ОБ УПРАВЛЕНИИ САМОФИНАНСИРУЕМЫМ ПОРТФЕЛЕМ АКТИВОВ С ЗАДАННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Погосян А. С.

Российский Университет Дружбы Народов, nura55590@mail.ru

Рассматриваются задачи построения стратегий управления самофинансируемым портфелем активов заданного риска. Задача решается методом построения правых частей стохастических дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию.

Ключевые слова: самофинансируемый портфель, моделирование портфеля активов со стохастическими ценами, стохастическое дифференциальное уравнение.

Введение

Задача управлением портфелем ценных бумаг, состоящим из рисковых и безрисковых (банковский счет) вложений, с заданными свойствами (самофинансируемость, постоянство риска) является одной из важных задач современных финансов. В процессе решения данной задачи появляется необходимость построения математической модели, которая для моделирования цен активов использует стохастические дифференциальные уравнения.

Построение стратегии управления самофинансируемым портфелем активов с непрерывным временем

Выберем портфель, состоящий из n рисковых активов, цены которых задаются системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dS_i = \mu_i(t,S)dt + \sum\nolimits_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t,S)dW_j, i=\overline{1,n} \tag{1}$$

с начальным условием $s_i(t_0)=s_{0i}$, где dW_j - винеровские случайные процессы, $\mu_i(t,S)$ – ожидаемые доходности активов, σ_{ij} – волатильности.

Пусть $X_i(t)$ - количество единиц i-го актива в портфеле в момент времени t. Тогда стоимость такого портфеля в момент времени t определяется формулой:

$$V_p(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i(t)S_i(t), \tag{2}$$

а стратегия управления портфелем активов представляет собой вектор $X(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t))$.

Пусть в состав портфеля наряду с рисковыми активами входит и безрисковый (банковский счет в базовой валюте). Пусть на остаток денежных средств на счете начисляются проценты по мгновенной процентной ставке r(t). Тогда стоимость портфеля будет равна

$$V_p = r(t)\cdot x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\cdot s_i(t). \tag{3}$$

Под самофинансируемым портфелем на множестве времени t $[t_0, T]$ понимают портфель активов, в котором при t (t_0,T) не происходит ни пополнения, ни вывода средств. Математически самофинансируемый портфель рисковых активов с непрерывным временем выражается следующим образом:

$$dV_p = \sum_{i=1}^{n} x_i ds_i, \tag{4}$$

которое понимается как равенство стохастических дифференциалов в смысле леммы Ито.

Для самофинансируемого портфеля с банковским счетом уравнение, определяющее остаток по банковскому счету, должно иметь вид:

$$dx_0 = (r(t)\cdot x_0 - \sum_{i=1}^{n} s_i f_i(t, s, x, x_0))dt. \tag{5}$$

Таким образом, стратегия управления портфелем финансовых активов заключается в выборе количества каждого актива $X_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, включаемого в портфель, обеспечивающего получение портфеля с заданными характеристиками (заданного риска).

Полагаем, что стратегия управления портфелем $X(t)=(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ задается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(t, s, X, V_p),\ i = \overline{1.n} \tag{6}$$

с неизвестными правыми частями $f_i(t,s,X,V_p)$.

Учитывая, что цены активов S_i, изменяющиеся со временем, удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению (1), будем использовать для оценки риска портфеля показатель VaR, рассчитываемый по формуле:

$$VaR_p = \alpha\sigma_p V_p, \tag{7}$$

где α из R, σ_p-волатильность (стандартное отклонение) доходности портфеля, V_p задается формулой (2).

Рассмотрим самофинансируемый портфель, состоящий из двух (n=2) рисковых активов и банковского счета. Динамика цен рисковых активов описывается СДУ (1).Уравнения динамического управления портфелем имеют вид (6). Уравнение, описывающее динамику банковского счета, для самофинансируемого портфеля имеет вид:

$$dx_0 = (r\cdot x_0 - s_1 f_1(t,s,x) - s_2 f_2(t,s,x))dt. \tag{8}$$

Поставим задачу нахождения правых частей f_1 и f_2 уравнений

$$dX_i = f_i(t, S, X),\ i = 1, 2$$

при условии, что

$$dS_i = \mu_i(t,S)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,S)dW_j,\ i = 1,2,$$

$$dV_p = r(t)\cdot x_0 dt + \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot dS_i,$$

для которых свойство постоянства риска $\omega_1(t,S,X) \equiv VaR_p - v_0 = 0$ (v_0-const)является ожидаемым свойством рассматриваемого портфеля.

Данная задача была решена с помощью построения стохастического дифференциала Ито[5,6]:

$$d\omega \equiv \left(\frac{\partial\omega}{\partial s_i}\mu_i s_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_i s_i\right)dt + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\sigma_i s_i\right)\delta W \tag{9}$$

(здесь по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2 и последующее усреднение) и метода построения правых частей систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию [2].

Таким образом, было получено **утверждение:**
Стратегия управления самофинансируемым портфелем активов со стохастическими ценами с денежным счетом задается следующими формулами:

$$dx_1 = (-(x_1^2 s_1 \sigma_1^2 + x_1 x_2 s_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})\cdot A + (x_2^2 s_2 \sigma_2^2 + x_1 s_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})\cdot N)dt, \tag{10}$$

$$dx_2 = (-(x_2^2 s_2 \sigma_2^2 + x_1 s_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})\cdot A - (x_1^2 s_1 \sigma_1^2 + x_1 x_2 s_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})\cdot N)dt, \tag{11}$$

при этом

$$dx_0 = (r(t)\cdot x_0 + (x_1^2 s_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 s_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 s_1 x_2 s_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})\cdot A + \\ +N\cdot\left\{x_1^2 s_1 s_2 \sigma_1^2 + x_1 x_2 s_2^2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2} - x_2^2 s_1 s_2 \sigma_2^2 - x_1 x_2 s_1^2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2}\right\})dt. \quad (12)$$

Здесь α - квантиль распределения, соответствующий выбранному доверительному интервалу, β из R, N (x_1,x_2) – произвольная функция, A задается следующим соотношением:

$$A = \frac{\beta\omega_1 + \alpha^2 x_1^2 s_1^2 \sigma_1^4 + 2\alpha^2 x_1 x_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 s_1 s_2 corr_{1,2} + \alpha^2 x_2^2 s_2^2 \sigma_2^4}{2\alpha^2((x_1^2 s_1 \sigma_1^2 + x_1 x_2 s_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})^2 + (x_2^2 s_2 \sigma_2^2 + x_1 s_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 corr_{1,2})^2)} \quad (13)$$

Литература

1. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. М.: МЦНМО, 2010. - 560 с.
2. Галиулин А.С., Мухамедзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. – Наука, 1971. – 352с
3. Тэпман Л.Н. Риски в экономике, М.: ЮНИТИ, 2002.-380с.
4. Alexander C. Market Risk Analysis. Vol.4. Value-at-Risk Models. – John Wiley & Sons, Ltd 2008.- 449p.
5. ШиряевА. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Теория. – М.- ФАЗИС, 1998. – 544с.
6. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введения в теорию и приложения. 5-е издание, М.: МИР, 2003. – 406с.

ON MANAGEMENT OF SELF-FINANCING PORTFOLIO WITH GIVEN DYNAMIC PROPERTIES

Pogosyan A.S.

Peoples' Friendship University of Russia, nura55590@mail.ru

In this paper we investigate the problem of constructing a self-financing portfolio management strategies of given risk. The problem is solved using methods of constructing system of stochastic differential equations with given integral manifold.

Key words: self-financing portfolio, management of portfolios with stochastic prices, stochastic differential equations.