О ПОСТРОЕНИИ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИКВИДАЦИИ ПОРТФЕЛЯ

Баранова Е.А., Шорохов С.Г.

Российский Университет дружбы народов, Москва, Россия, s.shor@mail.ru

Методы обратной задачи вариационного исчисления применяются к задачам управления портфелями ценных бумаг, а именно, к задаче об оптимальной ликвидации портфеля.

Ключевые слова: обратная задача вариационного исчисления, оптимальная ликвидация портфеля.

Оптимальная ликвидация портфеля ценных бумаг

Задача об оптимальной ликвидации портфеля ценных бумаг [1] состоит в нахождении динамической торговой стратегии, при которой заданный при $t = t_0$ портфель ценных бумаг $x(t_0) = (x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$ к моменту времени $t = T$ будет полностью распродан, т.е. $x^i(T) = 0,\ i = \overline{1,n}$, при этом торговая стратегия $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ будет являться экстремалью функционала вида

$$C = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt, \tag{1}$$

моделирующего потери инвестора при ускоренной продаже значительного пакета ценных бумаг. При определенных допущениях уравнения, определяющие торговую стратегию, будут представлять собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а именно, систему уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0,\ i = \overline{1,n} \tag{2}$$

для функции Лагранжа $L(t, x, \dot{x})$ (штрафной функции).

Обратная задача вариационного исчисления

Классическая постановка обратной задачи вариационного исчисления (ОЗВИ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}^i = F^i(t, x, \dot{x}),\ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

состоит в нахождении симметричной невырожденной матрицы $(g_{ij}(t, x, \dot{x}))$, такой, что

$$g_{ij}\,(\ddot{x}^j - F^j) \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{4}$$

для некоторой функции Лагранжа $L(t, x, \dot{x})$ [2]. Для этого требуется найти решение системы уравнений с частными производными первого порядка

$$g_{ij} = g_{ji},\ \Gamma(g_{ij}) = g_{ik}\Gamma^k_j + g_{jk}\Gamma^k_i,\ g_{ik}\Phi^k_j = g_{jk}\Phi^k_i,\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j},\ \det(g_{ij}) \neq 0, \tag{5}$$

где $\Gamma^i_j = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j}$, $\Phi^i_j = -\frac{\partial F^i}{\partial x^j} - \Gamma^k_j\Gamma^i_k - \Gamma(\Gamma^i_j)$, $\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + F^i\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ (здесь индексы изменяются от 1 до n, по повторяющимся индексам производится суммирование) [3], [4].

Основные результаты

В работе для портфеля, состоящего из двух ценных бумаг ($n = 2$), рассматриваются стратегии ликвидации портфеля вида (3), квадратичные относительно первых производных $\dot x$, допускающие некоторую штрафную функцию $L(t, x, \dot x)$. Обсуждаются частные случаи, когда система уравнений (5) может быть проинтегрирована.

Тогда система уравнений, определяющих стратегию ликвидации портфеля, примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv g_{ij}\, \ddot x^j + f_i = 0, \tag{6}$$

где $f^j = -g_{ij}F^j$, при этом штрафная функция $L(t, x, \dot x)$ восстанавливается по формулам

$$L(t,x,\dot x) = L^{(2)}(t,x,\dot x) + L^{(1)}_i(t,x)\, \dot x^i + L^{(0)}(t,x), \tag{7}$$

$$L^{(2)}(t,x,\dot x) = \int_0^1 (1-\tau)\, g_{ij}(t,x,\tau\dot x)\, \dot x^i \dot x^j\, d\tau, \tag{8}$$

$$L^{(1)}_i(t,x) = \int_0^1 \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot x^i}(t,\tau x,0) - \frac{\partial f_i}{\partial \dot x^j}(t,\tau x,0)\right) x^j\, d\tau + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x^i}, \tag{9}$$

$$L^{(0)}(t,x) = -\int_0^1 f_i(t,\tau x,0)\, x^i\, d\tau + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}, \tag{10}$$

с точностью до произвольной функции $\varphi(t,x)$ [2].

Литература

1. *Almgren R., Chriss N.* Optimal execution of portfolio transactions // Journal of Risk. – Vol. 3. – 2001. – Pp.5-40.
2. *Filippov, V. M.; Savchin, V. M.; Shorokhov, S. G.* Variational principles for nonpotential operators. Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 40. J. Math. Sci. 68 (1994), no. 3, 275-398.
3. *Douglas, J.* Solution of the inverse problem of the calculus of variations. Trans. Am. Math. Soc. 50 (1941), 71–128.
4. *Sarlet W., Thompson G., Prince G.E.* The inverse problem in the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas's analysis. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 2897-2919.

ON THE CONSTRUCTION OF COST FUNCTION IN OPTIMAL PORTFOLIO LIQUIDATION PROBLEMS

Baranova E.A., Shorokhov S.G.

Russian Peoples Friendship University, Moscow, Russia, s.shor@mail.ru

Methods of the Inverse Problem of the Calculus of Variations are applied to the problem of optimal portfolio liquidation.

Key words: inverse problem of the calculus of variations, optimal portfolio liquidation.