УДК 517.958

Нелокальная корректность смешанной задачи в ограниченном прямоугольнике для уравнения Кавахары

Р. В. Кувшинов

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Устанавливается результат нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Кавахары в ограниченном прямоугольнике при естественных условиях на граничные данные.

Ключевые слова: линеаризованное уравнение Кавахары, решения потенциального типа.

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = f(t,x) \tag{1}$$

(a и b некоторые действительные константы) в прямоугольнике $Q_T = (0,T)\times(0,1)$ ($T > 0$ — произвольно).

Для данной задачи установим начальное условие:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1]; \tag{2}$$

и для $t \in [0,T]$ следующие граничные условия:

$$u(t,0) = u_1(t), \quad u_x(t,0) = u_2(t),$$
$$u(t,1) = u_3(t), \quad u_x(t,1) = u_4(t), \quad u_{xx}(t,1) = u_5(t). \tag{3}$$

Различное число условий на правой и левой границе обусловлено нечётным порядком уравнения.

Также рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения (1) в левой полуполосе $\Pi_T^- = (0,T)\times\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_- = (0,-\infty)$) с начальными условиями (2) (для $x < 0$) и тремя граничными функциями

$$u(t,0) = u_3(t), \quad u_x(t,0) = u_4(t), \quad u_{xx}(t,0) = u_5(t). \tag{4}$$

Глобальная корректность (существование, единственность и непрерывная зависимость решений задачи от начальных и краевых условий в соответствующих нормах) устанавливается для задачи (1)–(3). Впервые это уравнение было получено Кавахарой в 1972 году в работе [1] для описания длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (см. также [2,3]). В литературе уравнение Кавахары также называют уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ) 5-го порядка, или сингулярно возмущённым уравнением КдФ [4,5].

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t,x).$$

Для уравнения Кавахары наиболее изучена задача Коши [6–11]. В частности в серии работ [9–11] установлена глобальная корректность задачи (1), (2) для начальной функции u_0 из пространства $H^s(\mathbb{R})$, при $s > -1/2$.

Статья поступила в редакцию 30 августа 2010 г.

Если область распространения волн рассматривается как ограниченная (с одного или обоих концов), вместо задачи Коши естественным образом возникают смешанные задачи. Изучение таких задач для уравнения Кавахары началось сравнительно недавно. В работе [12] доказана глобальная корректность смешанной задачи для уравнения (1) в полуполосе $\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+$ в классах функций, бесконечно гладких и экспоненциально быстро убывающих при $x \to +\infty$. Аналогичный результат при нулевых краевых данных в классе менее гладких (H^5 по пространственной переменной) и также экспоненциально быстро убывающих функций приведён в [13]. В работе [14] исследованы вопросы существования и единственности слабых решений смешанной задачи для обобщённого уравнения Кавахары в Π_T^+, если начальная функция (возможно, с некоторым степенным весом на $+\infty$) принадлежит пространствам L_2 или H^2.

Смешанная задача для уравнения Кавахары в Q_T была изучена в работах [15, 16] — при нулевых краевых функциях, нулевой правой части уравнения и начальной функции из H^5 была доказана глобальная корректность. В [17] была рассмотрена краевая задача на ограниченном интервале для стационарного уравнения Кавахары. В работе [13] был сформулирован результат глобальной корректности смешанной задачи в ограниченном прямоугольнике при условиях, упомянутых выше.

Заметим, что в отличие от уравнения (1) смешанные задачи для уравнения КдФ изучены более полно (см., например, работы [18, 19] и приведённую в них библиографию). Поэтому методы исследования уравнения КдФ могут найти применение в изучении уравнения Кавахары.

Основным результатом настоящей работы является глобальная корректность задачи (1), (2), (3) при $u_0 \in H^k(0,1)$, $u_1, u_3 \in H^{(k+2)/5}(0,T)$, $u_2, u_4 \in H^{(k+1)/5}(0,T)$, $u_5 \in H^{k/5}(0,T)$, $k \geqslant 0$ целое. Подобные условия гладкости граничных данных являются естественными, поскольку индуцированы свойствами оператора $\partial_t - \partial_x^5$в следующем смысле. Рассмотрим задачу Коши для линеаризованного однородного уравнения Кавахары при $a = b = 0$, $v_t - v_{xxxxx} = 0$, $v(0,x) = v_0(x)$. Тогда если $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то, как легко показать методами работы [20], существует единственное решение этой задачи $v(t,x) \in C(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}))$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\left\| D_t^{2/5} v(\cdot, x) \right\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = \left\| D_t^{1/5} v_x(\cdot, x) \right\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = \| v_{xx}(\cdot, x) \|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = c(s) \| v_0 \|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Подобный результат был достигнут в работе [21], где была установлена глобальная корректность смешанной задачи в полуполосе Π_T^+ для уравнения (1) также при естественных условиях на граничные данные $u_0 \in H^k(0,1)$, $u_1 \in H^{(k+2)/5}(0,T)$, $u_2 \in H^{(k+1)/5}(0,T)$, $k \geqslant 2$ целое. Аналогичные результаты глобальной корректности смешанной задачи в ограниченном прямоугольнике Q_T для уравнения КдФ (в этом случае остаётся только первое, третье и четвёртое из краевых условий (3)) также при естественных условиях на граничные данные получены, в частности, в [19].

2. Обозначения. Формулировка основного результата

Пусть $\eta(x)$ — некоторая функция, такая, что $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(x) \geqslant 0$, $\eta'(x) \geqslant 0$ $\forall x$, $\eta(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ для $x \geqslant 1$, $\eta'(x) > 0$ для $0 < x < 1$. Положим

$$P(\partial_x) = \partial_x^5 - b\partial_x^3 - a\partial_x.$$

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что I — некоторый интервал на $\mathbb{R}$ (ограниченный или неограниченный), k, l, m, n, j — целые неотрицательные числа, $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$. Символом $[s]$ будем обозначать целую часть числа $s \geqslant 0$. Через $C_b^k(\overline{I})$ обозначим пространство функций с непрерывными и ограниченными в $\overline{I}$ производными до порядка k включительно. Положим $C_b(\overline{I}) = C_b^0(\overline{I})$. Если интервал I ограничен, индекс b будем опускать.

Символы $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}^{-1}[f]$ используются соответственно для обозначения прямого и обратного преобразований Фурье, понимаемых как операции в $L_2(\mathbb{R})$. В частности, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (пространство Шварца быстро убывающих функций)

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Положим $H^s = H^s(\mathbb{R}) = \{f : \ \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|)^s \widehat{f}(\xi)] \in L_2(\mathbb{R})\}$. Через $H^s(I)$ обозначим пространство сужений на I функций из H^s. Положим $H_0^s(I) = \{f \in H^s(\mathbb{R}) : \ \operatorname{supp} f \subset \overline{I}\}$. Свойства пространств H^s и H_0^s можно найти, например, в [22].

В дальнейшем если $I = \mathbb{R}$, то символ $\mathbb{R}$ в обозначениях для функциональных пространств будем опускать: $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $C_b = C_b(\mathbb{R})$ и т.д., а если $I = \mathbb{R}_+$ или $I = \mathbb{R}_-$, то будем использовать нижний индекс $+$ или $-$, а именно: $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $L_{p,-} = L_p(\mathbb{R}_-)$, $H_+^s = H^s(\mathbb{R}_+)$, $H_-^s = H^s(\mathbb{R}_-)$, $C_{b,+} = C_b(\overline{\mathbb{R}_+})$, $C_{0,+}^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,-}^k = W_p^k(\mathbb{R}_-)$ и т.д.

Если $\mathcal{B}$ – некоторое банахово пространство, то через $C_b(\overline{I}; \mathcal{B})$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных отображений отрезка $\overline{I}$ в $\mathcal{B}$ (если I ограничен, то индекс b, разумеется, опускается). Символы $L_p(I; \mathcal{B})$ используются в общепринятом смысле.

Введём понятие обобщённого решения рассматриваемой задачи (1)–(3).

Пусть $u_0 \in L_2$, $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in L_2(0, T)$, $f \in L_2(Q_T)$.

Определение 1. Функция $u(t, x) \in L_2(Q_T)$ называется обобщённым решением задачи (1)–(3), если для любой функции $\varphi(t, x)$, такой, что $\varphi \in L_2(0, T; H^5(0, 1))$, $\varphi_t \in L_2(0, T; L_2(0, 1))$, $\varphi|_{t=T} = 0$, $\varphi|_{x=0} = \varphi_x|_{x=0} = \varphi_{xx}|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = \varphi_x|_{x=1} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left[u(\varphi_t - \varphi_{xxxxx} + b\varphi_{xxx} + a\varphi_x) + \frac{1}{2}u^2\varphi_x + f\varphi \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 u_0(x)\varphi(0, x)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ \int\limits_0^T (-u_1(t)\varphi_{xxxx}(t, 0) + u_2(t)\varphi_{xxx}(t, 0) - u_3(t)\varphi_{xxxx}(t, 1) +$$
$$+ u_4(t)\varphi_{xxx}(t, 1) - u_5(t)\varphi_{xx}(t, 1))\,\mathrm{d}t = 0.$$

Решение рассматриваемой задачи строится в следующих классах функций.

Определение 2. Для $T > 0$ и $k \geqslant 0$ через $X_k((0, T) \times I)$ (I может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_-$ или $I = (0, 1)$) обозначим пространство функций $u(t, x)$ таких, что

$$\partial_t^m u \in C\big([0, T]; H^{k-5m}(I)\big), \quad m \leqslant k/5,$$

$$\partial_x^l u \in C_b\big(\overline{I}; H^{(k-l+2)/5}(0, T)\big), \quad l \leqslant k + 2, \quad \partial_t^m \partial_x^l u \in L_8\big(0, T; C_b(\overline{I})\big), \quad 5m + l \leqslant k.$$

Для описания свойств правой части уравнения (1) введём следующее функциональное пространство.

Определение 3. Положим для $T > 0$, $k \geqslant 0$ и интервала I (I может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_-$ или $I = (0,1)$) $M_k(I) = \{f : \ \partial_t^m f \in L_2(0,T; H^{k-5m}(I)),\ m \leqslant m_0 = [(k+2)/5]\}$.

Лемма 1. *Пусть u, v — функции из $X_k(Q_T)$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|uv_x\|_{M_k(Q_T)} \leqslant c(T,k)\|u\|_{X_k(Q_T)}\|v\|_{X_k(Q_T)} \quad \text{для } k \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\|uu_x\|_{M_k(Q_T)} \leqslant c(T,k)\|u\|_{X_k(Q_T)}\|u\|_{X_{k-1}(Q_T)} \quad \text{для } k \geqslant 1. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно доказательство неравенства (5) в случае $k = 0$

$$\|uv_x\|_{M_0(Q_T)} = \|uv_x\|_{L_2(Q_T)} = \left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2 v_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_0^T \sup_{x\in[0,1]} v_x^2 \int\limits_0^1 u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant c\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \left[v_{xx}^2 + v^2\right]\mathrm{d}x \int\limits_0^1 u^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c\|u\|_{C([0,T];L_2(0,1))}\big(\|v_{xx}\|_{C([0,1];L_2(0,T))} + \|v\|_{L_2(0,T;C[0,1])}\big) \leqslant c\|u\|_{X_0(Q_T)}\|v\|_{X_0(Q_T)}.$$

Пусть теперь $k \geqslant 1$.

Докажем сначала неравенство (6) для $k = 1$

$$\|uu_x\|_{M_1(Q_T)} \leqslant c\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (u_x^2 + |uu_x| + |uu_{xx}|)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\int\limits_0^T \sup_{x\in[0,1]} u_x^2 \int\limits_0^1 u_x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + c_2\|u\|_{C(Q_T)}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (u_{xx}^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_3\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \left[u_{xx}^2 + u^2\right]\mathrm{d}x \int\limits_0^1 u_x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \|u\|_{C([0,1];H^{3/5}(0,T))}\times$$
$$\times\big(\|u_{xx}\|_{C([0,1];L_2(0,T))} + \|u_x\|_{C([0,1];L_2(0,T))}\big) \leqslant$$
$$\leqslant c_4\|u\|_{C([0,T];H^1(0,1))}\big(\|u_{xx}\|_{C([0,1];L_2(0,T))} + \|u\|_{L_2(0,T;C[0,1])}\big) +$$
$$+ \|u\|_{X_1(Q_T)}\|u\|_{X_0(Q_T)} \leqslant c_5\|u\|_{X_1(Q_T)}\|u\|_{X_0(Q_T)}.$$

Примем $k = 5n+i$, где $i = 0,1,2,3,4,5$ и $m_0 = \left[\dfrac{k+2}{5}\right]$. Тогда $m_0 = n$ при $i = 0,1,2$ и $m_0 = n+1$ при $i = 4,5$.

Пусть сначала $m = 0$. Тогда $\partial_x^\beta(uv_x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{\beta} C_\beta^\alpha \partial_x^\alpha u\,\partial_x^{\beta-\alpha+1}v$, где $\beta \leqslant k$.

Если $\alpha = 0$,

$$\|u\partial_x^{\beta+1}v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|u\|_{C(\overline{Q_T})}\|\partial_x^{\beta+1}v\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|_{C([0,1];H^{(k+2)/5}(0,T))}\|\partial_x^{\beta+1}v\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant c\|u\|_{X_k(Q_T)}\|v\|_{X_{k-1}(Q_T)};$$

это неравенство следует из вложения $H^{1/2+\varepsilon}(0,T) \subset C(0,T)$ для любого $\varepsilon > 0$: $(k+2)/5 \geqslant 3/5 > 1/2$.

Если $\alpha \geqslant 1$,

$$\|\partial_x^\alpha u \partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|\partial_x^\alpha u\|_{C([0,T];L_2(0,1))} \|\partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \leqslant \|u\|_{C([0,T];H^k(0,1))} \|v\|_{L_2(0,T;C^k[0,1])} \leqslant c\|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_k(Q_T)}.$$

Это неравенство также можно использовать для доказательства (6) в случае $k \geqslant 2$, $\alpha \geqslant 2$ и $v \equiv u$. Заметим, что в этом случае $\|\partial_x^{\beta-\alpha+1} u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \|\partial_x^{k-1} u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \|u\|_{X_{k-1}(Q_T)}$.

Случай $\alpha = 1$ ($k \geqslant 2$, $v \equiv u$) рассмотрим отдельно

$$\|u_x \partial_x^\beta u\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|u_x\|_{C([0,T];L_2(0,1))} \|\partial_x^\beta u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \leqslant \|u\|_{C([0,T];H^{k-1}(0,1))} \|\partial_x^k u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \|u\|_{X_{k-1}(Q_T)} \|u\|_{X_k(Q_T)}.$$

Пусть $0 < m \leqslant n$. Тогда $\partial_t^m (uv_x) = u\partial_t^m v_x + \partial_t^m u v_x + \sum\limits_{j=1}^{m-1} C_{m-1}^j \partial_t^j u \partial_t^{m-j} v_x$, $\beta \leqslant k - 5m \leqslant k-5$.

Для $\alpha = 0$

$$\|u\partial_t^m \partial_x^{\beta+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|u\|_{C(Q_T)} \|\partial_x^{\beta+1} v\|_{C([0,1];H^m(0,T))} \leqslant \|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_{k-1}(Q_T)},$$

так как $((k-1)-(\beta+1)+2)/5 = (k-\beta)/5 \geqslant m$.

$$\|\partial_t^m u \partial_x^{\beta+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|\partial_t^m u\|_{C([0,T];L_2(0,1))} \|\partial_x^{\beta+1} v\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \leqslant \leqslant \|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_{k-1}(Q_T)},$$

так как $\beta + 1 \leqslant k - 4 < k$.

Для $\alpha \geqslant 1$

$$\|\partial_x^\alpha u \partial_t^m \partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\partial_x^\alpha u\|_{C(\overline{Q_T})} \|\partial_t^m \partial_x^\beta v\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant \leqslant \|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_{k-1}(Q_T)}$$

— это неравенство следует из вложения $H^{1/2+\varepsilon}(0,T) \subset C(0,T)$ для любого $\varepsilon > 0$: $(k-\alpha+2)/5 \geqslant (k-k+5m+2)/5 \geqslant m+2/5 > 1/2$ и того, что $(k-1-\beta+2)/5 \geqslant m$.

$$\|\partial_t^m \partial_x^\alpha u \partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|\partial_t^m \partial_x^\alpha u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \|v\|_{C([0,T];H^{k-5}(0,1))} \leqslant \leqslant \|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_{k-1}(Q_T)},$$

так как $5m + \alpha \leqslant 5m + \beta \leqslant k$.

Для $\alpha \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha u \partial_t^{m-j} \partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|\partial_t^j \partial_x^\alpha u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \times \times \|\partial_t^{m-j} \partial_x^{\beta-\alpha+1} v\|_{C([0,T];L_2(0,1))} \leqslant \|u\|_{X_{k-1}(Q_T)} \|v\|_{X_k(Q_T)},$$

так как $5j+\alpha \leqslant 5(m-1)+k-5m = k-5 < k$ и $5(m-j)+\beta+1 \leqslant 5(m-1)+k-5m+1 \leqslant k-4 < k$.

Пусть теперь $m = n + 1$. В этом случае $k = 5n + 3$ или $k = 5n + 4$. Тогда $\partial_t^{n+1}(uv_x) = u\partial_t^{n+1}v_x + \partial_t^{n+1}uv_x + \sum_{j=1}^{n} C_n^j \partial_t^j u \partial_t^{n+1-j} v_x$ и $k - 5m = i - 5 < 0$.

$$\|\partial_t^j u \partial_t^{n+1-j} v_x\|_{L_2(0,T;H^{i-5}(0,1))} \leqslant \|\partial_t^j u \partial_t^{n+1-j} v_x\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \\ \leqslant \|\partial_t^j u\|_{L_2(0,T;C[0,1])} \|\partial_t^{n+1-j} v_x\|_{C([0,T];L_2(0,1))} \leqslant \|u\|_{X_k(Q_T)} \|v\|_{X_{k-1}(Q_T)}$$

— это неравенство следует из того, что $5j \leqslant 5n < k$ и $5(n+1-j)+1 = 5n+6-5j \leqslant 5n+1 < k$.

Теперь оценим $u\partial_t^{n+1}v_x$ и $\partial_t^{n+1}uv_x$.

Если $i = 3$, то

$$\|u\partial_t^{n+1}v_x\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,1))} \leqslant \|\left(u\partial_t^{n+1}v\right)_x\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,1))} + \|u_x\partial_t^{n+1}v\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,1))} \leqslant \\ \leqslant \|u\partial_t^{n+1}v\|_{L_2(Q_T)} + \|u_x\partial_t^{n+1}v\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \||u| + |u_x|\|_{C(\overline{Q_T})} \|\partial_t^{n+1}v\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant \\ \leqslant \|u_x\|_{C([0,1];H^{k/5}(0,T))} \|\partial_t^{n+1}v\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant \|u\|_{X_{k-1}(Q_T)} \|v\|_{X_k(Q_T)}$$

— это неравенство следует из вложения $H^{1/2+\varepsilon}(0,T) \subset C(0,T)$ для любого $\varepsilon > 0$: $k/5 = n+3/5 > 1/2$ и того, что $(k+2)/5 = n+1$. $\partial_t^{n+1}uv_x$ оценивается аналогично.

Если $i = 4$, то аналогично предыдущему случаю

$$\|u\partial_t^{n+1}v_x\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,1))} \leqslant \|u\partial_t^{n+1}v_x\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \|u\|_{C(\overline{Q_T})} \|\partial_t^{n+1}v_x\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant \\ \leqslant \|u\|_{C([0,1];H^{(k+1)/5}(0,T))} \|\partial_t^{n+1}v_x\|_{C([0,1];L_2(0,T))} \leqslant \|u\|_{X_{k-1}(Q_T)} \|v\|_{X_k(Q_T)}$$

— это неравенство также следует из вложения $H^{1/2+\varepsilon}(0,T) \subset C(0,T)$ для любого $\varepsilon > 0$: $(k+1)/5 = (5n+5)/5 > 1/2$ и того, что $(k+1)/5 = n+1$. □

Чтобы сформулировать основной результат, введём вспомогательные функции, связанные с условиями согласования граничных данных.

Определение 4. Положим $\varphi_0(x) \equiv u_0(x)$ и для любого натурального m

$$\varPhi_m(x) \equiv \partial_t^{m-1} f(0,x) + P(\partial_x)\varPhi_{m-1}(x) - \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l \varPhi_l(x) \varphi'_{m-l-1}(x).$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in H^k(0,1)$, $u_1, u_3 \in H^{\frac{k+2}{5}}(0,T)$, $u_2, u_4 \in H^{\frac{k+1}{5}}(0,T)$, $u_5 \in H^{\frac{k}{5}}(0,T)$ для целого $k \geqslant 0$ и некоторого $T > 0$. Пусть также $u_1^{(m)}(0) = \varPhi_m(0)$ и $u_3^{(m)}(0) = \varPhi_m(1)$ для $m < k/5$, $u_2^{(m)}(0) = \varPhi'_m(0)$ и $u_4^{(m)}(0) = \varPhi'_m(1)$ для $m < (k-1)/5$, $u_5^{(m)}(0) = \varPhi''_m(1)$ для $m < (k-2)/5$. Тогда задача (1)–(3) корректна в пространстве $X_k(Q_T)$.*

Замечание 1. Будем говорить, что задача корректна в указанном пространстве, если в Q_T существует единственное решение $u(t,x)$ задачи (1)–(3) из пространства $X_k(Q_T)$ и отображение $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, f) \mapsto u$ Липшиц–непрерывно на любом шаре в норме отображения $H^k(Q_T) \times H^{(k+2)/5}(0,T) \times H^{(k+1)/5}(0,T) \times H^{(k+2)/5}(0,T) \times H^{(k+1)/5}(0,T) \times H^{k/5}(0,T) \times M_k(Q_T)$ в $X_k(Q_T)$.

Замечание 2. Установленный результат теми же методами может быть распространён на уравнения с нелинейностью более общего вида $g(u)u_x$, если функция g имеет не более чем линейный порядок роста по $u \to \pm\infty$ (точнее, производная g' ограничена на $\mathbb{R}$).

3. Линейная задача

Рассмотрим смешанную задачу в Π_T^- для линеаризованного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x = f(t,x) \tag{7}$$

с начальными и граничными данными (2), (4).

Обобщённое решение задачи (7), (2), (4) формулируется аналогично определению 1, где в интегральном тождестве отсутствует слагаемое $u^2\varphi_x/2$.

Сформулируем основную лемму о разрешимости линейной задачи в Q_T.

Лемма 2. *Пусть $u_0 \in H^k(0,1)$, $u_1, u_3 \in H^{(k+2)/5}(0,T)$, $u_2, u_4 \in H^{(k+1)/5}(0,T)$, $u_5 \in H^{k/5}(0,T)$, $f \in M_k(Q_T)$ для некоторых $T > 0$ и целого $k \geqslant 0$. Пусть, кроме того, $u_1^{(m)}(0) = \widetilde{\Phi}_m(0)$ и $u_3^{(m)}(0) = \widetilde{\Phi}_m(1)$ для $m \leqslant k/5$, $u_2^{(m)}(0) = \widetilde{\Phi}'_m(0)$ и $u_4^{(m)}(0) = \widetilde{\Phi}'_m(1)$ для $m \leqslant (k-1)/5$, $u_5^{(m)}(0) = \widetilde{\Phi}''_m(1)$ для $m \leqslant (k-2)/5$. Тогда в Q_T существует единственное решение $u(t,x)$ задачи (7), (2), (3) из пространства $X_k(Q_T)$, причём для любого $t_0 \in (0,T]$ справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\|u\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant c(T,k)\Bigg(\|u_0\|_{H^k(0,1)} + t_0^{1/10}\|f\|_{M_k(Q_{t_0})} + \\ + \sum_{m=0}^{m_0-1}\|\partial_t^m f|_{t=0}\|_{H^{k-5(m+1)}(0,1)} + \|u_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|u_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \\ + \|u_3\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|u_4\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \|u_5\|_{H^{k/5}(0,T)}\Bigg).\end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. Построим решение $u(t,x)$ задачи (7), (2), (3) в виде

$$u(t,x) = W(t,x) + V(t,x),$$

где $W(t,x)$ — решение смешанной задачи в $\Pi_{T,1}^- = (0,T)\times(-\infty,1)$ для уравнения (7) с начальным условием (2) и краевыми (4) (граничные функции u_3, u_4, u_5 определены при $x=1$).

Для построения функции $W(t,x)$, продолжив функции u_0 и f с сохранением класса на все действительные значения x, найдём решение $w(t,x)$ соответствующей задачи Коши (7), (2) из пространства $X_k(\Pi_T)$. Для этого воспользуемся результатом статьи [21], в которой было построено такое решение $w(t,x)$, и для любого $t_0 \in (0,T]$ была получена оценка этого решения

$$\|w\|_{X_k(\Pi_{t_0})} \leqslant c(T,k)\Bigg(\|u_0\|_{H^k} + t_0^{1/10}\|f\|_{M_k(\Pi_{t_0})} + \sum_{m=0}^{m_0-1}\|\partial_t^m f|_{t=0}\|_{H^{k-5(m+1)}}\Bigg). \tag{9}$$

Тогда функцию $W(t,x)$ построим в виде $W(t,x) = w(t,x) + v(t,x)$, где $w(t,x)$ — решение задачи Коши (7), (2) из пространства $X_k(\Pi_T)$ и $v(t,x)$ — решение смешанной задачи в $\Pi_{T,1}^-$ для уравнения (7) при $f \equiv 0$ и при нулевой начальной функции и краевых условиях $v(t,1) = u_3 - w(t,1)$, $v_x(t,1) = u_4 - w_x(t,1)$, $v_{xx}(t,1) = u_5 - w_{xx}(t,1)$. В статье [23] было построено решение $v(t,x)$ подобной задачи при граничных условиях (4):

$$v(t,x) = J^-(t,x;\breve{u}_3,\breve{u}_4,\breve{u}_5) + \breve{w}^-(t,x),$$

где

$$\breve{u}_3(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_3(\lambda)](t),$$

$$\breve{u}_4(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_4(\lambda)](t), \quad \breve{u}_5(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_5(\lambda)](t)$$

(χ_{λ_0} — характеристическая функция интервала $(-\lambda_0, \lambda_0)$), J^- — функция потенциального типа с оценкой в пространстве $X_k(\Pi_T^-)$

$$\|J^-(\cdot,\cdot;u_3,u_4,u_5)\|_{X_k(\Pi_T^-)} \leqslant c(T,k)\bigl(\|u_3\|_{H^{(k+2)/5}} + +\|u_4\|_{H^{(k+1)/5}} + \|u_5\|_{H^{k/5}}\bigr) \quad (10)$$

(при условии, что $\widehat{u}(\lambda) = \widehat{u}_4(\lambda) = \widehat{u}_5(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < \lambda_0(a,b)$), а функция $\breve{w}^-$ бесконечно дифференцируема при $t \geqslant 0$, $x \leqslant 0$ и для любых m, l, $x_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\|\partial_t^m \partial_x^l \breve{w}^-\|_{C([0,T];C[-x_0,0])} \leqslant c(x_0,m,l)(\|u_3\|_{L_2} + \|u_4\|_{L_2} + \|u_5\|_{L_2}), \quad (11)$$

Тогда согласно (9)–(11) решение $W(t,x) \in X_k(\Pi_{T,1}^-)$ задачи (7), (2), (4) существует, и выполняется неравенство

$$\|W\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant$$
$$\leqslant c(T,k)\Biggl(\|u_0\|_{H^k(0,1)} + t_0^{1/10}\|f\|_{M_k(Q_{t_0})} + \sum_{m=0}^{m_0-1} \|\partial_t^m f|_{t=0}\|_{H^{k-5(m+1)}(Q_{t_0})} +$$
$$+ \|u_3\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|u_4\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \|u_5\|_{H^{k/5}(0,T)}\Biggr). \quad (12)$$

В силу условий согласования в нуле

$$V_1(t) \equiv u_1(t) - W(t,0) \in H_{0,+}^{(k+2)/5}\Big|_{(0,T)}, V_2(t) \equiv u_2(t) - W_x(t,0) \in H_{0,+}^{(k+1)/5}\Big|_{(0,T)}$$

и, используя неравенства (10) и (11), получим

$$\|V_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|V_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} \leqslant c(T,k)\Biggl(\|u_0\|_{H^k(0,1)} + t_0^{1/10}\|f\|_{M_k(Q_{t_0})} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{m_0-1} \|\partial_t^m f|_{t=0}\|_{H^{k-5(m+1)}(0,1)} + \|u_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|u_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} +$$
$$+ \|u_3\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|u_4\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \|u_5\|_{H^{k/5}(0,T)}\Biggr). \quad (13)$$

Рассмотрим в Q_T следующую задачу (для функции V):

$$V_t - V_{xxxxx} + bV_{xxx} + aV_x = 0, \quad (14)$$

$$V|_{x=0} = V_1, \quad V_x|_{x=0} = V_2, \quad V|_{t=0} = V|_{x=1} = V_x|_{x=1} = V_{xx}|_{x=1} = 0. \quad (15)$$

Чтобы построить решение этой задачи, воспользуемся результатом статьи [21], в которой была рассмотрена краевая задача в Π_T^+:

$$\tilde{u}_t - P(\partial_x)\tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}|_{x=0} = \mu(t),\ \tilde{u}_x|_{x=0} = \nu(t),$$

где функции $\mu \in H_{0,+}^{(k+2)/5}\Big|_{(0,T)}$ и $\nu \in H_{0,+}^{(k+1)/5}\Big|_{(0,T)}$.

Было построено решение этой задачи $\tilde{u}(t,x) \in X_k(\Pi_T^+)$, для которого при любом $\delta \in (0,T]$ выполняется

$$\|\tilde{u}(\cdot,1)\|_{H^{(k+2)/5}(0,\delta)} + \|\tilde{u}_x(\cdot,1)\|_{H^{(k+1)/5}(0,\delta)} + \|\tilde{u}_{xx}(\cdot,1)\|_{H^{k/5}(0,\delta)} \leqslant \\ \leqslant c(k)\delta^{1/2}\big(\|\mu\|_{L_2(0,\delta)} + \|\nu\|_{L_2(0,\delta)}\big). \quad (16)$$

Более того, $\tilde{u}(\cdot,1) \in H_{0,+}^{(k+2)/5}\Big|_{(0,T)}$, $\tilde{u}_x(\cdot,1) \in H_{0,+}^{(k+1)/5}\Big|_{(0,T)}$, $\tilde{u}_{xx}(\cdot,1) \in H_{0,+}^{k/5}\Big|_{(0,T)}$.

Рассмотрим в полуполосе $\Pi_{\delta,1}^-$ задачу (7), (2), (4), где $v_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$, $u_3 \equiv -\tilde{u}(t,1)$, $u_4 \equiv -\tilde{u}_x(t,1)$, $u_5 \equiv -\tilde{u}_{xx}(t,1)$. Тогда аналогично (12) и (13) следует, что решение такой задачи $Z(t,x) \in X_k(\Pi_{\delta,1}^-$ существует и выполняется неравенство

$$\|Z(\cdot,0)\|_{H^{(k+2)/5}(0,\delta)} + \|Z_x(\cdot,0)\|_{H^{(k+1)/5}(0,\delta)} \leqslant c\,\big(\|\tilde{u}(\cdot,1)\|_{H^{(k+2)/5}(0,\delta)} + \\ + \|\tilde{u}_x(\cdot,1)\|_{H^{(k+1)/5}(0,\delta)} + \|\tilde{u}_{xx}(\cdot,1)\|_{H^{k/5}(0,\delta)}\big) \leqslant c(k)\delta^{1/2}(\|\mu\|_{L_2} + \|\nu\|_{L_2}). \quad (17)$$

Очевидно, что $Z(\cdot,0) \in H_{0,+}^{(k+2)/5}\Big|_{(0,\delta)}$ и $Z_x(\cdot,0) \in H_{0,+}^{(k+1)/5}\Big|_{(0,\delta)}$.

Пусть теперь линейный оператор $\Gamma : (\mu,\nu) \to (Z(\cdot,0), Z_x(\cdot,0))$ в пространстве $H_{0,+}^{(k+2)/5}\Big|_{(0,\delta)} \times H_{0,+}^{(k+1)/5}\Big|_{(0,\delta)}$. Тогда для малых δ оценки (16) и (17) обеспечивают обратимость оператора $(E+\Gamma)$ (здесь оператор E — единичный), определяющего $(\mu,\nu) \equiv (E+\Gamma)^{-1}(V_1,V_2)$. Таким образом мы получим желаемое решение задачи (14), (15)

$$V(t,x) \equiv \tilde{u}(t,x) + Z(t,x),$$

где $\|V\|_{X_k(Q_\delta)} \leqslant c(k,T)\left(\|V_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|V_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)}\right)$.

Решение задачи (7), (2), (3) в Q_δ получено и оценивается в пространстве $X_k(Q_\delta)$ правой частью (8). Действуя подобным образом, шаг за шагом, мы получим решение во всем Q_T.

Следует сказать, что процедура построения функции V подразумевает, что $\partial_t^m V$ — будет решением задачи (14), (15), где граничные функции V_1 и V_2 меняются соответственно на $V_1^{(m)}$ и $V_2^{(m)}$.

Единственность обобщённого решения задачи (7), (2), (3) (в смысле, аналогичном определению 1) в пространстве $L_2(Q_T)$ вытекает из разрешимости соответствующей сопряжённой задачи:

$$\varphi_t - \varphi_{xxxxx} + b\varphi_{xxx} + a\varphi_x = g(t,x),$$
$$\varphi|_{t=T} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_x|_{x=0} = \varphi_{xx}|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = \varphi_x|_{x=1} = 0,$$

где $\varphi \in L_2(0,T;H^5(0,1))$, $\varphi_t \in L_2(0,T;L_2(0,1))$. Если сделать замену $\tilde{\varphi} \equiv \varphi(T-t,1-x)$, то сопряжённая задача совпадает с исходной. Таким образом задача (7), (2), (3) является самосопряжённой, и так как решение исходной задачи существует (при $k=5$), то решение (7), (2), (3) — единственно. □

Лемма 3. *Пусть $u_0 \in L_2(0,1)$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \equiv 0$, $F \in L_1(0,T,L_2(0,1))$ для некоторых $T > 0$ и $u(t,x)$ — решение задачи (7), (2), (3) из пространства $X_0(Q_T)$. Тогда для любого $t \in (0,T]$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^1 u^2(t,x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_0^1 u_0^2\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 Fu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \quad (18)$$

Доказательство. В гладком случае это неравенство получается умножением уравнения (7) на $2u(t,x)$ и последующим интегрированием, а в общем случае — замыканием на основе оценки (8). □

4. Исходная задача

Прежде всего докажем результат локальной корректности задачи (1)–(3).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует* $t_0 \in (0,T]$ *такое, что задача* (1)–(3) *корректна в пространстве* $X_k(Q_{t_0})$.

Доказательство. Для любого $t_0 \in (0,T]$ рассмотрим множество функций

$$Z_k(Q_{t_0}) = \{v \in X_k(Q_{t_0}) : \ \partial_t^m v|_{t=0} = \Phi_m \ \text{ для } \ m \leqslant m_0 - 1\}$$

и определим на этом множестве отображение Λ равенством $u = \Lambda v$ для $v \in Z_k(Q_{t_0})$, если функция $u(t,x) \in Z_k(Q_{t_0})$ является решением линейной задачи для уравнения

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x = f - vv_x \tag{19}$$

с граничными условиями (2), (3). Заметим, что функции $\widetilde{\Phi}_m$, вычисленные для задачи (19), (2), (3), совпадают при $m < k/5$ с функциями Φ_m для соответствующей исходной задачи. Кроме того, согласно лемме 1 $vv_x \in M_k(Q_{t_0})$ и, следовательно, в силу леммы 2 указанное отображение Λ существует. Более того, в силу неравенства (8) выполняется следующее неравенство

$$\|u\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant c(T,k)(\widetilde{c} + t_0^{1/10}\|v\|^2_{X_k(Q_{t_0})}), \tag{20}$$

где константа $\widetilde{c}$ зависит от норм функций u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, f в соответствующих пространствах.

Из неравенства (20) следует, что для достаточно большого $A > 0$ и достаточно малого $t_0^* \in (0,T]$ отображение Λ переводит для любого $t_0 \in (0,t_0^*]$ шар $Z_{k,A}(Q_{t_0}) = \{v \in Z_k(Q_{t_0}) : \|v\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant A\}$ в себя.

Теперь рассмотрим функции v и $\widetilde{v}$ из множества $Z_{k,A}(Q_{t_0})$. Аналогично (20) находим, что

$$\|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant c(T,k)t_0^{1/10}A\|v - \widetilde{v}\|_{X_k(Q_{t_0})},$$

и, следовательно, при достаточно малых t_0 отображение Λ является сжимающим в $Z_{k,A}(Q_{t_0})$.

Пусть функции $u_1(t,x)$, $u_2(t,x) \in X_k(Q_{t_0})$ и являются решениями задачи (1)–(3). Положим $U(t,x) \equiv u_1(t,x) - u_2(t,x)$, $U_0(x) \equiv u_{01}(x) - u_{02}(x)$, $U_1(t) \equiv u_{11}(t) - u_{12}(t)$, $U_2(t) \equiv u_{21}(t) - u_{22}(t)$, $U_3(t) \equiv u_{31}(t) - u_{32}(t)$, $U_4(t) \equiv u_{41}(t) - u_{42}(t)$, $U_5(t) \equiv u_{51}(t) - u_{52}(t)$, $F(t,x) \equiv f_1(t,x) - f_2(t,x)$. Тогда функция U является в Q_T решением задачи

$$U_t - U_{xxxxx} + bU_{xxx} + aU_x = F - (u_2U_x + u_{1x}U),$$

$$U|_{t=0} = U_0, \quad U|_{x=0} = U_1, \quad U_x|_{x=0} = U_2,$$

$$U|_{x=1} = U_3, \quad U_x|_{x=1} = U_4, \quad U_{xx}|_{x=1} = U_5.$$

Также как и раньше, используя неравенство (8) и следующую оценку (см. лемму 1),

$$\|u_2U_x + u_{1x}U\|_{M_k(Q_{t_0})} \leqslant \mathrm{c}\big(\|u_1\|_{X_k(Q_{t_0})} + \|u_2\|_{X_k(Q_{t_0})}\big)\|U\|_{X_k(Q_T)},$$

получим

$$\|U\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant c\big(k,a,b,T\big)\big[\|U_0\|_{H^k(0,1)} + \|U_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} +$$
$$+ \|U_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \|U_3\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)} + \|U_4\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)} + \|U_5\|_{H^{k/5}(0,T)} +$$

$$+\|F\|_{M_k(Q_T)}+\sum_{m=0}^{m_0-1}\sum_{j=0}^{m}\|\varPhi_{j2}(\varPhi'_{(m-j)1}-\varPhi'_{(m-j)2})+$$

$$+\varPhi'_{j1}(\varPhi_{(m-j)1}-\varPhi_{(m-j)2})\|_{H^{k-5(m+1)}(0,1)}+c\big(\|u_1\|_{X_k(Q_{t_0})},\|u_2\|_{X_k(Q_{t_0})}\big)t_0^{1/10}\|U\|_{M_k(Q_{t_0})}\big].$$

Откуда следует, что при достаточно малых t_0

$$\begin{gathered}\|u_1-u_2\|_{X_k(Q_{t_0})}\leqslant\\ \leqslant c\big(k,a,b,T,\|u_{0m}\|_{H^k(0,1)},\|u_{1m}\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)},\|u_{2m}\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)},\\ \|u_{3m}\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)},\|u_{4m}\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)},\|u_{5m}\|_{H^{k/5}(0,T)},\|f_m\|_{M_k(Q_T)},\big)\times\\ \times\big(\|u_{01}-u_{02}\|_{H^k(0,1)}+\|u_{11}-u_{12}\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)}+\|u_{21}-u_{22}\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)}+\\ +\|u_{31}-u_{32}\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)}+\|u_{41}-u_{42}\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)}+\|u_{51}-u_{52}\|_{H^{k/5}(0,T)}+\\ +\|f_1-f_2\|_{M_k(Q_T)}\big)\,,\quad\text{где}\quad m=1\text{ и }2.\end{gathered}$$

Непрерывная зависимость решений от данных задачи в Q_{t_0} установлена. □

Теперь получим глобальные априорные оценки решения рассматриваемой задачи.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1 для* $k=0$. *Предположим, что для некоторого* $T'\in(0,T]$ *существует решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* $X_0(Q_T)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\begin{gathered}\|u\|_{C([0,T'];L_2(0,1))}\leqslant c(T,\|u_0\|_{L_2(0,1)},\|u_1\|_{H^{2/5}(0,T)},\|u_2\|_{H^{1/5}(0,T)},\\ \|u_3\|_{H^{2/5}(0,T)},\|u_4\|_{H^{1/5}(0,T)},\|u_5\|_{L_2(0,T)},\|f\|_{L_2(Q_T)}).\end{gathered}\tag{21}$$

Доказательство. Положим функция $U(t,x)\equiv u(t,x)-\varphi(t,x)$, где $\varphi(t,x)\in X_0(Q_T)$ — решение линейной задачи (7), (2), (4). Тогда $U(t,x)$ будет в $Q_{T'}$ решением задачи

$$U_t-U_{xxxxx}+bU_{xxx}+aU_x=F,U_0(x)\equiv0,\quad U_1=U_2=U_3=U_4=U_5\equiv0,$$

где $F(t,x)\equiv-u(t,x)u_x(t,x)$.

Заметим, что

$$\begin{gathered}\|\varphi\|_{C([0,T];L_2(0,1))}+\|\varphi_{xx}\|_{C([0,1];L_2(0,T))}\leqslant\\ \leqslant c(T)\left(\|u_1\|_{H^{2/5}}+\|u_2\|_{H^{1/5}}+\|u_3\|_{H^{2/5}}+\|u_4\|_{H^{1/5}}\right).\end{gathered}$$

В частности, $\varphi_x(t,x)\in L_2(0,T;C[0,1])$ с соответствующей оценкой. Если учесть, что

$$2uu_xU=2(U+\varphi)(U_x+\varphi_x)U=\left(\frac{2}{3}U^3+\varphi U^2\right)_x+\varphi_x\left(U^2+2\varphi U\right),$$

и

$$\left|\int_0^1 uu_xU\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1\varphi_x\left(U^2+2\varphi U\right)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant c\sup_{x\in(0,1)}|\varphi_x|\int_0^1\left(U^2+\varphi^2\right)\,\mathrm{d}x,$$

то, применяя для функции $U(t,x)$ неравенство (15), получим неравенство (21). □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 1 для* $k\geqslant1$. *Предположим, что для некоторого* $T'\in(0,T]$ *существует решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* $X_k(Q'_T)$. *Тогда равномерно по* T'

$$\|u\|_{X_k(Q_{T'})} \leqslant c(T, k, \|u_0\|_{H^k}, \|u_1\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)}, \|u_2\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)}, \|u_3\|_{H^{(k+2)/5}(0,T)},$$
$$\|u_4\|_{H^{(k+1)/5}(0,T)}, \|u_5\|_{H^{k/5}(0,T)}, \|f\|_{M_k(Q_T)}, \|u\|_{X_{k-1}(Q_{T'})}). \quad (22)$$

Доказательство. Используя результат леммы 5 и леммы 1, а также неравенство (8) аналогично доказательству леммы 4, получим для любого $t_0 \in (0, T]$

$$\|u\|_{X_k(Q_{t_0})} \leqslant c_0(T,k)(\widetilde{c} + t_0^{1/10}\|u\|_{X_k(Q_{t_0})}\|u\|_{X_{k-1}(Q_{t_0})}),$$

где константа $\widetilde{c}$ зависит от норм функций u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, f в соответствующих пространствах. Откуда, очевидно, следует (22). □

Доказательство (теоремы 1). Утверждение теоремы 1 следует из локальной корректности (леммы 4) и глобальных априорных оценок (лемма 5 и лемма 6). □

Литература

1. *Kawahara T.* Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media // J. Phys. Soc. Japan. — 1972. — Vol. 33:1. — Pp. 260–264.
2. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // Прикл. матем. мех. — 1988. — Т. 52:2. — С. 230–234. [*Marchenko A. V.* O dlinnihkh volnakh v melkoyj zhidkosti pod ledyanihm pokrovom // Prikl. matem. mekh. — 1988. — T. 52:2. — S. 230–234.]
3. *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией // Труды МИАН. — 1989. — Т. 186. — С. 222–226. [*Iljichev A. T.* O svoyjstvakh odnogo nelineyjnogo ehvolyucionnogo uravneniya pyatogo poryadka, opisihvayuthego volnovihe processih v sredakh so slaboyj dispersieyj // Trudih MIAN. — 1989. — T. 186. — S. 222–226.]
4. *Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B.* Structural Stability of the Korteweg–de Vries Solitons under a Singular Perturbation // Physica D. — 1988. — Vol. 31. — Pp. 127–134.
5. *Boyd J. P.* Weakly Non–Local Solitons for Capillary–Gravity Waves: Fifth Degree Korteweg–de Vries Equation // Physica D. — 1991. — Vol. 48. — Pp. 129–146.
6. *Saut J. C.* Sur quelques Généralizations de L'equation de Korteweg–De Vries // J. Math. Pures Appl. — 1979. — Vol. 58:1. — Pp. 21–61.
7. *Фаминский А. В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка // Матем. сборник. — 1989. — Т. 180:9. — С. 1183–1210. [*Faminskiyj A. V.* Zadacha Koshi dlya kvazilineyjnihkh uravneniyj nechetnogo poryadka // Matem. sbornik. — 1989. — T. 180:9. — S. 1183–1210.]
8. *Biagioni H. A., Linares F.* On the Benney–Lin and Kawahara equations // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — Vol. 211. — Pp. 131–152.
9. *Cui S., Tao S.* Stricharts Estimates for Dispersive Equations and Solvability of the Kawahara Equation // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 304. — Pp. 683–702.
10. *Cui S., Deng D., Tao S.* Global Existence of Solutions for the Cauchy Problem of the Kawahara Equation with L^2 Initial Data // Acta Math. Sinica (Engl. Ser.). — 2006. — Vol. 22:5. — Pp. 1457–1466.
11. *Wang H., Cui S., Deng D.* Global Existence of Solutions for the Kawahara Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices // Acta Math. Sinica (Engl. Ser.). — 2007. — Vol. 23:8. — Pp. 1435–1446.
12. *Сангаре К.* Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций // Вестник РУДН, сер. Математика. — 2003. — Т. 1. — С. 91–107. [*Sangare K.* Smeshannaya zadacha v polupolose dlya obobthennogo uravneniya Kavakharih v prostranstve beskonechno

differenciruemihkh ehksponencialjno ubihvayuthikh funkciyj // Vestnik RUDN, ser. Matematika. — 2003. — T. 1. — S. 91–107.]
13. *Larkin N. A., Doronin G. G.* Kawahara Equation in a Quarter-Plane and in a Finite Domain // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.). — 2007. — Vol. 25:(1-2). — Pp. 9–16.
14. *Сангаре К., Фаминский А. В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обощенного уравнения Кавахары // Математические заметки. — 2009. — Т. 85. — С. 98–109. [*Sangare K., Faminskiyj A. V.* Slabihe resheniya smeshannoyj zadachi v polupolose dlya obothennogo uravneniya Kavakharih // Matematicheskie zametki. — 2009. — T. 85. — S. 98–109.]
15. *Larkin N. A.* Correct Initial Boundary Value Problems for Dispersive Equations // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 344:2. — Pp. 1079–1092.
16. *Doronin G. G., Larkin N. A.* Kawahara Equation in a Boundary Domain // Discr. and Contin. Dyn. Syst. — 2008. — Vol. 4. — Pp. 783–799.
17. *Doronin G. G., Larkin N. A.* Boundary Value Problems for the Stationary Kawahara Equation // Nonlinear Analysis. — 2008. — Vol. 69. — Pp. 1655–1665.
18. *Faminskii A. V.* An Initial Boundary-Value Problem in a Half-Strip for the Korteweg–de Vries Equation in Fractional-Order Sobolev Spaces // Comm. Partial Differential Equations. — 2004. — Vol. 29. — Pp. 1653–1695.
19. *Faminskii A. V.* Global Well-Posedness of Two Initial-Boundary-Value Problems For the Korteweg–de Vries Equation // Differential Integral Equations. — 2007. — Vol. 20. — Pp. 601–642.
20. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-Posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg–de Vries Equation // J. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 4. — Pp. 323–347.
21. *Кувшинов Р. В., Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45. — С. 391–402. [*Kuvshinov R. V., Faminskiyj A. V.* Smeshannaya zadacha v polupolose dlya uravneniya Kavakharih // Differencialjnihe uravneniya. — 2009. — T. 45. — S. 391–402.]
22. *Лионс Ж-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. [*Lions Zh-L., Madzhenes Eh.* Neodnorodnihe granichnihe zadachi i ikh prilozheniya. — M.: Mir, 1971.]
23. *Кувшинов Р. В.* Потенциалы для линеаризованного уравнения Кавахары // Вестник РУДН, сер. «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 3 (1). — С. 5–16. [*Kuvshinov R. V.* Potencialih dlya linearizovannogo uravneniya Kavakharih // Vestnik RUDN, ser. «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — No 3 (1). — S. 5–16.]

UDC 517.958

Nonlocal Well-Posedness of Mixed Problem for Kawahara Equation in Boundary Rectangle

R. V. Kuvshinov

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Kawahara equation in a boundary rectangle under natural conditions on a boundary data is proved.

Key words and phrases: linearized Kawahara equation, solutions of potential type.