

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607

УДК 69.04

EDN: HIQWQW

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования

В.П. Агапов<sup>1</sup> , А.С. Маркович<sup>1,2</sup>  <sup>1</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 27 июля 2023

Доработана: 17 сентября 2023 г.

Принята к публикации: 3 октября 2023 г.

### Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Вклад авторов

Нераздельное соавторство.


**Аннотация.** Разработан объемный конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования. При построении элемента в области напряженного состояния «сжатие — сжатие — сжатие» использован модифицированный критерий прочности Виллама — Варнке. Поведение бетона при растяжении принималось линейным вплоть до возникновения трещины. Современные строительные нормы и правила предписывают проводить расчеты бетонных и железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. В связи с этим разработана методика и построен объемный конечный элемент, адаптированный к ВК ПРИНС, позволяющий выполнять расчеты массивных железобетонных конструкций с учетом их действительной работы. Цель исследования — разработка методики расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом хрупкого разрушения сжатого бетона и трещинообразования в растянутом бетоне. Для верификации разработанного конечного элемента проведена серия тестовых расчетов балки, находящейся в условиях трехточечного изгиба. Сравнение результатов расчета с данными экспериментов, проведенных авторами, подтвердило высокую точность и достоверность полученных результатов. Разработанный объемный конечный элемент в составе ВК ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами массивных железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

**Агапов Владимир Павлович**, доктор технических наук, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1749-5797; E-mail: agapovpb@mail.ru

**Маркович Алексей Семенович**, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; доцент кафедры фундаментального образования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3967-2114; E-mail: markovich-as@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 593–607. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607>

# Finite Element for the Analysis of Massive Reinforced Concrete Structures with Cracking

Vladimir P. Agapov<sup>1</sup> , Alexey S. Markovich<sup>1,2</sup>  

<sup>1</sup> RUDN University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

## Article history

Received: July 27, 2023

Revised: September 17, 2023

Accepted: October 3, 2023

## Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

## Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** The solid finite element has been developed for the calculation of massive reinforced concrete structures with cracks. When constructing a finite element in the compression-compression-compression mode, the Willam & Warnke failure criterion was used. The tensile behavior of concrete was assumed to be linear before the crack initiation. Modern building codes require non-linear calculations of concrete and reinforced concrete structures, taking into account the real properties of concrete and reinforcement. In this regard, a technique has been developed and a solid finite element has been built, adapted to the PRINS software, which makes it possible to perform calculations of massive reinforced concrete structures, taking into account their actual work. Development of a method for calculating reinforced concrete structures under conditions of a three-dimensional stress state, taking into account the brittle fracture of compressed concrete and cracking in tensile concrete. Based on this technique, the implementation of a solid finite element in the PRINS software. To verify the developed finite element, a series of test calculations of a beam under three-point bending conditions was carried out. Comparison of the calculation results with the data of experiments by the authors confirmed the high accuracy and reliability of the results obtained. The developed solid finite element included in the PRINS software can be effectively used by engineers of design and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to the calculations of massive reinforced concrete structures.

**Keywords:** finite element method, PRINS computational program, building structures, solid reinforced concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, structural mechanics

## For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Finite element for the analysis of massive reinforced concrete structures with cracking. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):593–607. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607>

## 1. Введение

Предпосылки для расчета железобетонных конструкций в нелинейной постановке были обусловлены развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и развитием численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов — с другой [1–4]. При этом нелинейное деформирование бетона с учетом реальных упругопластических свойств в условиях объемного напряженного состояния исследовалось на протяжении XX в. как отечественными, так и зарубежными учеными [5–10].

Очевидно, что современные методы расчеты железобетонных конструкций должны разрабатываться на основании численных методов строительной механики с учетом нелинейных эффектов, присущих бетону и арматуре, установленных экспериментальным путем. Поэтому корректное моделирование объем-

*Vladimir P. Agapov*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797; E-mail: agapovpb@mail.ru

*Alexey S. Markovich*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy, RUDN University, Moscow, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; E-mail: markovich-as@rudn.ru

ного напряженного состояния бетона с учетом его упругопластических характеристик является ответственной задачей, и для повышения достоверности расчеты следует проводить с использованием нескольких вычислительных программ. В связи с этим разработка альтернативных методов расчета и соответствующих программ является актуальной задачей.

Для решения данной задачи в настоящей статье приводится методика расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом хрупкого разрушения бетона сжатой зоны, а также трещинообразования в растянутом бетоне. На основании данной методики построен объемный конечный элемент, реализованный в ВК ПРИНС<sup>1</sup>.

## 2. Метод

В ВК ПРИНС расчет физически нелинейных конструкций методом конечных элементов ведется в приращениях по уравнению [1]:

$$(K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta P, \quad (1)$$

где  $\Delta K = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$ .

Матрицы жесткости  $K_0$  и  $K_1$  вычисляются в начале и конце каждой итерации.

Уравнение (2) решается итерационным способом [11; 12]:

$$K_0 \Delta u_i = \Delta P - \Delta K_{i-1} \Delta u_{i-1}, \quad (2)$$

где  $i$  — номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса вычисляются полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$u = u_0 + \Delta u, \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma, \quad (3)$$

где  $\Delta u$  и  $\Delta \sigma$  — приращения перемещений и напряжений соответственно.

Приращения напряжений, обусловленные приращением деформаций  $\Delta \varepsilon$ , определяются по формуле

$$\Delta \sigma = C_{ep} \Delta \varepsilon, \quad (4)$$

где  $C_{ep}$  — упругопластическая матрица характеристик материала.

В общем случае на каждом шаге нагружения анализируется напряженное состояние материала и при возникновении пластических деформаций и (или) трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции. Итерации равновесия производятся по формуле (1), которая модифицируется к виду

$$K_j \Delta u_j^i = P_j - F_j^{i-1}. \quad (5)$$

В формуле (5) матрица жесткости принимается равной матрице  $K_j$ , найденной в конце шага при итерациях по формуле (2).

Таким образом, в формуле (3) итерируется матрица жесткости, а в формуле (6) — вектор узловых сил  $F_j^{i-1}$ , эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости  $K$  для отдельного конечного элемента находится по формуле [2]:

$$K = \int_V B^T C_e B dV. \quad (6)$$

где  $B$  — матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица);  $C_e$  — матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций (физическая матрица).

Методика вычисления геометрической матрицы  $B$  хорошо известна (см., например, [3]).

<sup>1</sup> Разработка ВК ПРИНС была начата профессором В.П. Агаповым в 70-е гг. XX в. В настоящее время развитие этого вычислительного комплекса ведется профессором В.П. Агаповым совместно с его учеником доцентом А.С. Марковичем.

### Основные предпосылки анализа объемного напряженного состояния

Рассматриваются четыре вида напряженного состояния: сжатие — сжатие — сжатие, сжатие — сжатие — растяжение, сжатие — растяжение — растяжение, растяжение — растяжение — растяжение.

При этом учитываются следующие типы поведения материала: нагружение, разгрузка и догрузка. Соответствующие указанным типам поведения пути деформирования материала приведены на рис. 1.

Нагружение растянутого бетона после образования трещины (участок  $C — D — E$ ) происходит с модулем упругости

$$E_i = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_m$  — предельная деформация бетона с трещинами при растяжении,  $\sigma_{cr}$  и  $\varepsilon_{cr}$  — напряжение и деформация трещинообразования соответственно (см. рис. 1).

Разгрузка и догрузка бетона с трещинами (участки  $D — O$ ) подчиняются линейному закону с фиктивным модулем упругости

$$E'_i = \frac{1}{\varepsilon_D} \frac{\sigma_{cr} (\varepsilon_m - \varepsilon_D)}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad \varepsilon_{cr} < \varepsilon_D < \varepsilon_m, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_D$  — текущее значение деформации.

Напряжение в растянутом бетоне после возникновения трещины находится по формуле

$$\sigma = \sigma_{cr} \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_D}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}. \quad (9)$$

#### 2.1. Деформирование бетона в области «сжатие — сжатие — сжатие»

При построении физической матрицы принята упругая модель при хрупком разрушении бетона в режиме «сжатие — сжатие — сжатие». Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения поверхности разрушения.

В качестве поверхности разрушения принята пятипараметрическая модель, предложенная Вилламом и Варнке [13]. На рис. 2 приведено девиаторное сечение этой поверхности, а на рис. 3 — главные меридианы растяжения и сжатия.

Условие прочности определяется формулой [13]

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta)} \frac{\tau_m}{R_b} - 1 = 0, \quad (10)$$

где  $\sigma_m$  и  $\tau_m$  — средние значения нормальных и касательных напряжений в окрестности точки,  $\theta$  — угол вида напряженного состояния, а  $\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{r}{\sqrt{5}R_b}$  — радиус-вектор точки на поверхности разрушения в девиаторном сечении (см. рис. 2).

Радиус-вектор  $\bar{r}(\sigma_m, \theta)$  определяется формулой [13]

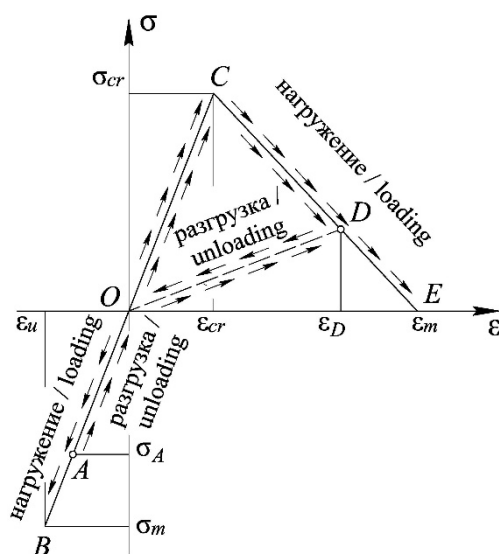
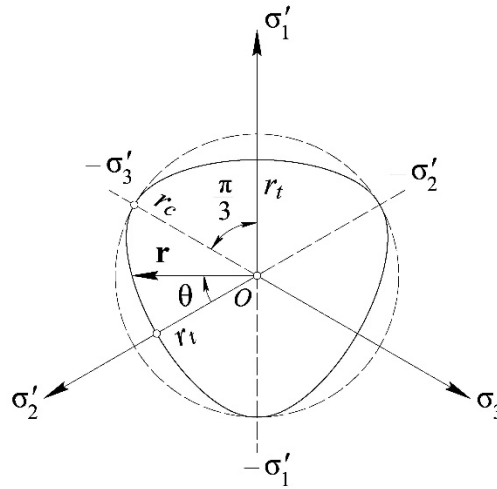


Рис. 1. Пути деформирования материала  
Источник: выполнено авторами  
Figure 1. Material Deformation Path  
Source: compiled by the authors

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\sqrt{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2} \quad (11)$$



**Рис. 2.** Девиаторное сечение поверхности разрушения:

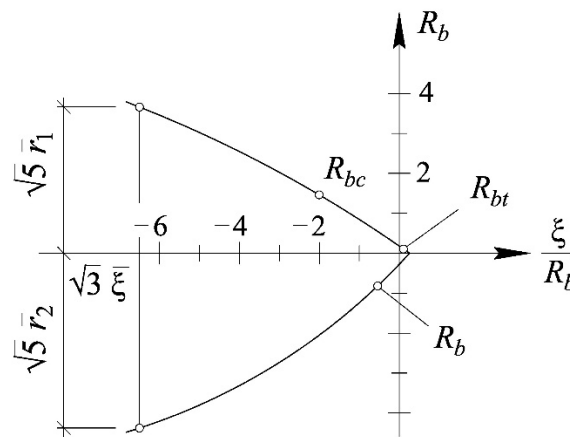
$r_t$  и  $r_c$  — меридианы растяжения и сжатия;  $\theta$  — угол вида напряженного состояния

И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 2.** Deviatoric section of the fracture surface:

$r_t$  and  $r_c$  — the meridians of tension and compression;  $\theta$  — the angle of the type of the stress state

S o u r c e : compiled by the authors



**Рис. 3.** Меридианы растяжения и сжатия поверхности разрушения:

$R_b$  и  $R_{bt}$  — пределы прочности бетона на осевое сжатие и растяжение;

$R_{bc}$  — предел прочности бетона на равномерное двухосное сжатие,  $r = \sqrt{5}\tau_m$ ,  $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$

И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 3.** Tension and compression meridians of fracture surface:

$R_b$  and  $R_{bt}$  — ultimate strength of concrete for axial compression and tension;

$R_{bc}$  — ultimate strength of concrete for uniform biaxial compression,  $r = \sqrt{5}\tau_m$ ,  $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$

S o u r c e : compiled by the authors

Радиус-векторы  $r_t$  и  $r_c$  (см. рис. 2) определяют меридианы растяжения ( $\theta = 0$ ) и сжатия ( $\theta = \pi/3$ ), которые являются квадратными параболами:

$$\frac{\tau_{m,t}}{R_b} = r_t = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + a_2 \left( \frac{\sigma_m}{R_b} \right)^2, \quad \frac{\tau_{m,c}}{R_b} = r_c = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + b_2 \left( \frac{\sigma_m}{R_b} \right)^2. \quad (12)$$

Коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  получены на основе экспериментальных данных и в зависимости от параметров модели, приведенных в табл. 1, определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} a_1 - \frac{4}{9} \bar{R}_{bc}^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{R}_{bc}, \quad a_1 = \frac{1}{3} (2\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt}) a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}}{2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}},$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} \bar{\xi}_t (\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}) - \sqrt{\frac{6}{5}} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} + \bar{r}_t (2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt})}{(2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}) \left( \bar{\xi}_t^2 - \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} \bar{\xi}_t + \frac{1}{3} \bar{R}_{bt} \bar{\xi}_t - \frac{2}{9} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} \right)}, \quad (13)$$

$$b_0 = -\rho b_1 - \rho^2 b_2, \quad b_1 = \left( \bar{\xi}_c + \frac{1}{3} \right) b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3r_c}{3\bar{\xi}_c - 1}, \quad b_2 = \frac{r_c \left( \rho + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\bar{\xi}_c + \rho)}{(\bar{\xi}_c + \rho) \left( \bar{\xi}_c - \frac{1}{3} \right) \left( \rho + \frac{1}{3} \right)}. \quad (14)$$

Таблица 1 / Table 1

К определению параметров модели Виллама — Варнке /  
To the determination of the parameters of the Willam — Warnke model

Вид напряженного состояния / Type of stress state		Критерий / Criterion	Напряжения / Stresses	Угол $\theta$ / Angle $\theta$
1.	Одноосное сжатие / Uniaxial compression	$R_b$	$\sigma_3 = -R_b,$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$\pi/3$
2.	Одноосное растяжение / Uniaxial tension	$R_{bt}$	$\sigma_1 = R_{bt},$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3.	Равномерное двухосное сжатие / Uniform biaxial compression	$R_{bc}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc},$ $\sigma_3 = 0,$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4.	Трехосное сжатие в режиме высокой компрессии ( $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$ ) / Triaxial compression in high compression mode ( $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$ )	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_t,$ $\bar{\xi}_1 > 0,$ $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_t$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0,$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*, \bar{r}_t = 1,59^*$	0
5.	Трехосное сжатие в режиме низкой компрессии ( $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$ ) / Triaxial compression in low compression mode ( $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$ )	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_c,$ $\bar{\xi}_2 > 0,$ $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0,$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*, \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

\* Согласно результатам экспериментов Лоне и Гашона [7].

В табл. 1 использованы следующие буквенные обозначения:  $R_b$  — прочность бетона на одноосное сжатие (призменная или кубиковая),  $R_{bt}$  — прочность бетона на одноосное растяжение,  $R_{bc}$  — прочность бетона на равномерное двухосное сжатие. При этом нормируемые значения прочности являются безразмерными величинами и задаются в долях от  $R_b$ .

Прочность бетона в условиях трехосного сжатия определяется для режимов низкой и высокой боковой компрессии с использованием соотношений  $\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_c$  и  $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$  на основании экспериментальных данных [7].

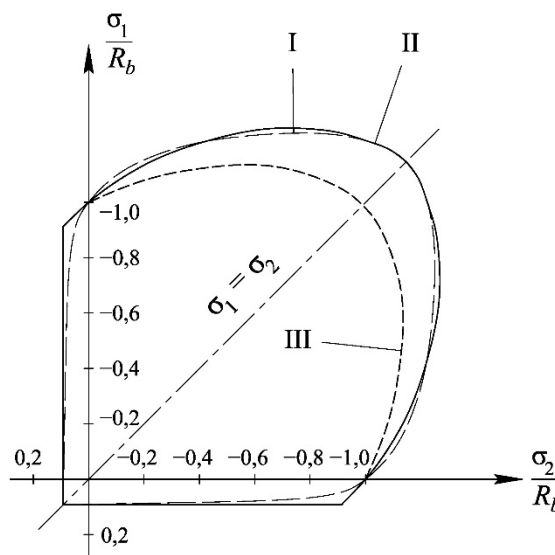
**2.2. Деформирование бетона в областях «сжатие — сжатие — растяжение», «сжатие — растяжение — растяжение» и «растяжение — растяжение — растяжение» (учет трещинообразования)**

Физическая матрица  $C_e$  для бетона с одной, двумя и тремя трещинами формируется следующим образом. При образовании трещины по первому главному направлению напряженное состояние бетона по двум другим направлениям рассматривается как плосконапряженное и используется модифицированный критерий прочности Мизеса — Губера [14], который сводится к виду

$$f[I_1(T_\sigma), I_2(D_\sigma)] = \sqrt{\beta[3I_2(D_\sigma) + \alpha I_1(T_\sigma)]} = \sigma_0, \tag{15}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — эмпирические коэффициенты, которые на основании экспериментальных данных принимаются равными 0,355 и 1,355 соответственно. Отметим, что при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$  уравнение (15) вырождается в критерий пластичности Мизеса — Губера [14].

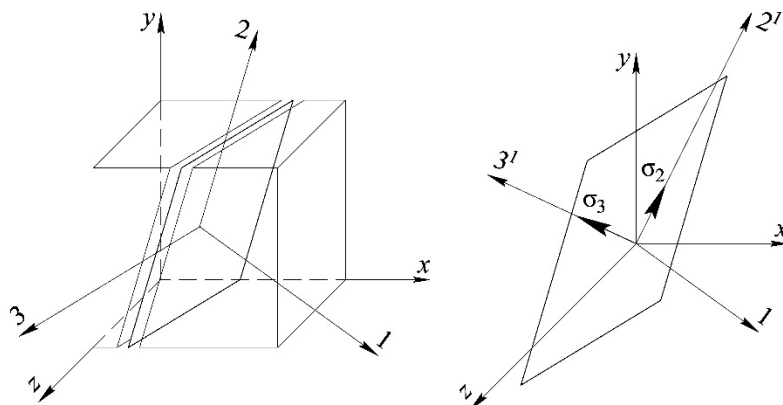
С принятыми значениями коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  критерий (15) достаточно хорошо согласовывается с результатами двухосных испытаний бетона (рис. 4).



**Рис. 4.** Геометрическая интерпретация критерия текучести (15):  
 I — поверхность разрушения согласно экспериментальным данным Купфера [6];  
 II — критерий (15); III — критерий пластичности Мизеса — Губера [14]  
 Источник: выполнено авторами

**Figure 4.** Geometric interpretation of the yield criterion (15):  
 I — the fracture surface according to the experimental data of Kupffer [6];  
 II — the criterion (15); III — the von Mises & Huber plasticity criterion [14]  
 Source: compiled by the authors

Первоначально напряжения в конечном элементе вычисляются в глобальных осях конструкции  $x — y — z$ . В момент возникновения первой трещины фиксируется положение главных осей  $1 — 2 — 3$  (рис. 5).



**Рис. 5.** Анализ напряженного состояния бетона при образовании одной трещины  
И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 5.** Analysis of the stress state of concrete during the formation of one crack  
S o u r c e : compiled by the authors

При возникновении первой трещины материал в объеме элемента распадается, согласно принятой гипотезе, на ряд плосконапряженных пластинок. В каждой такой пластинке существуют такие площадки с нормальными  $2^1$  и  $3^1$ , на которых нормальные напряжения имеют экстремальные значения. Дальнейший анализ трещинообразования производится по главным напряжениям  $\bar{\sigma}_2$  и  $\bar{\sigma}_3$ , действующим вдоль осей  $2^1$  и  $3^1$  (см. рис. 5). Данные напряжения, как и угол поворота осей  $2^1$  и  $3^1$  относительно осей 2 и 3, находятся по общим правилам сопротивления материалов. Дальнейший расчет конструкции выполняется в осях  $1 — 2^1 — 3^1$ , для чего предварительно вычисляется матрица направляющих косинусов этих осей в глобальных осях  $x — y — z$ .

При наличии двух трещин модуль упругости бетона по третьему направлению определяется по диаграмме «напряжение — деформация» для одноосного напряженного состояния, а модули сдвига принимаются по рекомендациям, приведенным в работе [15].

При этом физическая матрица будет выглядеть следующим образом:

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^c \end{bmatrix}. \quad (16)$$

При наличии трех трещин модуль упругости  $E$  равен нулю.

Модуль  $E$  в матрице  $C_e$  (16) принимается равным либо начальному модулю, если бетон в третьем главном направлении растянут, либо касательному модулю кривой «напряжение — деформация», если бетон по третьему главному направлению сжат.

Эксперименты показывают, что треснувший бетон с арматурой передает значительные касательные напряжения. При этом на величину сдвиговой жесткости влияют такие факторы, как ширина раскрытия трещины, коэффициент армирования, диаметр арматуры, структура бетона и др. [15]. Следуя рекомендациям [15], модуль сдвига примем как функцию текущей растягивающей деформации.

Так, для бетона с трещиной в первом главном направлении



$$G_{12}^c = 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_{12}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, G_{31}^c = G_{12}^c, \quad (17)$$

где  $G$  — модуль сдвига бетона без трещин;  $\varepsilon_1$  — растягивающая деформация по главному направлению 1.

Для бетона с трещиной в двух направлениях:

$$\begin{aligned} G_{13}^c &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_{13}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, \\ G_{23}^c &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{0,004}\right), G_{23}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_2 > 0,004, \\ G_{12}^c &= \frac{1}{2} \min[G_{13}^c, G_{23}^c]. \end{aligned} \quad (18)$$

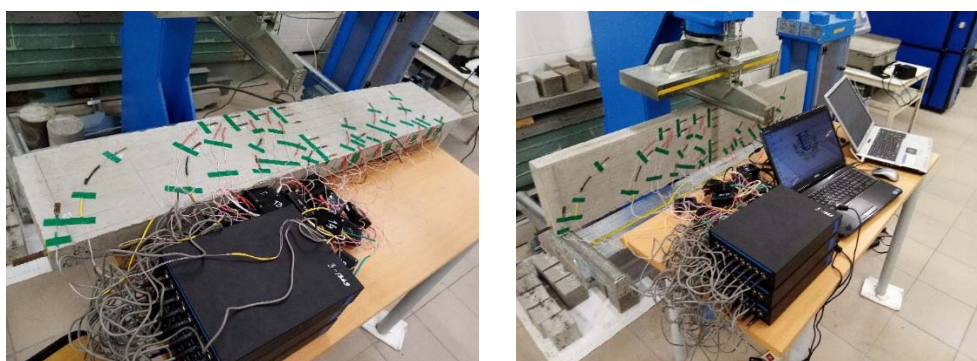
Для бетона с трещиной в трех направлениях:

$$\begin{aligned} G_1 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_1 = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, \\ G_2 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{0,004}\right), G_2 = 0, \text{ если } \varepsilon_2 > 0,004, \\ G_3 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{0,004}\right), G_3 = 0, \text{ если } \varepsilon_3 > 0,004, \\ G_{12}^c &= G_{23}^c = G_{31}^c = \frac{1}{2} \min[G_1, G_2, G_3]. \end{aligned} \quad (19)$$

На основании приведенного алгоритма разработана программа, адаптированная к вычислительному комплексу ПРИНС [18–20].

### 3. Результаты и обсуждение

Для тестирования разработанного конечного элемента были использованы результаты собственных экспериментов авторов, выполненных в лаборатории строительных конструкций и материалов департамента строительства инженерной академии РУДН, в ходе которых исследовалось напряженно-деформированное состояние железобетонной балки (рис. 6).

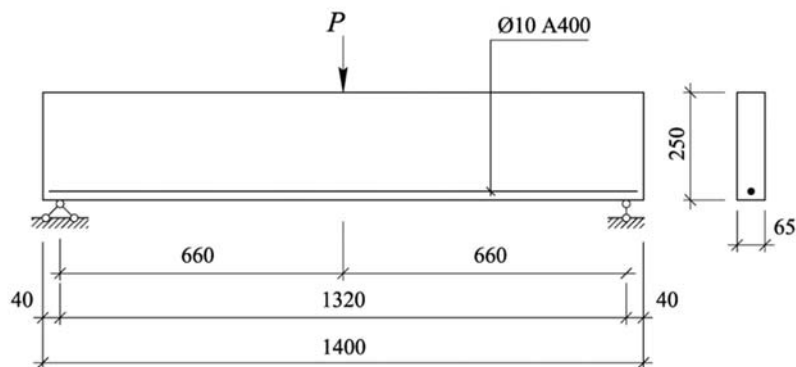


**Рис. 6.** Общий вид экспериментальной балки и использованного оборудования  
Источник: фото В.П. Агапова, А.С. Марковича

**Figure 6.** General view of the experimental beam and used equipment  
Source: photo by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Для оценки напряженного состояния, в соответствии с методикой эксперимента, по направлению главных деформаций в 21 точке на поверхности балки были наклеены тензорезисторы BF120-20AA с базой 20 мм, подключаемые по полной мостовой схеме к 24-канальной тензостанции ZETLAB. Эксперимент проводился на испытательной установке Matest с постоянной скоростью нагружения 10 Н/с. При этом нагрузка, деформации и перемещения характерных точек балки записывались синхронно.

Материал балки — бетон класса В60. Балка имела продольное армирование арматурой класса А400 Ø10 (рис. 7).



**Рис. 7.** Геометрические размеры и схема армирования балки

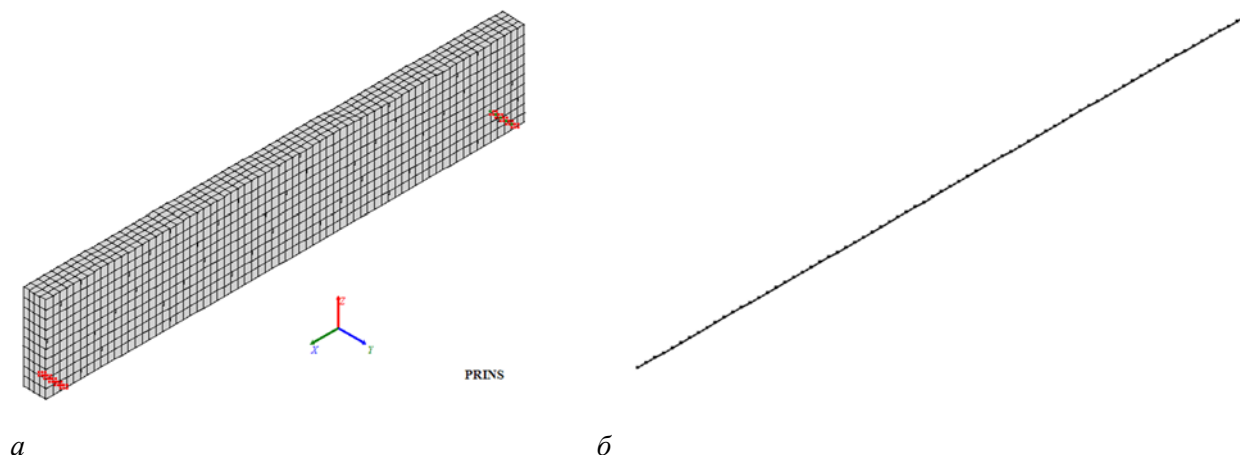
Источник: выполнено авторами

**Figure 7.** Geometric dimensions and reinforcement scheme of beam

Source: compiled by the authors

Конечно-элементная модель экспериментальной балки состояла из 2800 объемных восьмиузловых элементов (рис. 8). Армирование балки моделировалось одномерными стержневыми элементами с тремя степенями свободы в узле. Для продольной арматуры принималась гипотеза идеального упругопластического поведения, и учитывалось влияние квадратов углов поворота на продольные усилия. Стержни поперечного армирования находились в условиях линейно-упругого деформирования.

Нагружение и условия опирания балки соответствовали методике проведенных авторами экспериментов (см. рис. 9).

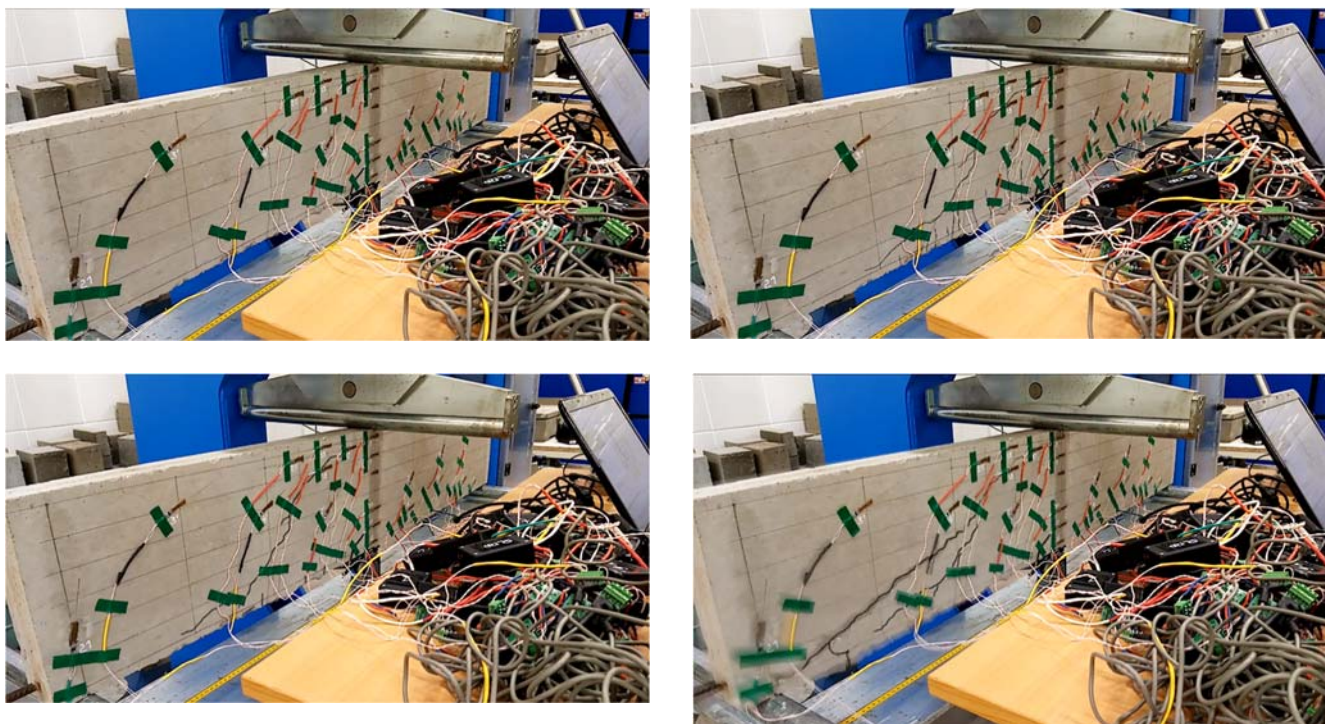


**Рис. 8.** Расчетная схема экспериментальной балки:

*a* — КЭ модель «тела» балки, *б* — схема армирования стержневыми КЭ  
Источник: выполнено авторами с использованием программы ПРИНС

**Figure 8.** FE scheme of the experimental beam:

*a* — FE model of the «body» of the beam, *б* — bar FE scheme of reinforcement  
Source: compiled by the authors using the PRINCE program



**Рис. 9.** Характер разрушения экспериментальной балки  
Источник: фото В.П. Агапова, А.С. Марковича

**Figure 9.** The fracture character of the experimental beam  
Source: photo by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Суммарная нагрузка на балку была принята равной  $P = 36$  кН. Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом. Был задан 41 шаг нагружения, коэффициент к нагрузке на первом шаге принимался равным 0,01, а на остальных шагах — 0,03.

По результатам расчетов исследовались процесс трещинообразования в бетоне, прогибы балки при фиксированных значениях нагрузки, а также предельная (разрушающая) нагрузка.

Результаты расчетов представлены в табл. 2

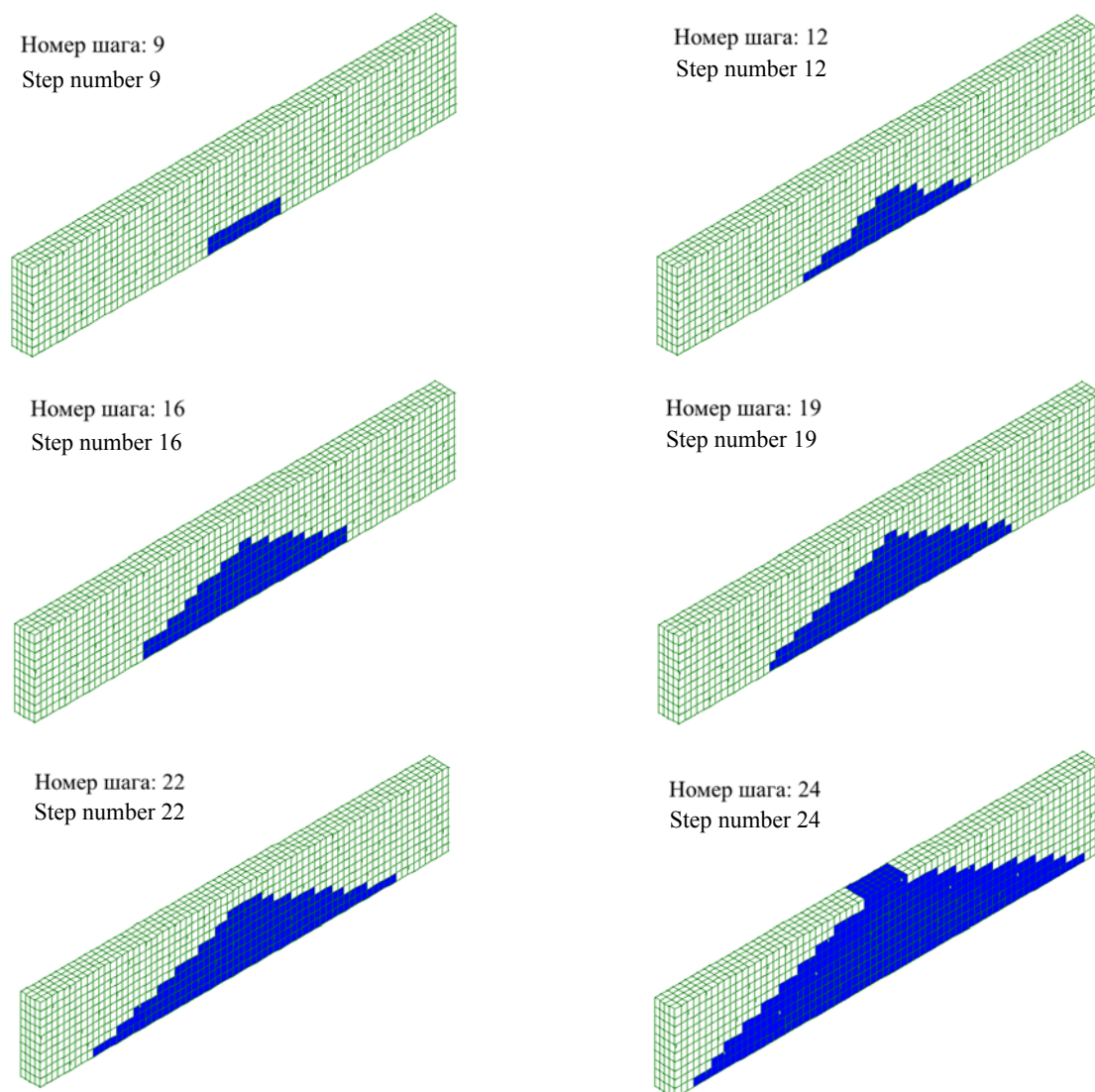
Таблица 2 / Table 2

Результаты расчета балки / Beam calculation results

Исследуемая величина / Researched value	Прогибы балки (мм) при нагрузке, кН / Displacements of beams (mm) under load, kN			Нагрузка трещино- образования, кН / Cracking load, kN	Разрушающая нагрузка, кН / Failure load, kN
	18	21	24		
Результаты экспериментов / Experimental results	0,96	1,170	1,488	9,375	28,849
Результаты расчета в ВК ПРИНС / Calculation results in the PRINS computer application	0,742	1,131	1,476	9,00	27,36
Погрешность, % / Divergence, %	29,4	3,33	0,81	4,17	5,44

Как видно из табл. 2, расхождение в значениях предельной (разрушающей) нагрузки, полученной по результатам расчетов в ВК ПРИНС, в сравнении с экспериментальными данными не превышает 5,44 %, что свидетельствует о высокой точности разработанного конечного элемента, а также о надежности и устойчивости используемых алгоритмов нелинейного расчета.

Процесс трещинообразования рассматриваемой балки, полученный с использованием ВК ПРИНС, показан на рис. 10.



**Рис. 10.** Трещинообразование рассматриваемой балки  
 Источник : выполнено авторами с использованием программы ПРИНС  
**Figure 10.** Cracking of the considered beam  
 Source : compiled by the authors using the PRINCE program

Прогибы балки, соответствующие суммарной нагрузке 18, 21 и 24 кН, приведены на рис. 11.

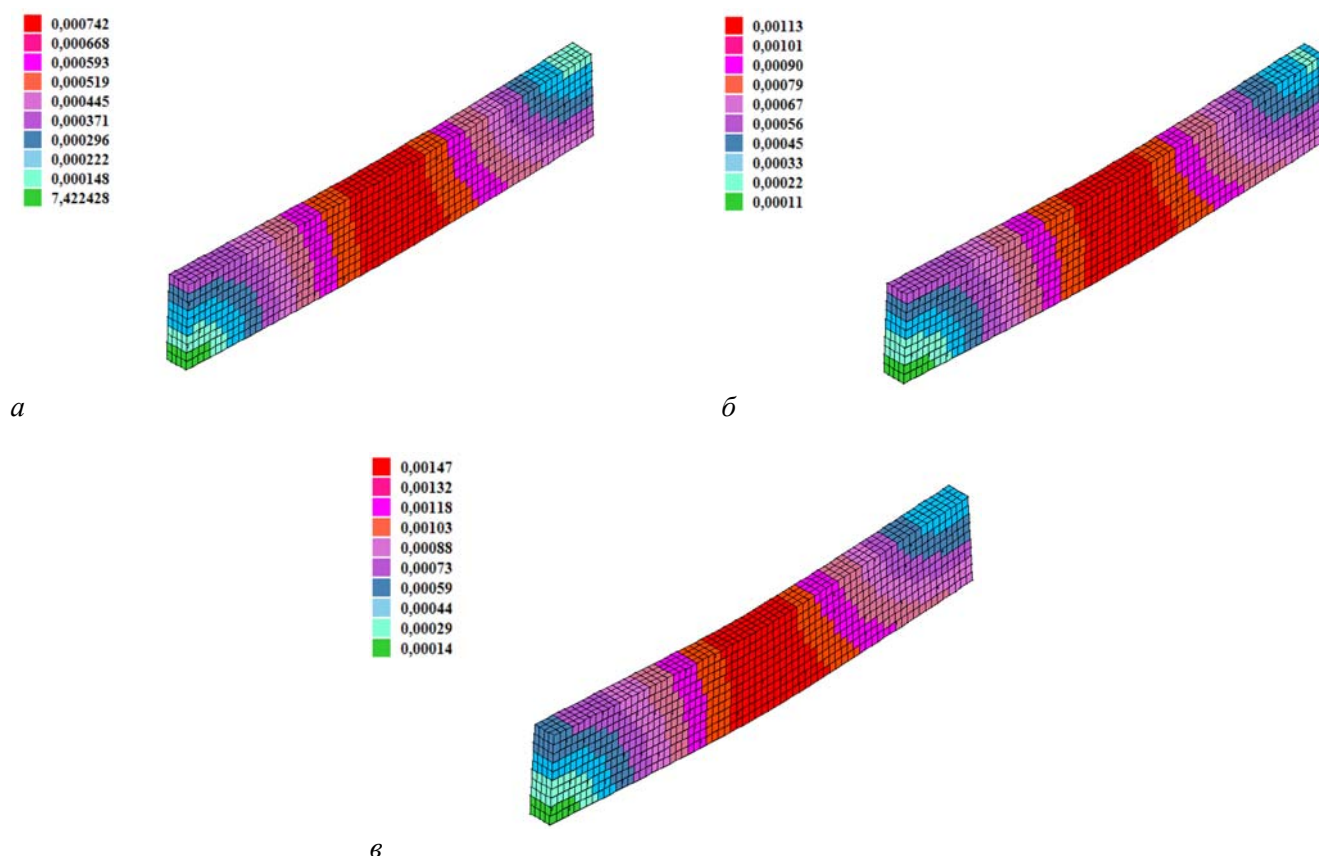
Авторами разработан и реализован физически нелинейный объемный конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций, позволяющий учитывать хрупкое разрушение бетона в области сжатия и процесс трещинообразования в растянутом бетоне.

Для учета работы бетона в режиме «сжатие — сжатие — сжатие» используется критерий прочности Виллама — Варнке.

При возникновении в бетоне трещины по первому главному направлению напряженное состояние по двум другим направлениям рассматривается как плосконапряженное и применяется модифицированный критерий прочности Мизеса — Губера.

При наличии двух трещин модуль упругости бетона по третьему направлению определяется по диаграмме «напряжение — деформация» и при этом учитывается влияние касательных напряжений на работу бетона с трещинами.

Так как армирование конструкции может выполняться произвольным образом, его особенности в полной мере могут быть учтены включением в конечно-элементную схему конструкции одномерных стержневых элементов, характеризующих арматуру. При этом для арматурной стали возможно задание как упругой, так и упругопластической моделей деформирования.



**Рис. 11.** Прогобы балки:  
 а — при нагрузке 18 кН, б — при нагрузке 21 кН, в — при нагрузке 24 кН  
 И с т о ч н и к : выполнено авторами с использованием программы ПРИНС

**Figure 11.** Beam displacements:  
 а — at a load of 18 kN, б — at a load of 21 kN, в — at a load of 24 kN  
 S o u r c e : compiled by the authors using the PRINCE program

#### 4. Заключение

1. В процессе отладки программы для верификации разработанного конечного элемента была проведена серия тестовых расчетов балки, находящейся в условии трехточечного изгиба. Последующее сравнение результатов расчета с данными экспериментов, проведенных авторами, подтвердило высокую точность разработанного конечного элемента.

2. Данный конечный элемент адаптирован к ВК ПРИНС и в составе этого программного комплекса может быть использован инженерами проектных и научных организаций для практических расчетов железобетонных конструкций.

Таким образом, ВК ПРИНС может быть успешно использован для решения широкого класса инженерных задач.

#### Список литературы

1. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2005. 245 с.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.
3. Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. UK: John Wiley & Sons Ltd, 1977. 488 p.
4. Oden J.T. Finite elements in nonlinear continua. New York: McGraw, Hill Book Company, 1972. 464 p.
5. СЕВ, СЕВ-FIP Model Code 1990 / СЕВ Bulletin d'Information № 213/214. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993. 437 p.

6. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses // *ACI Journal Proceedings*. 1969. Vol. 66. No. 8. P. 656–666.
7. Launay P., Gachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress // *ACI Spec. Publ.* 1972. Vol. 34. P. 269–282.
8. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions // *ACI Journal*. October 1970. Vol. 67. No. 10. P. 802–807.
9. Корсун В.И., Недорезов А.В., Макаренко С.Ю. Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // *Современное промышленное и гражданское строительство*. 2014. Т. 10. № 1. С. 65–78. EDN THXXCZ
10. Hansen T.C. Triaxial test with concrete and cement paste: Report № 319 // Lyngby: Technical University of Denmark, 1995. 54 p.
11. Dennis J., More J.J. Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory // *Siam Review*. January 1977. Vol. 19. No. 1. P. 46–89.
12. Matthies H., Strang G. The Solution of Nonlinear Finite Element Equations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979. Vol. 14. P. 1613–1626.
13. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // *Proceedings of IABSE. Structural Engineering*. 1975. Report 19. Section III. P. 1–30.
14. von Mises R. *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand* // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. (Mathematisch-Physikalische Klasse)*. 1913. Vol.1. P. 582–592.
15. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams // *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*. June 1977. Vol. 103. No. EM3. P. 395–410.
16. Обернихин Д.В., Никулин А.И. Экспериментальные исследования прочности, трещиностойкости и деформативности железобетонных балок трапециевидного и прямоугольного поперечных сечений // *Инновационная наука*. 2016. № 8-2. С. 73–77.
17. Римшин В.И., Амелин П.А. Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в программной среде Abaqus // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 6. С. 552–563. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>
18. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // *South Florida Journal of Development*. 2021. Vol. 2 No. 4. P. 5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
19. Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. No. 5. С. 380–389. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
20. Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. No 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-671-627>

## References

1. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2005. (In Russ.)
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition*. McGraw-Hill; 2005.
3. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd; 1977.
4. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972.
5. CEB, *CEB-FIP Model Code 1990 / CEB Bulletin d'Information № 213/214*. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993.
6. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *ACI Journal Proceedings*. 1969;66(8):656–666.
7. Launay P., Gachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress. *ACI Spec. Publ.* 1972;34: 269–282.
8. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions. *ACI Journal*. October 1970;67(10):802–807.
9. Korsun V.I., Nedorezov A.V., Makarenko S.Yu. Comparative analysis of strength criteria for concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014;10(1):65–78. (In Russ.) EDN THXXCZ
10. Hansen T.C. Triaxial test with concrete and cement paste: Report № 319. Lyngby, "Technical University of Denmark", 1995.
11. Dennis J., More J.J. Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory. *Siam Review*. January 1977;19(1):46–89.
12. Matthies H., Strang G. The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979;14:1613-1626.

13. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. *Proceedings of IABSE. Structural Engineering*. 1975;19(III):1–30.
14. von Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand [Mechanics of Solid Bodies in Plastic Deformation State]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. (Mathematisch-Physikalische Klasse)*. 1913;1:582–592.
15. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*. June 1977;103(EM3):395–410.
16. Obernikhin D.V., Nikulin A.I. Experimental studies of strength, crack resistance and deformability of reinforced concrete beams of trapezoidal and rectangular cross sections. *Innovative Science*. 2016;(8–2):73–77. (In Russ.)
17. Rimshin V.I., Amelin P.A. Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):552–563. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>
18. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
19. Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
20. Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>