

УДК 519.63; 537.876.4
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68

Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплёночной волноводной линзе

Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе рассматривается задача дифракции электромагнитного ТЕ-поляризованного монохроматического излучения на трёхмерном утолщении волноводного слоя регулярно-планарного трёхслойного диэлектрического волновода, формирующем тонкоплёночную волноводную линзу. Предлагается приближенная математическая модель, в которой открытый волновод рассматривается внутри вспомогательного закрытого волновода, приводящая к корректной математической постановке задачи дифракции.

В работе показано, что параметры направляемых мод открытого волновода устойчивы к сдвигам границ объемлющего закрытого волновода. Следовательно, предлагаемый подход адекватно описывает распространение поляризованного света в открытом плавно-нерегулярном волноводе. За счёт локального утолщения волноводного слоя возникает эффект деполяризации излучения, который требует рассмотрения векторного характера распространяющегося электромагнитного излучения.

В работе задача дифракции решается в адиабатическом приближении по малому параметру, соответствующему нерегулярности. Проведение численных экспериментов позволило показать, что с уменьшением малого параметра матрица коэффициентов отражения стремится к нулю, а матрица коэффициентов прохождения стремится к единичной матрице. Причём обменные вклады, которым соответствуют недиагональные элементы матриц, стремятся к нулю на порядок быстрее, чем диагональные члены. Так что, эффектами деполяризации в рассматриваемой конфигурации можно пренебречь.

Ключевые слова: волноводное распространение света, математическая модель, интегрально-оптический волновод, модифицированный неполный метод Галёркина, асимптотический метод

1. Введение

В работе рассматривается задача математического моделирования дифракции электромагнитного поляризованного монохроматического излучения на трёхмерном утолщении волноводного слоя, формирующем структуру волноводной линзы на регулярно-планарном диэлектрическом волноводе.

Задачу можно рассматривать в декартовой системе координат, связанной с геометрией планарных волноводов. Плоские поверхности раздела между волноводным слоем, подложкой и покровным слоем параллельны (компланарны) плоскости xOz . Ось Oy перпендикулярна этим плоским поверхностям. Излучение распространяется вдоль оси Oz (в направлении возрастания переменной z), геометрия системы до помещения в неё утолщения и невозмущённое электромагнитное поле излучения инвариантны относительно движений вдоль оси Ox , то есть $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$.

Тогда невозмущённое электромагнитное монохроматическое, поляризованное излучение

$$\vec{E} = \vec{E}(y, z)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(y, z)e^{-i\omega t}$$

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.

Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.а03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 15-07-08795, № 16-07-00556.

Приведённые в статье рисунки и вычисления были выполнены при помощи Sage Mathematics Software.

удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в Гауссовой системе единиц в описанной системе координат распадается на две независимые подсистемы для ТЕ- и ТМ-поляризаций.

Если же нерегулярный участок интегрально-оптического волновода не обеспечивает инвариантности электромагнитного поля вдоль оси Oy , то на нем происходит деполяризация мод, т.е. все компоненты поля становятся отличными от тождественного нуля, что характерно для гибридных мод. Если нерегулярность мала, то и гибридизация (деполяризация) мала по сравнению с полем в регулярной части волновода [1–7].

Итак, рассмотрим распространение ТЕ-мод в планарном регулярном волноводе, состоящем из трёх слоев: подложки, волноводного слоя и покровного слоя, характеризующихся различными коэффициентами преломления n_s, n_f и n_c соответственно. Примем направление распространения волны за ось z , а ось y направим перпендикулярно слоям. Тогда

$$n = \begin{cases} n_s & y < 0, \\ n_f, & 0 < y < h_0, \\ n_c, & h_0 < y. \end{cases}$$

Поместим сверху на основном волноводном слое небольшое утолщение — дополнительный волноводный слой переменной толщины $h(x, z)$ порядка длины волны излучения на участке радиуса R порядка нескольких длин волн излучения (то есть за единицу измерения длины выбрана длина волны электромагнитного излучения), формирующий тонкоплёночную волноводную линзу [8]. Дополнительный волноводный слой имеет тот же показатель преломления, что и основной слой, сечение получившейся волноводной системы изображено на рис. 1.

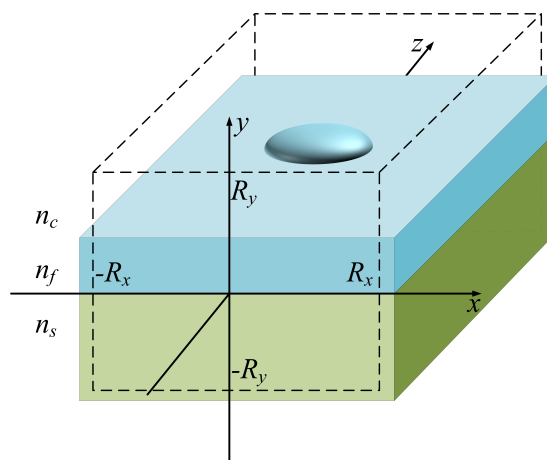


Рис. 1. Плоский волновод, вставленный в ящик $R_x \times R_y$

Будем считать, что дополнительный волноводный слой представляет собой тело

$$h_1 < y < h_2(x, z), \quad |x| < L_x, \quad |z| < L_z.$$

Ниже для примера используется

$$h(x, z) = h_1 + \delta \sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

где δ — параметр, характеризующий «малость» утолщения. Наша цель — исследовать дифракцию света на этой линзе.

2. Описание приближенной математической модели

Отметим, что рассматриваемое локальное утолщение волноводного слоя не обеспечивает инвариантности поля вдоль оси Oy . Однако, в силу малости возмущения регулярности, эффекты деполяризации малы по сравнению с основным вкладом поля регулярного волновода. Это позволяет на начальном этапе рассмотрения пренебречь векторным характером распространяющегося электромагнитного излучения.

В скалярном приближении распространение волны можно описать уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 q u = 0,$$

где $q = q_0(y) + \delta \cdot q_1(x, y, z)$ и

$$q_0 = \begin{cases} n_s^2, & y < 0, \\ n_f^2, & 0 < y < h_0, \\ n_c^2, & h_0 < y, \end{cases}$$

а малая добавка δq_1 характеризует утолщение.

Поставить сразу парциальные условия изучения невозможно, поскольку спектральная задача для оператора $\Delta_{\perp} + k^2 q_0(x, y)$ на \mathbb{R}^2 имеет смешанный спектр: дискретный и непрерывный. Простейший путь к постановке условий — рассмотреть открытый волновод в закрытом волноводе, то есть ограничить рассматриваемое пространство \mathbb{R}^3 компактной областью G : $|x| < R_x$, $|y| < R_y$, изображённой на рис. 1 пунктиром. Мы полагаем, что в реальной системе объекты, помещённые достаточно далеко от волноводного слоя, не влияют существенным образом на интересующие нас характеристики волны. Данное предположение вносит дополнительное возмущение в задачу. Мы предполагаем его малым в начале рассмотрения.

Результаты численных экспериментов, проведённых нами в последующих разделах, подтверждают сделанное предположение, поэтому примем $u|_{y=\pm R_y} = 0$, а также, что поле на некотором удалении от утолщения не зависит от x , поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pm R_x} = 0.$$

Остаётся поставить парциальные условия излучения. Обозначим собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} v + k^2 q_0(y)v + \lambda v = 0, \\ v|_{y=\pm R_y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\pm R_x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

как λ_n и v_n соответственно. Система собственных функций этой задачи полна в пространстве $L^2(G)$ [9].

Волну, падающую на линзу, при $z < -L_z$ можно описать как разложение

$$\sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}$$

по собственным функциям, отвечающим отрицательным собственным значениям, причём $i\gamma_n = \sqrt{\lambda_n}$, N — число отрицательных собственных значений задачи (1).

Отражённую от линзы волну при $z < -L_z$ можно представить как

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n v_n(x, y) e^{-i\gamma_n z},$$

а прошедшую при $z > L_z$ как

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z},$$

где R_n, T_n — неизвестные числа, а суммы распространяются на все собственные функции задачи (1).

Задача отыскания функции u и последовательности чисел $\{T_n\}, \{R_n\}$, именуемых коэффициентами прохождения и отражения вида

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} u + k^2 q(x, y) u = 0, \\ u|_{y=\pm R_y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm R_x} = 0, \\ u|_{z < -L_z} = \sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n v_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, \\ u|_{z > L_z} = \sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}, \end{cases} \quad (2)$$

имеет (и притом единственное) решение и является корректной задачей математической физики [10, 11]. Мы будем использовать её в качестве математической модели для описания поля открытого волновода.

3. Решение задачи дифракции в первом порядке теории возмущений

Чтобы получить простые формулы для решения задачи (2), рассмотрим заполнение вида

$$q = q_0(y) + \delta \cdot q_1(x, y, z)$$

и будем искать решение в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \delta \cdot u' + \dots$$

в рамках теории возмущений, возможность применения которой к задачам с парциальными условиями излучения была обоснована в [11, 12].

Для отыскания возмущённой части решения вида

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(x, y)$$

имеем соотношение вида

$$\Delta u + k^2 q_0(y) u = -k^2 q_1(x, y, z) \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}$$

или, после проектирования на v_n , вида

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} + \gamma_n^2 u_n = -k^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{i\gamma_m z} q_{nm}(z), \quad (3)$$

где

$$q_{nm}(z) = \iint_G q_1(x, y, z) v_n(x, y) v_m(x, y) dx dy.$$

Функция Грина для уравнения (3) с парциальными условиями излучения может быть выписана явно [13], а само решение с её помощью записано в виде

$$u_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i\gamma_n |z-\xi| + i\gamma_m \xi} q_{nm}(\xi) d\xi.$$

Таким образом, полное поле дается формулой

$$u = \sum_n \left(F_n e^{i\gamma_n z} + \sum_m \delta Z_{nm}(z) F_m + \dots \right) v_n(x, y),$$

где поправки первого порядка малости по δ имеют вид:

$$\delta Z_{nm} = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \iiint_{(x,y,\xi) \in \text{supp } \delta q} e^{i\gamma_n |z-\xi| + i\gamma_m \xi} \delta q(x, y, \xi) d\xi.$$

Следует заметить, что q_1 имеет компактный носитель, поэтому на самом деле здесь интеграл распространяется на конечный отрезок. При $z > L_z$ модуль $|z - \xi| = z - \xi$, поэтому

$$u_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} e^{i\gamma_n z} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)\xi} q_{nm}(\xi) d\xi,$$

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)\xi} q_{nm}(\xi) d\xi.$$

Полагая

$$\delta T_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)z} v_n v_m \cdot q_1(x, y, z) dx dy dz,$$

можем переписать предыдущую формулу как

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta T_{nm} \cdot F_m.$$

Теорема 1. В первом порядке теории возмущений коэффициенты прохождения и отражения n -ой моды даются формулами

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta T_{nm} \cdot F_m, \quad \delta R_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta R_{nm} \cdot F_m,$$

где

$$\delta T_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)z} v_n v_m \cdot \delta q \cdot dx dy dz,$$

$$\delta R_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m + \gamma_n)z} v_n v_m \cdot \delta q \cdot dx dy dz.$$

Матрицы δT и δR будем называть матрицами прохождения и отражения.

4. Границы применимости модели

С точки зрения скалярной волновой оптики поле в открытом волноводе, помещённом в закрытый волновод, представляет собой линейную комбинацию волн

$$v_n(x, y) e^{\pm i\gamma_n z},$$

где v — собственные функции задачи (1), отвечающие отрицательным собственным значениям, причём $i\gamma_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Собственные функции задачи (1) уже при небольших частотах k чётко распадаются на два класса: локализованные и не локализованные в волноводном слое. Первые мы будем интерпретировать как канализированные средним слоем, а вторые — как канализированные объемлющим закрытым волноводом — ящиком.

Гипотеза, лежащая в основе предложенной модели, может быть сформулирована следующим образом: если падающая волна представляет собой суперпозицию локализованных мод, то коэффициенты прохождения и отражения T_n и R_n локализованных мод не зависят заметным образом от параметров R_x, R_y ящика. Расхождения, которые неизбежно возникают при применении ящиков различных размеров, несут информацию, полезную для численного анализа модели:

- n -ю моду можно вычислить при нескольких различных значениях R_x, R_y , величина $\delta\lambda_n$ характеризует дисперсию, которая не может быть уточнена в рамках рассматриваемой модели,
- вклады нелокализованных мод в любую величину характеризуют в своей совокупности рассеянную энергию, сами же по себе не имеют физического смысла.

Так называемые «точные» модели также приносят погрешности, оценка которых зачастую не производится. Чем выше номер локализованной моды, тем более заметна зависимость собственных значений от R_x, R_y . Однако идея предельного перехода $R \rightarrow \infty$ плоха не только с вычислительной точки зрения. Это обстоятельство указывает на то, что рассматриваемая модель — модель с парциальным распределением точности [14].

5. Вычисление локализованных собственных функций

Все собственные значения задачи (1) можно найти по методу разделения переменных. Полагая

$$v = v(y) \cos \frac{\pi s}{2R_x} (x - R_x), \quad s \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

и подставляя (4) в (1), получим одномерную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} v'' + k^2 q_0(y)v + \left(\lambda - \left(\frac{\pi s}{2R_x} \right)^2 \right) v = 0, \\ v|_{y=\pm R_y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Поэтому достаточно найти все собственные значения при $s = 0$, остальные получаются из них сдвигом на $((\pi s)/(2R_x))^2$. При этом собственное значение λ отвечает локализованной моде, если $v(y)$ экспоненциально убывает в покровном слое и подложке [15–17]: $-k^2 n_f^2 < \lambda - ((\pi s)/(2R_x))^2 < \min(-k^2 n_c^2, -k^2 n_s^2)$. Отсюда, будет ли мода локализована при $s > 0$ или нет, существенно зависит от выбора R_x .

Обратимся к вычислению локализованных мод, не зависящих от x ($s = 0$), сшиванием решений на двух разрывах коэффициента преломления. Для удобства опишем обозначения, которые используются в пакете `Luneburg` под Sage.

- 0 — подложка, 1 — волноводный слой, 2 — покровный слой,
- `n=[ns,nf,nc]` — список с показателями преломления,
- `h=[h0,h1]` — отрезок оси y , который занимает волноводный слой,

Функция `luneburg_eigenplot(n,h,k,Ry)` проводит численный расчёт дисперсионной зависимости и строит график дисперсионной кривой (в логарифмическом масштабе), нули которой суть искомые собственные значения. Будем далее рассматривать размеры волноводной структуры в единицах длины волны электромагнитного излучения. Рассмотрим открытый волновод с толщиной волноводного слоя в 1 длину волны и

$$n = \begin{cases} 1.1 & y < 0, \\ 2 & 0 < y < 1, \\ 1 & 1 < y, \end{cases}$$

помещённого в ящик с $R_y = 10$ длин волн, при $k = 3$ этот график можно построить командой:

```
sage: load('sage/luneburg.sage')
sage: var('x,y,z')
sage: luneburg_eigenplot([1.1,2,1],[0,1],3,10)
```

На рис. 2 представлены графики при $R_y = 2$ и $R_y = 10$. Хорошо видно, что положение нулей не зависит от R_y . По графику видно, что имеется ровно две собственных функции, возле $\lambda = -31$ и -18 .

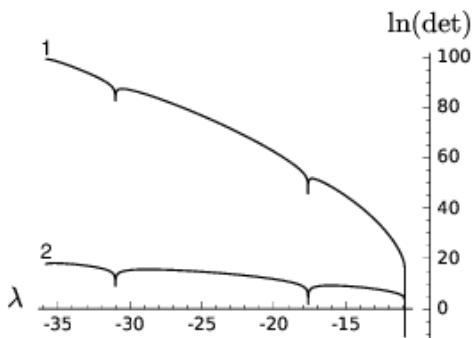


Рис. 2. График левой части характеристического уравнения при $n = [1.1, 2, 1]$, $k = 3$ для двух значений: (1) для $R_y = 10$; (2) для $R_y = 2$

Замечание 1. По графику хорошо видно, что задача имеет ту же вычислительную особенность, которая в [18] описывается в разделе, посвящённом построению графиков. Отделение корней здесь будет нетривиальной задачей.

Для более точного вычисления корней и собственных функций служит функция `luneburg_eigenfunction(n,h,k,Ry,lambda)`, где λ — приближенное значение для собственного значения, найденное по графику, искомое собственное значение должно лежать на отрезке $[\lambda, \lambda + 1]$. Эта функция в качестве выходных данных предоставляет список, 0-м элемент которого служит уточнённое собственное значение, а 1-м элементом — собственная функция, описанная как кусочно-аналитическое выражение и нормированная на $L^2(-R_y, R_y)$. Для рассматриваемого примера имеем два собственных значения:

```
sage: luneburg_eigenfunction([1.1,2,1],[0,1],3,10,-32)
[-31.00587372275704, piecewise(y|-->-(1.749050320801987e-20)*
e^(4.48507232079451*y + 44.8507232079451) +
(1.749050320801987e-20)*e^(-4.48507232079451*y -
44.8507232079451) on (-10, 0), y|-->-0.5262885275712399*
cos(2.234754187207837*y) - 1.0562423917910484*
sin(2.234754187207837*y) on [0, 1], y|-->
(2.3432737836960847e-19)*e^(4.69104185898581*y -
46.9104185898581) - (2.3432737836960847e-19)*
e^(-4.69104185898581*y + 46.9104185898581) on (1, 10); y)]
sage: luneburg_eigenfunction([1.1,2,1],[0,1],3,10,-18)
[-17.624762558080413, piecewise(y|-->(4.939108333233261e-12)*
e^(2.59514210749246*y + 25.9514210749246) -
(4.939108333233261e-12)*e^(-2.59514210749246*y -
25.9514210749246) on (-10, 0), y|-->0.920889502548748*
cos(4.286634745569021*y) + 0.5575093905265337*
sin(4.286634745569021*y) on [0, 1], y|-->
(2.9481241586952706e-12)*e^(2.936794606042515*y -
29.36794606042515) - (2.9481241586952706e-12)*
e^(-2.936794606042515*y + 29.36794606042515) on (1, 10); y)]
```

Графики собственных функции построены на рис. 3 и 4. Следует обратить внимание на то, что, например, в покровном слое собственная функция имеет экспоненциально растущий член с амплитудой $1.7 \cdot 10^{-20}$, который на отрезке $1 < y < 10$ не оказывает заметного влияния на поведение собственной функции. Однако едва ли разумно отбрасывать этот член, ведь второе слагаемое имеет тот же порядок.

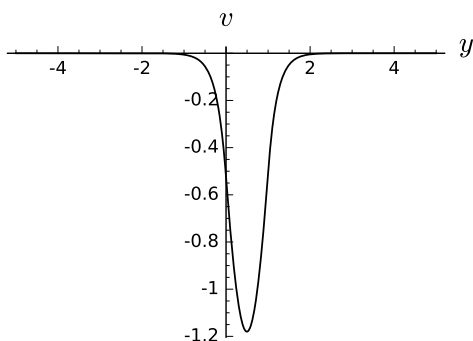


Рис. 3. График собственной функции моды TE_0 при $n = [1.1, 2, 1], k = 3$

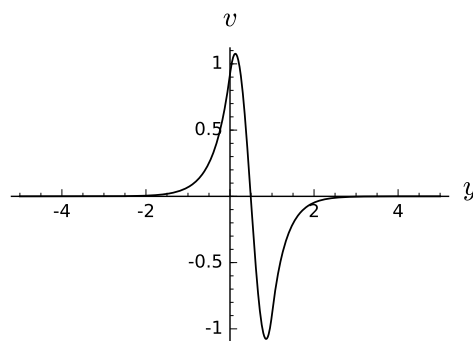


Рис. 4. График собственной функции моды TE_1 при $n = [1.1, 2, 1], k = 3$

6. Волноводная линза

Обратимся теперь к дифракции на утолщении волноводного слоя. Пусть для примера волноводный слой имеет утолщение в форме полусферы,

$$x^2 + z^2 < R, \quad h_1 < y < h_1 + \delta \sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

заполненной веществом с показателем преломления n_l . В полярной системе координат

$$\delta T_{nm} = (n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi} v_n v_m r dr d\varphi dy.$$

Если v_n и v_m не зависят от x , то T_{nm} имеет вещественное значение, поскольку

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi = 0.$$

При этом для вычисления удобно пользоваться выражением

$$\delta T_{nm} = (n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} v_n v_m \rho_{nm}(y) dy,$$

где

$$\rho_{nm}(y) = \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos((\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \delta T_{11} &= 2\pi(n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} dy v_1(y)^2 \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} r dr = \\ &= \pi(n_l^2 - n_c^2) \int_{y=h_1}^{h_1+\delta} \left(R^2 - \frac{(y-h_1)^2}{\delta^2} \right) v_1(y)^2 dy. \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла можно воспользоваться стандартной подпрограммой Sage:

```
sage: h1=1
sage: R=1
sage: delta=0.1
sage: nf=2
sage: nc=1
sage: ns=1.1
sage: nl=1.8
sage: v=luneburg_eigenfunction([ns,nf,nc],[0,1],3,10,-32)[1]
sage: numerical_integral(pi*(nl^2-nc^2)*(v.expression_at(2))^2*
```

```
(R^2-(y-h1)^2/delta^2),h1,h1+delta)
(0.0871817000736067, 9.679113074768287e-16)
```

Вторая величина из числа выходных параметров `numerical_integral`, — ошибка вычисления интеграла. В этом примере стенка ящика была помещена на расстоянии десятка толщин волноводного слоя от этого слоя ($R_y = 10$), если же придвинуть стенку ящика на расстояние 1 толщины волноводного слоя ($R_y = 2$), то величина δT_{11} почти не изменится:

```
sage: v=luneburg_eigenfunction([ns,nf,nc],[0,1],3,2,-32)[1]
sage: numerical_integral(pi*(nl^2-nc^2)*(v.expression_at(1.5))^2*
(R^2-(y-h1)^2/delta^2),h1,h1+delta)
(0.08716079779015289, 9.67679245513252e-16)
```

Именно это обстоятельство свидетельствует о применимости используемой модели: перемещение стенок ящика не влияет сколько-нибудь заметным образом на величину T_{11} .

Остальные элементы матриц δT и δR для первых двух локализованных мод можно вычислить тем же путём. Так при $\delta = 0.1$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.0871817000736067 & 0.0367243736664542 \\ 0.0367243736664542 & 0.299853381650346 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0.0181280522835082 & 0.0345146071574481 \\ 0.0345146071574481 & 0.0656532582915378 \end{pmatrix},$$

при $\delta = 0.01$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.0116699996604377 & 0.000482453707056942 \\ 0.000482453707056942 & 0.0361978913181138 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0.000273495110082350 & 0.000482170019481738 \\ 0.000482170019481738 & 0.000850060161436371 \end{pmatrix},$$

при $\delta = 0.001$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.00120423307443047 & 4.96623379696062 \times 10^{-6} \\ 4.96623379696062 \times 10^{-6} & 0.00369188780662724 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 2.83607252631433 \times 10^{-6} & 4.96620475470580 \times 10^{-6} \\ 4.96620475470580 \times 10^{-6} & 8.69624769266800 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Можно видеть, что с уменьшением δ матрицы коэффициентов δR и δT стремятся к нулю.

7. Заключение

В работах по исследованию оптических волноводов обычно без дополнительного обоснования принимают, что поле внутри волноводного слоя не зависит от электромагнитных явлений, происходящих на расстоянии в несколько десятков длин волн от него. Это, разумеется, не вполне верно: некоторые характеристики поля внутри волновода зависят от этих явлений, но исследователей интересуют те параметры волноводного излучения, которые очень слабо зависят от окружения волновода.

Данное рассуждение является основанием для формулировки математической модели (2) волноводного распространения поляризованного света в плавно-нерегулярном интегрально-оптическом волноводе. Предложенная модель не является точной, так как часть излучаемой открытым волноводом световой энергии канализируется бесконечно высокими стенками потенциала на границе объемлющего закрытого волновода.

Достоинством модели является корректность формулируемой задачи. Для исследования её решений, их зависимости от граничных условий и от коэффициентов уравнения можно использовать широкий ассортимент строгих математических методов и апробированных компьютерных программ.

Этим преимуществом можно воспользоваться для исследования того возмущения, которое вносится при помещении открытого волновода внутрь объемлющего закрытого волновода. Проведение численных экспериментов позволило показать, что с уменьшением дельта матрица коэффициентов отражения δR стремится к нулю, а матрица коэффициентов прохождения стремится к единичной матрице, то есть $\delta T \rightarrow 0$. Причём обменные вклады, которым соответствуют внедиагональные элементы матриц, стремятся к нулю на порядок быстрее, чем диагональные члены.

Сравнение полученных в данной работе результатов с результатами работы [19], в которой неполным методом Галёркина была исследована аналогичная волноводная конфигурация в случае закрытого волновода, то есть случай такого R_y , который приближает стенки объемлющего волновода вплотную к границам открытого волновода, показало качественное совпадение численных результатов.

Литература

1. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 8. — С. 42–54.
2. Севастьянов А. Л. Численная реализация модели интегрально-оптической линзы Люнеберга в нулевом приближении // Письма в ЭЧАЯ. — 2011. — Т. 8, № 5(168). — С. 804–811.
3. Устойчивое компьютерное моделирование тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян, Л. А. Севастьянов // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 11. — С. 37–44.
4. Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. Аналитические вычисления вывода системы дифференциальных уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 7. — С. 103–110.
5. Диваков Д. В., Севастьянов Л. А. Применение неполного метода Галёркина к нерегулярным переходам в открытых планарных волноводах // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 7. — С. 44–50.
6. Многослойные оптические покрытия: монография / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов, А. А. Хохлов. — Москва: РУДН, 2014.
7. Интегральная оптика: теория и компьютерное моделирование. Монография / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов, А. Л. Севастьянов. — Москва: РУДН, 2015.
8. *Zernike F.* Luneburg Lens for Optical Waveguide Use // Optics Communications. — 1974. — Vol. 12. — Pp. 379–381.
9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973.
10. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869–1888.

11. Малеых М. Д. О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 4. — С. 3–5.
12. Боголюбов А. Н., Малеых М. Д. К теории возмущений спектральных характеристик волноведущих систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 7. — С. 1049–1061.
13. Werner P. Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern // Z. Angew. Math. Mech. — 1987. — Bd. 67, No. 4. — Ss. 43–54.
14. Малеых М. Д. О моделях с парциальным распределением точности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 3. — С. 76–80.
15. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — Мир, 1984.
16. Маркузе Д. Оптические волноводы. — Москва: Мир, 1974.
17. Tamir T. Guided-Wave Optoelectronics. — Berlin: Springer-Verlag, 1990.
18. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Third Edition / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — Cambridge University Press, 2007.
19. Диваков Д. В. Моделирование распространения собственных мод закрытого волновода неполным методом Галеркина // Современные проблемы прикладной математики и информатики (МРАМС'2014): Тезисы докладов международной конференции / ОИЯИ. — Дубна: 2014. — С. 61–65.

UDC 519.63; 537.876.4

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68

Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens

D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov

*Department of Applied Probability and Informatics
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198*

The paper deals with the problem of electromagnetic TE-polarized monochromatic light diffraction on three-dimensional thickening of the waveguide layer of regular three-layered open planar dielectric waveguide, which forms thin-film waveguide lens. The authors propose an approximate mathematical model in which open waveguide is placed inside the auxiliary closed waveguide, that leads to well-posed diffraction problem. It is shown, that properties of guided modes of the open waveguide are stable with respect to shifts of the closed waveguide boundaries. So, the proposed approach describes the propagation of polarized light in the open smoothly irregular waveguide adequately.

The three-dimensional thickening of the waveguide layer forces us to deal with electromagnetic field in vector form due to depolarization effect. The diffraction problem, presented in the work, is solved in adiabatic approximation by the small parameter of irregularity of the waveguide layer.

The numerical experiments show that decreasing of the small parameter tends the reflection coefficient matrix to zero-matrix, tends the transmittance coefficient matrix to identity matrix, and besides the non-diagonal matrix elements, corresponding to modes interaction, tend to zero by an order faster than diagonal matrix elements, which shows that depolarization effects in the given configuration can be neglected.

Key words and phrases: waveguide propagation of light, mathematical model, integrated-optical waveguide, modified incomplete Galerkin method, asymptotic method

References

1. A. A. Egorov, A. L. Sevastyanov, E. A. Ayryan, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, Zero Approximation of Vector Model for Smoothly-Irregular Optical Waveguide, *Mathematical Models and Computer Simulations* 22 (8) (2010) 42–54, in Russian.
2. A. L. Sevastyanov, The numerical implementation of the model of integrated-optical luneburg lens in the zero approximation.
3. A. A. Egorov, A. L. Sevastyanov, E. A. Ayryan, L. A. Sevastyanov, Stable Computer Modeling of Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens, *Mathematical Models and Computer Simulations* 26 (11) (2014) 37–44, in Russian.
4. A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastyanov, A. A. Tyutyunnik, Analytical Calculations of Derivation Partial Differential Equations for Coefficient Kantorovich Functions, *Mathematical Models and Computer Simulations* 27 (7) (2015) 103–110, in Russian.
5. D. V. Divakov, L. A. Sevastyanov, Application of Incomplete Galerkin Method to Irregular Junction in Open Planar Waveguides, *Mathematical Models and Computer Simulations* 27 (7) (2015) 44–50, in Russian.
6. A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, K. A. A., *Multilayer Optical Coatings: Monograph*, PFUR, Moscow, 2014, in Russian.
7. A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, A. L. Sevastyanov, *Integrated Optics: Theory and Computer Modeling. Monograph*, PFUR, Moscow, 2015, in Russian.
8. F. Zernike, Luneburg Lens for Optical Waveguide Use, *Optics Communications* 12 (1974) 379–381.
9. O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1985.
10. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of the Excitation of the Waveguide with Inhomogeneous Filling, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 39 (11) (1999) 1869–1888, in Russian.
11. M. D. Malykh, On a Method to Increase the Lower Limit of the Continuous Spectrum in the Spectral Theory of Waveguide Systems, *Moscow University Physics Bulletin* (4) (2006) 3–5, in Russian.
12. A. N. Bogolyubov, M. D. Malykh, On the Theory of Spectral Characteristics of Waveguide Systems Disturbances, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 43 (7) (2003) 1049–1061, in Russian.
13. P. Werner, Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern, *Z. Angew. Math. Mech.* 67 (4) (1987) 43–54.
14. M. D. Malykh, On the Models with Partial Distribution of Accuracy, *Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”* (3) (2014) 76–80.
15. M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides*, Wiley, New York, 1981.
16. D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand, New York, 1974.
17. T. Tamir, *Guided-Wave Optoelectronics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
18. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Third Edition*, Cambridge University Press, 2007.
19. D. V. Divakov, Simulation of Propagation of Waveguide Eigenmodes in Closed Waveguides Using Incomplete Galerkin Method, in: *Modern problems of applied mathematics and computer science: МРАМС 2014, JINR, Dubna, 2014*, pp. 61–65, in Russian.