УДК 541.13

О скорости звука в двухфазной и двухкомпонентной среде

М. Б. Вилка Чаича, С. Юнусова, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Получено выражение для скорости распространения малых возмущений (скорости звука) в среде, состоящей из жидкости, пузырьков пара и частиц металла. При этом сделано предположение, что рассматриваемая система находится с состоянии термодинамического равновесия, пузырьки пара и частицы металла распределены в жидкости однородно, металл несжимаем ($\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = 0$), размеры пузырьков и металлических частиц, а также расстояние между ними значительно меньше длины звуковой волны.

Ключевые слова: скорость звука, пузырьки пара, давление.

Обозначим через α и β долю общего объёма, приходящуюся на паровую фазу и металлическую компоненту в элементарном объёме смеси. Тогда часть объёма, занимаемая жидкостью, определяется величиной $(1-\alpha-\beta)$. В этом случае плотность смеси ρ выражается через истинные плотности жидкости ($\rho_{\text{ж}}$), пара ($\rho_{\text{п}}$) и металла ($\rho_{\text{м}}$) следующим образом [1]:

$$\rho = \alpha\rho_{\text{п}} + \beta\rho_{\text{м}} + (1-\alpha-\beta)\rho_{\text{ж}}. \tag{1}$$

Отметим, что металлическая компонента как несжимаемая занимает фиксированную часть общего объёма жидкой и паровой фаз могут изменяться за счёт сжимаемости. При этом будем считать, что отношение масс жидкости и пара в элементарном объёме сохраняется, что означает отсутствие фазового перехода жидкость-пар:

$$\frac{\alpha\rho_{\text{п}}}{(1-\alpha-\beta)\rho_{\text{ж}}} = \text{const}, \quad \rho_{\text{п}} = \text{const}\frac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha}\rho_{\text{ж}}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1$.

В [2, 3] показано, что равенство (2) выполняется только в том случае, когда скорость пузырьков пара относительно жидкости равна нулю.

Наряду со средней плотностью смеси ρ введём среднее давление P, определяемое равенством, аналогичным (1):

$$P = \alpha P_{\text{п}} + \beta P_{\text{м}} + (1-\alpha-\beta)P_{\text{ж}}, \tag{3}$$

где $P_{\text{п}}$, $P_{\text{м}}$, $P_{\text{ж}}$ — давление в пузырьке пара, металлической компоненте и жидкости соответственно.

При термодинамическом равновесии двух фаз давление пара в пузырьке $P_{\text{п}}$ связанно с давлением в жидкости $P_{\text{ж}}$ равенством [4]:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{ж}} + \frac{2\sigma}{R}, \tag{4}$$

где R — радиус парового пузырька, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Если нам известно термическое уравнение состояния пара в пузырьке

$$P_{\text{п}} = f(V_{\text{п}}, T),$$

Статья поступила в редакцию 24 ноября 2010 г.

где $V_п$ — объем пузырька, T — температура пара в пузырьке, то поскольку $V_п = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, из него можно определить радиус парового пузырька R как функцию давления $P_п$, которая является функцией давления в жидкости $P_ж$.

Подставляя из (4) в (3), получаем следующее выражение для P:

$$P = (1-\beta)P_ж + \beta P_м + \alpha\frac{2\sigma}{R}. \tag{5}$$

Продифференцируем равенство (1) по P, учитывая, что $\beta = \mathrm{const}$, $\dfrac{\mathrm{d}\rho_м}{\mathrm{d}P} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P} = \alpha\frac{\mathrm{d}\rho_п}{\mathrm{d}P_п}\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P} + (1-\alpha-\beta)\frac{\mathrm{d}\rho_ж}{\mathrm{d}P_ж}\frac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P} + (\rho_п - \rho_ж)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}. \tag{6}$$

Если (1) рассматривать как эффективную плотность среды, а P (3) её давление, то величина $\left(\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_s = c^2$ определяет квадрат скорости малых возмущений в среде. Поскольку

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho_п}{\mathrm{d}P_п}\right)_s = \frac{1}{c_п^2}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\rho_ж}{\mathrm{d}P_ж}\right)_s = \frac{1}{c_ж^2}, \tag{7}$$

где $c_п$ и $c_ж$ — скорости малых возмущений в паре и жидкости соответственно, то (6) можно представить в виде:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha}{c_п^2}\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P} + (1-\alpha-\beta)\frac{1}{c_ж^2}\frac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P} + (\rho_п - \rho_ж)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}. \tag{8}$$

Из (5) находим $P_ж$ в виде

$$P_ж = \frac{1}{(1-\beta)}\left(P - \beta P_м - \alpha\frac{2\sigma}{R}\right), \tag{9}$$

подставляем в (4) и находим $P_п$ как функцию P:

$$P_п = \frac{1}{(1-\beta)}\left(P - \beta P_м + (1-\alpha-\beta)\frac{2\sigma}{R}\right); \tag{10}$$

где α зависит от P, P зависит от $P_п$.

Дифференцируем (10) по P и находим $\dfrac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P}$:

$$\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P} = \frac{1 - \frac{2\sigma}{R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}}{\left((1-\beta) + (1-\beta-\alpha)\frac{2\sigma}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п}\right)}. \tag{11}$$

Дифференцируем (9) по P и, учитывая (11), получаем выражение $\dfrac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P}$:

$$\frac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P} = \frac{\left(1 - \frac{2\sigma}{R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}\right)\left(1 + \frac{2\sigma}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п}\right)}{\left((1-\beta) + (1-\alpha-\beta)\frac{2\sigma}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п}\right)}. \tag{12}$$

Дифференцируем (2) по P и находим $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}$:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P} = \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(1-\beta)}\left(-\frac{1}{\rho_п c_п^2} + \frac{1}{\rho_ж c_ж^2}\left(1 + \frac{2\sigma}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п}\right)\right)\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P}. \tag{13}$$

Поскольку объем парового пузырька $V_п = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, то $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п} = \dfrac{1}{4\pi R^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}V_п}{\mathrm{d}P_п}\right)$.

Учитывая, что рассматриваемая система изолирована и при равновесии двух фаз одного и того же вещества давление является функцией температуры, изменение объёма парового пузырька, вызванное изменением давления, следует рассматривать как процесс адиабатический. Если ввести адиабатический коэффициент сжимаемости (не учитывание фазового перехода означает не учитывание изменения температуры) $\beta_s = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_s$, то $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п}$ можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P_п} = -\frac{R}{3}\beta_s, \quad \beta_s > 0. \tag{14}$$

Из равенств (11), (12) и (13) с учётом (14) определяем $\dfrac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P}$, $\dfrac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P}$, $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P}$:

$$\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{F_1 + \frac{2\sigma}{R}F_2}, \quad \frac{\mathrm{d}P_ж}{\mathrm{d}P} = \left(1 - \frac{2\sigma}{3R}\beta_s\right)\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P}, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}P} = F_2\frac{\mathrm{d}P_п}{\mathrm{d}P}; \tag{15}$$

где

$$F_1 = \left((1-\beta) - (1-\alpha-\beta)\frac{2\sigma}{3R}\beta_s\right),$$

$$F_2 = \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(1-\beta)}\left(-\frac{1}{\rho_п c_п^2} + \frac{1}{\rho_ж c_ж^2}\left(1 - \frac{2\sigma}{3R}\beta_s\right)\right).$$

Подставляем (15) в (8) и получаем выражение для обратной величины квадрата скорости звука в рассматриваемой среде:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha}{(1-\beta)}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\alpha + (1-\alpha-\beta)\frac{\rho_ж}{\rho_п}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha c_ж^2}\left((1-\alpha-\beta) + \alpha\frac{\rho_п}{\rho_ж}\right)\left(1 - \frac{2\sigma}{3R}\beta_s\right)\right\}\frac{1}{\left(F_1 + \frac{2\sigma}{R}F_2\right)}. \tag{16}$$

Рассмотрим предельные случаи.

1. $\alpha = 0$, пузырьки пара в среде отсутствуют (в этом случае равенство (2) не существует). Тогда из (16) следует:

$$c^2 = \frac{c_ж^2}{1-\beta}. \tag{17}$$

Равенство (17) означает, что при наличии металлических частиц в жидкости скорость звука в смеси больше, чем в жидкости.

2. $\beta = 0$, $\sigma = 0$; металлические частицы в жидкости отсутствуют, в выражении для давления пара в пузырьке не учитывается член лапласовского давления:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha}{c_п^2}\left(\alpha + (1-\alpha)\frac{\rho_ж}{\rho_п}\right) + \frac{(1-\alpha)}{c_ж^2}\left((1-\alpha) + \alpha\frac{\rho_п}{\rho_ж}\right). \tag{18}$$

3. $\sigma = 0$; в выражении для $P_п$ отсутствует член лапласовского давления:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\left\{\frac{\alpha}{c_п^2}\left(\alpha + (1-\alpha-\beta)\frac{\rho_ж}{\rho_п}\right) + \frac{(1-\alpha-\beta)}{c_ж^2}\left((1-\alpha-\beta) + \alpha\frac{\rho_п}{\rho_ж}\right)\right\}. \tag{19}$$

Поскольку $\rho_{\text{п}} \ll \rho_{\text{ж}}$ и $c_{\text{п}} \ll c_{\text{ж}}$, основной вклад в (19) даёт первый член. Тогда для c^2 получаем следующее выражение:

$$c^2 = \frac{(1-\beta)^2}{\alpha\left((1-\alpha-\beta)+\alpha\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)}\frac{\rho_{\text{п}}c_{\text{п}}^2}{\rho_{\text{ж}}} \approx \frac{(1-\beta)^2}{\alpha\left((1-\alpha-\beta)+\alpha\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)}\frac{P_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}, \tag{20}$$

поскольку в рассматриваемом случае $P_{\text{п}} \approx \rho_{\text{п}}c_{\text{п}}^2$ и $P_{\text{п}} = P_{\text{ж}}$ при $\sigma = 0$.

При грубой оценке c^2 выражение (20) можно упростить, если пренебречь членом $\alpha\dfrac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}} \ll 1$, что приводит к равенству:

$$c^2 = \frac{(1-\beta)^2}{\alpha(1-\alpha-\beta)}\frac{P_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}. \tag{21}$$

Для примера рассмотрим конкретные значения c.

1.

$$\begin{cases} P_{\text{ж}} = 1\text{бар}, \\ \rho_{\text{ж}} = 1\text{г}/\text{см}^2, \\ \alpha = 0,1, \\ \beta = 0,01. \end{cases}$$

$c = 33,3$ м/сек.

Из рассмотренного следует, что металлические частицы увеличивают, а пузырьки пара уменьшают скорость звука в жидкости.

Литература

1. *Crespo A.* Sound and Shock Waves in Liquids Containing Bubbles // The Physics of Fluids. — 1969. — Vol. 12, No 11.
2. *Campbell I. J., Pitcher A. S.* Shock Waves in a Liquid Containing Gas Bubbles // Proceedings of the Royal Society of London. — 1958. — Vol. 243, No 1235.
3. *Hsieh D., Plesset M. S.* On the Propagation of Sound in a Liquid Containing Gas Bubbles // The Physics of Fluids. — 1961. — Vol. 4, No 10.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с. [*Landau L. D., Lifshic E. M.* Gidrodinamika. — M.: Nauka, 1988. — 736 s.]

UDC 541.13

On Sound Velocity in Two-Phase and Two-Component Medium

M. B. Wilka Chaicha, S. Yunusova, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

We have obtained an expression for the velocity of propagation of small perturbations (sound velocity) in the medium consisting of fluid vapour bubbles and metal particles. In addition, we have assumed that the system is in thermodynamical equilibrium, vapour bubbles and metal particles are distributed homogeneously, the metal is incompressible ($\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = 0$), the bubble and particle sizes and the distance between them is much smaller than sound wave length.

Key words and phrases: speed of a sound, steam vials, pressure.