

---

УДК 519.68

## Об одном методе дифференцирования плоской дискретной кривой при обработке изображений

И. М. Гостев\*, Л. А. Севастьянов†

\* *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Москва, Россия*

† *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Решается задача получения точек с высокой кривизной (особых точек) контуров для идентификации формы объектов на изображениях. Проводится разбор существующих методов численного дифференцирования в данном аспекте. Рассматривается новый метод дифференцирования плоских дискретно заданных кривых, являющихся точками (пикселями) контуров объектов, на основе использования вариаций метода Arch Height. Показаны особенности такого метода дифференцирования при использовании различных формул вычисления производной. Проанализированы аспекты зависимости точности, получаемой производной от длины хорды. Показано, что при возрастании её длины точность дифференцирования ухудшается, а результат стремится к модулю кривизны кривой в данной точке. Приводится сравнение разработанного метода с другими известными методами. Проведён анализ области применимости и варибельности параметров дифференцирования. Исследованы аспекты точности вычисления производных для различных параметров дифференцирования. Рассмотрены примеры дифференцирования различных кривых, как заданных аналитически, так и функций-контуров, полученных из реальных изображений. Показано, что предложенный метод позволяет избавиться от неоднозначности положения точки контура с высокой кривизной, а, следовательно, повысить качество распознавания формы объектов. Изложены возможные области применения данного метода в различных областях науки и техники.

**Ключевые слова:** обработка изображений, распознавание образов, компьютерная геометрия, дифференцирование, особые точки, контурный анализ

### 1. Введение

Решение задачи по идентификации формы графических объектов часто разделяют на два шага [1]. На первом производится обработка изображения для выделения из него набора характерных признаков распознаваемых объектов, а на втором выполняется собственно сама классификация полученных объектов. В настоящее время широко распространено направление, при котором характерные признаки получают на основе производной, вычисляемой от функции контура идентифицируемого объекта [2]. Поскольку эта функция получена из координат изображения объекта, то вычисление такой производной, как правило, сопряжено с вычислительными трудностями, обусловленными различными факторами, такими как: присутствие шумов в дифференцируемой функции, существование локальных разрывов первого рода, зависимостью от разрешения изображения (количества пикселей на сантиметр), методов предварительной обработки и т.п. В настоящее время имеется большое количество практических методов вычисления первой производной для дискретно заданной кривой. Поскольку интересы авторов затрагивает распознавание объектов на изображении, то рассмотрение будет ограничено только плоскими кривыми. Наиболее распространёнными методами дифференцирования являются:

**А.** Методика вычисления производных на основе интерполяционных формул, основанная на замене функции некоторым рядом. Производные вычисляются здесь через раздельные разности. В зависимости от используемой формулы это методы Ньютона, Стирлинга, Эрланга, Бесселя, Гаусса и т. п. [3];

- В. Другая методика изложена в книге [4], где для вычисления производных используются некоторые формулы (похожие на разложение в ряд, как в предыдущем методе).
- С. Третья методика, впервые изложенная в [5], использует свойство свёртки, при котором дифференцирование функции заменяется свёрткой с производной функции Гаусса, по формуле  $D(f * g) = Df * g = f * Dg$ .
- Д. Четвёртая методика основана на регуляризации и наиболее полно изложена в книге Ланцоша [6] в 1961 году. Соответствующие методы называются «дифференцированием с использованием квадратур», так как автор аппроксимирует дифференцируемую в точке функцию квадратичной параболой.
- Е. Ещё одна методика, которую необходимо упомянуть, основана на методе Нумерова [7]. В ней используется метод декомпозиции, однако параметры функции подбираются так, что ошибка вычисления первой производной имеет третий порядок, а второй — четвёртый.

## 2. Метод дифференцирования

Анализ этих методов показывает, что каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. В одних методах необходимо использовать разложение в некоторый ряд (А, В), в других применяется весьма дорогостоящая в вычислительном отношении свёртка (С) или трудоёмкая формула (Д).

Исследования авторов в области обработки изображений и распознавании формы графических объектов в последнее время привели к детальному анализу методик поиска особых точек (точек с высокой кривизной, являющимися информативными с точки зрения распознавания формы), основанных на методе Arch Height, впервые опубликованном в 1992 году [8], который в дальнейшем неоднократно рассматривался и модифицировался, например в [9].

Для изложения метода предположим, что имеется  $n \gg 1$  точек  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  параметризованной плоской кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $1 \leq t \leq n$ . Первоначально идея этого метода заключалась в вычислении расстояния  $d_i$ , между точкой кривой —  $P_i$  и перпендикуляром к хорде как показано на рис. 1. Это расстояние аппроксимирует значение модуля кривизны в этой точке.

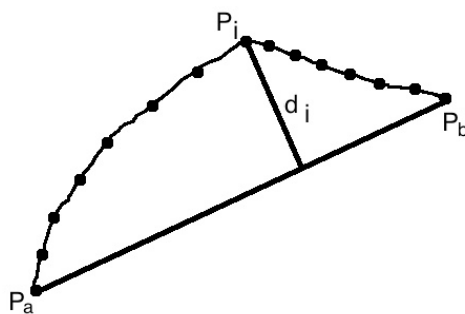


Рис. 1. Фрагмент кривой  $\Gamma$  с точками  $P_k$  и хордой  $(P_i, P_j)$

Расстояние вычислялось в евклидовой метрике по формуле:

$$d_i = \sqrt{\frac{((x_i - x_a)(y_b - y_a) - (y_i - y_a)(x_b - x_a))^2}{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}}, \quad (1)$$

где  $x_i, y_i, x_a, y_a, x_b, y_b$  — координаты точек  $P_i, P_a, P_b$  соответственно. При этом количество точек фрагментов кривой на отрезках  $(P_a, P_i)$  и  $(P_i, P_a)$  совпадает.

При проведении серии экспериментов над аналитически заданными кривыми с различной длиной хорды было определено, что расстояние между точкой  $P_i$  и хордой действительно пропорционально модулю кривизны кривой  $\Gamma$  в этой точке, как показано на рис. 2 и на рис. 3.

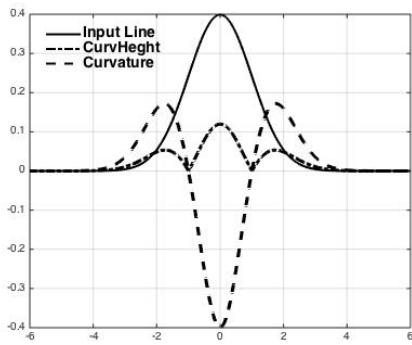


Рис. 2. Длина хорды 7 шагов

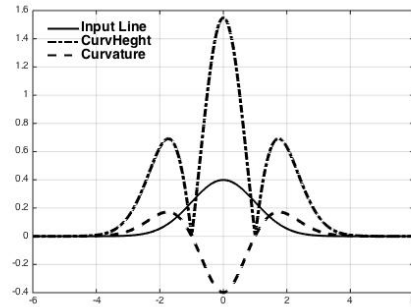


Рис. 3. Длина хорды 25 шагов

Здесь хорошо видно, что вычисленная в виде расстояния кривизна (красная линия) практически совпадает с теоретической (зелёная линия), за исключением знака, поскольку расстояние не может быть отрицательным. Кроме того, хорошо видно возрастание амплитуды расстояния с увеличением длины хорды. Однако при вычислении расстояния между точкой  $P_i$  и точкой  $M$ , расположенной на середине длины хорды, по формуле евклидова расстояния:

$$d_i = \sqrt{(x_k - x_M)^2 + (y_k - y_M)^2}, \quad (2)$$

где  $(x_M, y_M)$  — координаты середины отрезка, выяснилось, что при малых длинах хорды получаемое значение такого расстояния оказывается пропорционально значению первой производной, вычисленной в данной точке. На рисунках 4 и 5 в качестве дифференцируемых кривых используются аналитически построенные кривые — первой производной функции Гаусса (рис. 4) и функция  $f(x) = \exp(\cos(x))$  (рис. 5).

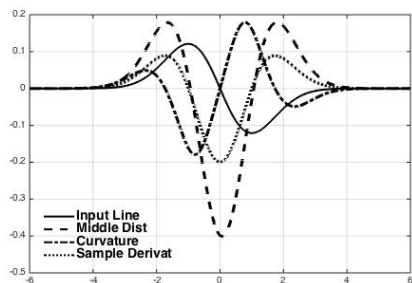


Рис. 4. Первая производная функции Гаусса

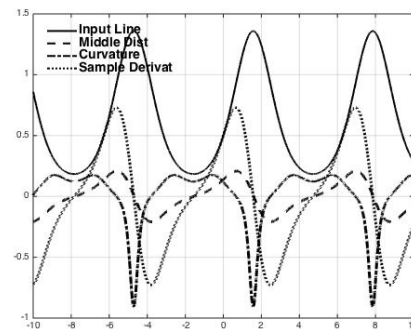


Рис. 5. Экспонента от косинуса

Из рис. 5 видно, что кривая расстояния, вычисленная по формуле (2)<sup>1</sup> хорошо аппроксимирует первую производную от заданной функции и совсем не коррелирует с теоретически вычисленной кривизной.

Проведённые далее эксперименты показали, что с увеличением длины хорды точность дифференцирования существенно снижается, а при длине хорды в 50-70 точек функция расстояния стремится к значению кривизны, но с обратным знаком, как показано на рис. 6 и 7.

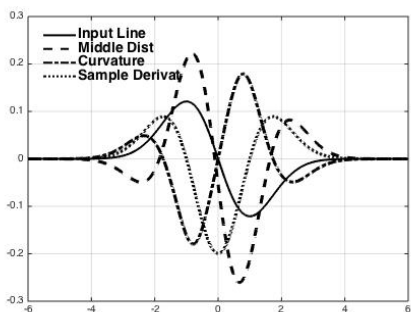


Рис. 6. Длина хорды равна 35

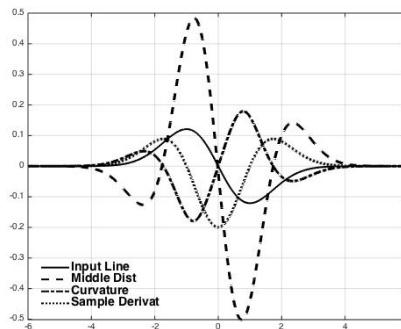


Рис. 7. Длина хорды равна 75

Однако на рис. 8 и 9 для функции Гаусса показано, что точность вычисления кривизны зависит от формы дифференцируемой кривой.

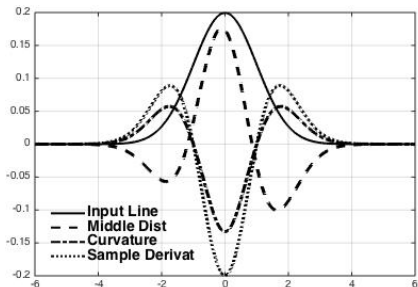


Рис. 8. Длина хорды равна 35

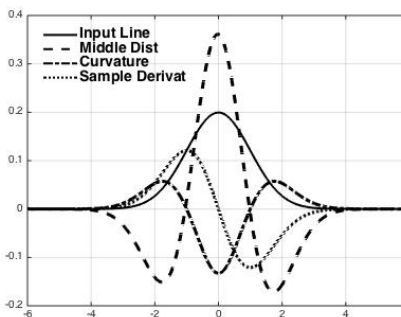


Рис. 9. Длина хорды равна 75

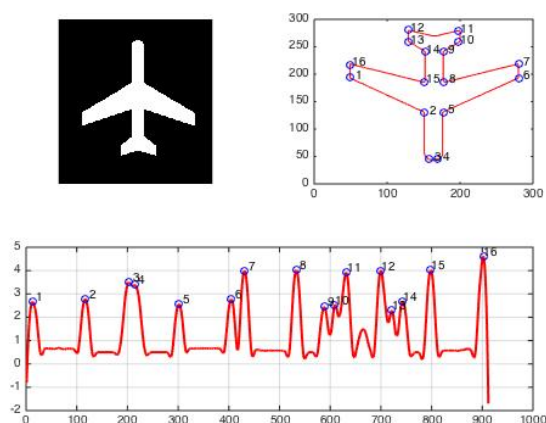
Из рис. 8 и 9 видно, что при дальнейшем увеличении длины хорды хорошо заметны искажения для функции расстояния в виде нарушения симметрии (которая теперь стремится к кривизне, но с обратным знаком), которые возрастают при дальнейшем увеличении длины хорды (справа).

### 3. Обсуждение и выводы

В качестве иллюстрации качества вычисления производной приведём рисунок, на котором показано тестовое изображение самолёта, его контур и функция производной,

<sup>1</sup>При вычислении расстояния было использовано условие, что если хорда расположена выше кривой, то она берётся с положительным знаком, а если ниже — то с отрицательным.

вычисленная по этому контуру. На рис. 10 показан результат обработки силуэта самолёта (слева сверху) с небольшим уровнем шума. Для получения контура объекта (справа сверху) была использована следующая последовательность функций Matlab из пакета Image Processing: загрузка изображения; фильтрация, для удаления шумов и метод Contour Following [10]. Функция производной контура, вычисленная по предложенной методике приведена на рис. 10 (внизу).



**Рис. 10.** Силуэт самолёта с наложенными шумами (слева сверху), его полученный контур (справа сверху) с нанесёнными точками высокой кривизны и функция производной контура (снизу), с соответствующими точками максимальной кривизны

Для определения области применимости данного метода дифференцирования были проведены исследования над изображениями с различным уровнем шумов. Результаты этих исследований свидетельствуют о небольших погрешностях дифференцирования при увеличении отношения «сигнал–шум» вплоть до 60 дБ. При больших уровнях шумов точность дифференцирования существенно снижалась.

На основе полученных результатов можно сделать выводы о работоспособности данного метода при использовании его для обработки изображений и идентификации графических объектов на изображениях, полученных в различных областях геодезии, медицины, астрономии, ядерной физики и др.

Кроме того, данный метод может быть рекомендован для применения в других областях науки не связанных с обработкой изображений, но тем не менее использующих обработку табулированных данных, например в экономике при изучении различных трендов.

## Литература

1. *Nixon M., Aguado A.* Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision. — 3 edition. — Elsevier, 2012. — 423 p.
2. *Nguyen T. P., Debled-Rennesson I.* A Discrete Geometry Approach for Dominant Point Detection // Pattern Recognition. — 2011. — Vol. 44, No 1. — Pp. 32–44.
3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычисления. — М.: Физматлит, 1962. — Т. 1.
4. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. — Washington: U.S National Bureau of Standards, 1964.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. — Москва: Физматлит, 1959.

6. *Lanczos C.* Applied Analysis. — New Jersey: Prentice Hall Inc, 1956.
7. *Numerov B.* Note on the Numerical Integration of  $d^2x/dt^2 = f(x, t)$  // *Astronomische Nachrichten.* — 1927. — Vol. 230, No 19. — Pp. 359–364. — ISSN 1521-3994.
8. *Yijia L., Jiqing D., Hongmei W.* Contour Shape Description Based on an Arch Height Function // *Pattern Recognition.* — 1992. — Vol. 25, No 1. — Pp. 17 – 23. — ISSN 0031-3203.
9. *Marji M., Klette R., Sij P.* Corner Detection and Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance // *Combinatorial Image Analysis: 10th International Workshop, IWCIA 2004, Auckland, New Zealand, December 1-3, 2004. Proceedings / Ed. by R. Klette, J. Žunić.* — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Pp. 512–521.
10. *Thakur R.* Contour Following in Binary Images. — <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23056-contour-following-in-binary-images>.

UDC 519.68

## About One Method of Differentiation of a Flat Discrete Planar Curve in Image Processing

I. M. Gostev\*, L. A. Sevastyanov†

\* *National Research University "Higher School of Economic", Moscow, Russia*

† *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

The problem of receiving points with high curvature (singular points) of contours for identification of the shape of objects on images is solved. Analysis of existing methods of numerical differentiation in the given aspect is held. The new method of differentiation of the flat discretely defined curves, which are dots (pixels) of circuits, based on variations of Arch Height method is considered. Features of such method of differentiation are shown using various formulas of calculation of a derivative. Dependency aspects of the accuracy of the derivative on the chord length are analyzed. It is shown, that with an increase in its length differentiation accuracy degrades, and the result tends to the module of curvature of a curve at the given point. Comparison of the developed method with other known methods is made. The analysis of area of applicability and variability of parameters of differentiation is made. The accuracy aspects of calculation of derivatives for various parameters of differentiation are investigated. Examples of differentiation of various curves, both set analytically, and the functions-contours received from real images are considered. It is shown, that the offered method allows to get rid of the ambiguity in position of points of a contour with high curvature and consequently to raise quality of recognition of the shape of objects. Possible scopes of the given method in various areas of science and technics are stated.

**Key words and phrases:** image processing, pattern recognition, computer geometry, differentiation, singular points, analysis of contour

## References

1. M. Nixon, A. Aguado, *Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision*, 3rd Edition, Elsevier, 2012.
2. T. P. Nguyen, I. Debled-Rensson, A Discrete Geometry Approach for Dominant Point Detection, *Pattern Recognition* 44 (1) (2011) 32–44.
3. I. S. Beresin, N. P. Zhidkov, *Methods of Calculation*, Vol. 1, Fizmatlit, Moscow, 1962, in Russian.
4. M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, U.S National Bureau of Standards, Washington, 1964.
5. I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Fizmatlit, Moscow, 1959, in Russian.
6. C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice Hall Inc, New Jersey, 1956.
7. B. Numerov, Note on the Numerical Integration of  $d^2x/dt^2 = f(x, t)$ , *Astronomische Nachrichten* 230 (19) (1927) 359–364.

8. L. Yijia, D. Jiqing, W. Hongmei, Contour Shape Description Based on an Arch Height Function, *Pattern Recognition* 25 (1) (1992) 17–23.
9. M. Marji, R. Klette, P. Siy, *Corner Detection and Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 512–521.
10. R. Thakur, Contour Following in Binary Images.  
URL <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23056-contour-following-in-binary-images>

© Гостев И. М., Севастьянов Л. А., 2016