q = M_0u$, где u — r-мерный вектор управления, $M_0(q, \dot q, t)$ — матрица $(n \times r)$, удовлетворяющая в области G условию $\det\left\|M_0^T M_0\right\| \neq 0$ и $\Omega M_0 \neq 0$, то при подстановке $Q = M_0u$ в (18) получим следующую систему k уравнений для определения r элементов вектора u:

$$(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0 u = Q_\omega. \tag{19}$$

Заметим, что правая часть этого уравнения была определена в виде (10), где U_ω имеет вид (11).

Решение уравнения (19) относительно u можно представить в виде [6]:

$$u = \bar\Omega^T\left(\bar\Omega\bar\Omega^T\right)^{-1}Q_\omega + u_\tau, \tag{20}$$

где $\bar\Omega = (\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0$, $\det\|\bar\Omega\,\bar\Omega^T\| \neq 0$, u_τ — r-мерный произвольно задаваемый вектор, удовлетворяющий условию $\bar\Omega u_\tau = 0$, который можно представить в виде [6]:

$$u_\tau = \left[E - \bar\Omega^T\left(\bar\Omega\bar\Omega^T\right)^{-1}\bar\Omega\right]\tilde u,$$

где E — единичная матрица, $\tilde u$ — произвольный вектор. Заметим, что при $r = k$ матрица $\bar\Omega$ является квадратной, причём $E - \bar\Omega^T\left(\bar\Omega\bar\Omega^T\right)^{-1}\bar\Omega = 0$. Следовательно, имеет место $u_\tau \equiv 0$. Отсюда следует, что минимальная размерность вектора управления u может быть равна размерности k вектора ω при $k < n$. Как отмечалось в п.1, в этом заключается принципиальное преимущество предлагаемого здесь метода управления от принципа декомпозиции [1] при задании невозмущённого состояния системы в виде $(n-k)$-мерного многообразия (4).

Следует отметить также то, что в случае $r > k$, полагая $u_\tau = 0$, в силу произвольности вектора u_τ, получим вектор управления u, имеющий минимальную евклидову норму, в виде

$$u = \bar\Omega^T\left(\bar\Omega\bar\Omega^T\right)^{-1}\left(U_\omega - D\dot\omega\right), \tag{21}$$

где U_ω — ступенчатая функция (11).

В частном случае $k = r = 1$ матрицы M_0 и Ω^T становятся n-мерными векторами-столбцами, а C, D, U_ω, U_0, ω — скалярными величинами. При этом из (21) следует скалярное управление

$$u = \frac{\Omega^2}{\lambda}\left(U_\omega - D\dot\omega\right), \tag{22}$$

где λ — скалярное произведение векторов M_0 и Ω^T, U_ω — выражается в виде (11).

5. Приведение преследующего тела в режим движения по кривой погони

При движении центра масс тела по кривой погони [7] имеет место

$$\dot\omega_i = \bar\ell_i \cdot \bar V \quad (i = 1, 2), \tag{23}$$

где $\bar\ell_i$ — орты осей, ортогональных линии визирования CO, где C — центр масс, O — преследуемая точка, $\bar V$ — скорость точки C.

Построим вектор управляющих центром масс C тела так, чтобы направление скорости $\bar{V}$ точки C было приведено за конечное время из любого начального положения, удовлетворяющего условию $(\bar{V} \cdot \bar{\ell}_3) > 0$, в положение, совпадающее с линией визирования CO, где $\bar{\ell}_3$ — орт вектора $\overline{CO}$.

Из (23) следуют два уравнения для выражения трёх компонентов V_x, V_y, V_z вектора $\bar{V}$ через $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$:

$$\bar{\ell}_1 \cdot \bar{V} = \dot{\omega}_1, \quad \bar{\ell}_2 \cdot \bar{V} = \dot{\omega}_2, \tag{24}$$

где V_x, V_y, V_z — проекции $\bar{V}$ на главные оси инерции тела с ортами $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, $\bar{k}_3$.

Уравнения (24) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_1\right) V_x + \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_2\right) V_y + \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_3\right) V_z = \dot{\omega}_1, \\ \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_1\right) V_x + \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_2\right) V_y + \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_3\right) V_z = \dot{\omega}_2\end{gathered}$$

или в матричной форме

$$\Omega \bar{V} = \dot{\omega}, \quad \dot{\omega}^T = \left(\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2\right), \tag{25}$$

где

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_1\right) & \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_2\right) & \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_3\right) \\ \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_1\right) & \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_2\right) & \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_3\right) \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

Решение (25) относительно $\bar{V}$ ищем в виде

$$\bar{V} = \Omega^T \lambda, \tag{27}$$

где λ — двумерный вектор $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Подставляя (27) в (25), получим уравнение $\Omega\Omega^T\lambda = \dot{\omega}$ для определения λ в виде $\lambda = \left(\Omega\Omega^T\right)^{-1} \dot{\omega}$. Следовательно, получим выражение $\bar{V}$ через $\dot{\omega}$:

$$\bar{V} = \Omega^T \left(\Omega\Omega^T\right)^{-1} \dot{\omega}.$$

Обозначим $M_1 = \omega^T \left(\Omega\Omega^T\right)^{-1}$. Тогда

$$\bar{V} = M_1 \dot{\omega}. \tag{28}$$

Теперь, подставляя (28) в выражение $T = \dfrac{mV^2}{2}$, получим $T = T_\omega^{(2)} + T_\omega^{(1)} + T_\omega^0$, где $V^2 = \dot{\omega}^T M_1^T M_1 \dot{\omega}$, $T_{\dot{\omega}}^{(2)} = \dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega}$, $A_\omega = M_1^T M_1 \dfrac{m}{2}$.

Теперь вектор $Q_\omega^T = \left(Q_\omega^{(1)}, Q_\omega^{(2)}\right)$ можем построить в виде (10):

$$Q_\omega = U_\omega - D\dot{\omega},$$

где U_ω имеет вид (11).

Для выражения вектора управления U_1 через Q_ω воспользуемся следующими уравнениями, записанными в проекциях на главные оси инерции тела:

$$m\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = \left(\bar{V} \times \bar{\omega}_0\right) m + f + U_1,$$

где $\bar{\omega}_0$ — угловая скорость вращения тела.

Исходя из (28), вариацию $\delta\omega$ можно выразить через $\delta\bar{V}$ в виде $\delta\bar{V} = M_1 \delta\omega$.

Сумму элементарных работ управляющих сил $U_1\left(U'_p, U'_q, U'_r\right)$ можно представить в виде

$$\delta A^a_\omega = \tilde{U}_1^T \delta \bar{V} = \tilde{U}_1^T M_1 \delta\omega,$$

где $\tilde{U}_1 = U_1/m$.

Эту же сумму можно записать в виде $\delta A^a_\omega = Q^T_\omega \delta\omega$. Следовательно, имеет место

$$M_1^T \tilde{U}_1 = Q_\omega. \tag{29}$$

Решение $\tilde{U}_1$ уравнения (29) ищем в виде

$$\tilde{U}_1 = M_1 \lambda_0, \tag{30}$$

где λ_0 — двумерный вектор $\lambda_0^T = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right)$.

Подставляя (30) в (29), получим $M_1^T M_1 \lambda_0 = Q_\omega$. Отсюда $\lambda_0 = \left(M_1^T M_1\right)^{-1} Q_\omega$. Следовательно, из (30) определим выражение $\tilde{U}_1$ с минимальной евклидовой нормой в виде

$$\tilde{U}_1 = M_1 \left(M_1^T M_1\right)^{-1} Q_\omega,$$

где Q_ω имеет вид (10), а U_ω — вид (11).

Заметим, что в случае равенства нулю одного из компонентов вектора U_1 матрица (26) становится квадратной. Например, при $U'_r = 0$ имеет место

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_1\right) & \left(\bar{\ell}_1 \cdot \bar{k}_2\right) \\ \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_1\right) & \left(\bar{\ell}_2 \cdot \bar{k}_2\right) \end{Vmatrix}.$$

При этом управление U_1 будет двумерным вектором $U_1^T = \left(U'_p, U'_q\right)$.

В заключение отметим, что оценка времени t_1 приведения вектора $\bar{V}$ в положение, направленное по $\overline{CO}$, выражается в виде (14).

Литература

1. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 2. — С. 300–303. [*Pyatnickiyj E. S.* Princip dekompozicii v upravlenii mekhanicheskimi sistemami // Dokladih AN SSSR. — 1988. — T. 300, No 2. — S. 300–303.]
2. *Матюхин В. И.* Универсальные законы управления механическими системами. — М.: МАКС Пресс, 2001. — 249 с. [*Matyukhin V. I.* Universaljnihe zakonih upravleniya mekhanicheskimi sistemami. — M.: MAKS Press, 2001. — 249 s.]
3. *Матюхин В. И.* Безударный контакт твёрдых тел // ДАН. — 2009. — Т. 427, № 1. — С. 44–47. [*Matyukhin V. I.* Bezudarnihyj kontakt tvyordihkh tel // DAN. — 2009. — T. 427, No 1. — S. 44–47.]
4. *Ананьевский И. М.* Непрерывное управление по обратной связи возмущёнными механическими системами // ПММ. — 2003. — Т. 67, вып. 2. — С. 163–178. [*Ananjevskiyj I. M.* Neprerihvnoe upravlenie po obratnoyj svyazi vozmuthyonnihmi mekhanicheskimi sistemami // PMM. — 2003. — T. 67, вып. 2. — S. 163–178.]
5. *Ананьевский И. М.* Синтез непрерывного управления механической системой с неизвестной матрицей инерции // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 24–35. [*Ananjevskiyj I. M.* Sintez neprerihvnogo upravleniya mekhanicheskoyj sistemoyj s neizvestnoyj matriceyj inercii // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemih upravleniya. — 2006. — No 3. — S. 24–35.]
6. *Мухаметзянов И. А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 10. — С. 16–23. [*Mukhametzyanov I. A.*

Postroenie uravneniyj programmnihkh dvizheniyj // Avtomatika i telemekhanika. — 1972. — No 10. — S. 16–23.]

7. *Кан В. Л., Кельзон А. С.* Теория пропорциональной навигации. — Л.: Судостроение, 1965. — 423 с. [*Kan V. L., Keljzon A. S.* Teoriya proporcionaljnoyj navigacii. — L.: Sudostroenie, 1965. — 423 s.]

UDC 531.31:62-56

Control Process of Transition of Mechanical Systems to Nonholonomic Programmed Set During Finite Time under the Indeterminancy

I. A. Mukhametzyanov

Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The procedure of the construction of the control algorithm of the transition process for the mechanical systems to nonholonomic set during finite time under the indeterminancy is proposed.

Key words and phrases: control, nonholonomic set, programmed motion, controls algorithm, finite time.