Математика

УДК 517.972.5

Структура некоторого квазилинейного дифференциально-разностного оператора, допускающего вариационный принцип

И. А. Колесникова

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье исследуется на потенциальность оператор на заданной области определения и относительно некоторой билинейной формы. В случае потенциальности строится соответствующий функционал. В случае непотенциальности заданного оператора рассматривается метод нахождения вариационного множителя.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, вариационный множитель, обратная задача вариационного исчисления, вариационный принцип, уравнения с отклоняющимися аргументами.

1. Введение. Постановка задачи

Работа посвящена изучению квазилинейного дифференциально-разностного оператора с частными производными. Разработка вариационного метода исследования дифференциального уравнения $N(u) = f$ тесно связана с обратной задачей вариационного исчисления (ОЗВИ) и исследованием решения этой обратной задачи в смысле отыскания функционалов $F[u]$, содержащих производные от неизвестной функции u меньшего порядка, чем уравнение $N(u) - f = 0$ и таких, что множество решений исследуемого уравнения совпадает с множеством критических точек построенных функционалов.

Однако все преимущества вариационных принципов в течение длительного времени удавалось использовать лишь для узкого класса потенциальных операторов.

Существует потребность в получении вариационных принципов для новых классов операторов.

Задачи, допускающие вариационную формулировку, позволяют существенно ослабить математические ограничения, накладываемые на искомые решения, а также использовать эффективные методы для исследования их свойств.

В случае непотенциальности заданного оператора можно рассматривать задачу об отыскании вариационного множителя [1].

Наиболее привлекательным классом функционалов — решений ОЗВИ для дифференциальных уравнений является класс функционалов Эйлера. Исследование проблемы построения искомых функционалов начинается с проверки выполнения условий потенциальности соответствующих операторов. Для дифференциальных уравнений без отклонения аргументов имеются эффективные методы, позволяющие проверять потенциальность соответствующих операторов [2].

В плане дифференциально-разностных операторов обратные задачи вариационного исчисления почти не рассматриваются, но рассматриваются смешанные задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения, хотя прямые задачи вариационного [3, 4] исследуются на потенциальности дифференциально-разностные операторы [5–7] и др.

Пусть задано операторное уравнение [8]:

$$N(u) = 0, \quad u \in D(N),$$

Статья поступила в редакцию 11 ноября 2012 г.

где $N : D(N) \subseteq U \to V, U, V$ — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Будем предполагать, что в каждой точке $u \in D(N)$ существует производная Гато N'_u так, что $\delta N(u,h) = N'_u h$.

Пусть на $V \times U$ задана билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times U \to R$

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} u(x,t), v(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Как известно [2], оператор N называется потенциальным относительно заданной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, если существует функционал $F_N[u] : D(F_N) \equiv D(N) \to R$, такой, что $\delta F_N(u,h) = \langle N(u), h \rangle \ \forall u \in D(N), \ \forall h \in D(N'_u)$.

В дальнейшем нам понадобится критерий потенциальности вида

$$\langle N'_u h, g \rangle = \langle h, N'_u g \rangle \ \forall u \in D(N), \ \forall h, g \in D(N'_u). \tag{2}$$

Рассматривается оператор N дифференциально-разностного уравнения вида

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t+\lambda\tau) - b_\lambda^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t+\lambda\tau) +$$
$$+ f(x, t+\lambda\tau, u(x, t+\lambda\tau), u_{x_j}(x, t+\lambda\tau), u_t(x, t+\lambda\tau)) = 0, \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = \Omega \times (t_1, t_2)$; $t_2 - t_1 > 2\tau$; u — неизвестная функция; $a_\lambda(x,t) \in C^{0,2}_{x,t}(\overline{Q}), b_\lambda^{ij}(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}(\overline{Q}), \forall i, j = \overline{1,n}$.

Зададим область определения оператора N

$$D(N) = \Big\{ u \in U = C^{2,2}_{x,t}(\overline{\Omega} \times [t_0 - \tau, t_1 + \tau]) : \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = \varphi_{1k}(x,t),$$
$$(x,t) \in E_1 = \overline{\Omega} \times [t_0 - \tau, t_0], \quad \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = \varphi_{2k}(x,t),$$
$$(x,t) \in E_2 = \overline{\Omega} \times [t_1, t_1 + \tau], \left. \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu} \right|_{\Gamma_\tau} = \psi_\nu, \quad \nu = 0, 1 \Big\}, \tag{4}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times (t_0 - \tau, t_1 + \tau)$, φ_{10}, φ_{20}, ψ_ν — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_{jk} = \frac{\partial^k \varphi_{j0}}{\partial t^k}$, $(j = 1, 2; k = 0, 1)$.

По повторяющимся индексам сомножителей, находящимся на разных уровнях, подразумевается суммирование.

Сформулируем решаемые в данной работе задачи:

1) исследовать потенциальность N уравнения (3) на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (1);
2) в случае потенциальности построить для оператора N уравнения (3) соответствующий вариационный принцип;
3) исследовать задачу о существовании вариационного множителя для оператора N уравнения (3) в случае его непотенциальности.

2. Исследование на потенциальность оператора N уравнения (3)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор N из (3) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (1) тогда и только тогда, когда a_λ, b_λ^{ij} удовлетворяют условиям и функция f имеет следующую структуру:*

$$a_\lambda(x,t) = a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau), \quad b_\lambda^{ij}(x,t) = b_{-\lambda}^{ij}(x,t+\lambda\tau) \quad \forall\lambda = -1,0,1,$$

$$I_\lambda f(x,t,u,u_{x_j},u_t) = f(x,t,u,u_{x_j},u_t),$$

$$I_\lambda f(x,t,u,u_{x_j},u_t) = \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t}u_t(x,t+\lambda\tau) - \frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x_j}u_{x_j}(x,t+\lambda\tau) + I_\lambda\psi(x,t,u),$$

где ψ — произвольная гладкая функция, $I_\lambda g(x,t) = g(x,t+\lambda\tau)$.

Доказательство. Имеем

$$N'_u h = \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t+\lambda\tau) - b_\lambda^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x,t+\lambda\tau) + \\ + \left\{\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}h_{x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_t}h_t\right\}(x,t+\lambda\tau) \\ \forall u \in D(N), \quad \forall h,g \in D(N'_u), \quad \forall i,j = \overline{1,n}. \quad (5)$$

Из (1) и (5) получаем

$$\langle N'_u h, g\rangle = \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t+\lambda\tau) - b_\lambda^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(x,t+\lambda\tau) + \\ + \left\{\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}h_{x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_t}h_t\right\}(x,t+\lambda\tau)\Bigg\}g(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ \forall u \in D(N), \quad \forall h,g \in D(N'_u), \quad \forall i,j = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Далее раскроем скобки в (6) и обозначим слагаемые соответственно

$$I_1 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1} a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t+\lambda\tau)g(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

$$I_2 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1} b_\lambda^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(x,t+\lambda\tau)g(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

$$I_3 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}h_{x_j}(x,t+\lambda\tau)g(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

$$I_4 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial u_t}h_t(x,t+\lambda\tau)g(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

$$I_5 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial u} h(x, t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что допустимые функции h и g на границе области обращаются в ноль, и в силу области определения оператора N выполнено

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0} h(x,t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_1+\tau} h(x,t)\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{t_1-\tau}^{t_1} h(x,t-\tau)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+\tau} h(x,t+\tau)\mathrm{d}t = 0 \ \forall x \in \Omega, \tag{7}$$

из $I_1 - I_5$ получаем

$$I_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau) D_t^2 (a_\lambda(x,t) g(x,t)) \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2 a_\lambda(x,t)}{\partial t^2} g(x,t) + 2 \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial t^2} a_\lambda(x,t) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Обозначим $t' = t + \lambda\tau$

$$I_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0+\lambda\tau}^{t_1+\lambda\tau} h(x,t') \left(\frac{\partial^2 a_\lambda(x,t'-\lambda\tau)}{\partial t^2} g(x,t'-\lambda\tau) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial a_\lambda(x,t'-\lambda\tau)}{\partial t} \frac{\partial g(x,t'-\lambda\tau)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(x,t'-\lambda\tau)}{\partial t^2} a_\lambda(x,t'-\lambda\tau) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Сделаем замену $t' = t$ и в силу условия (7) в последнем интеграле можно вернуться к первоначальным пределам интегрирования. В результате получаем

$$I_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t) \left(\frac{\partial^2 a_\lambda(x,t-\lambda\tau)}{\partial t^2} g(x,t-\lambda\tau) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial a_\lambda(x,t-\lambda\tau)}{\partial t} \frac{\partial g(x,t-\lambda\tau)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(x,t-\lambda\tau)}{\partial t^2} a_\lambda(x,t-\lambda\tau) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

или

$$I_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t) \left(\frac{\partial^2 a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2} g(x,t+\lambda\tau) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial t} \frac{\partial g(x,t+\lambda\tau)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2} a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x. \tag{8}$$

$$I_2 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau) D_{x_i x_j} (b_\lambda^{ij}(x,t) g(x,t)) \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}g(x,t)+2\frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x,t)}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}b_\lambda^{ij}(x,t)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Проделав такие же преобразования как и в I_1, получим

$$I_2=\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1}h(x,t)\left(\frac{\partial^2 b_{-\lambda}^{ij}(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}g(x,t+\lambda\tau)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial b_{-\lambda}^{ij}(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}b_{-\lambda}^{ij}(x,t+\lambda\tau)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$\forall i,j=\overline{1,n}. \quad (9)$$

$$I_3=-\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1}h(x,t+\lambda\tau)\times$$
$$\times D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_{x_j}}g(x,t)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=$$
$$=-\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1}h(x,t+\lambda\tau)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_{x_j}}g_{x_j}(x,t)+\right.$$
$$\left.+g(x,t)D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_{x_j}}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Обозначим $t'=t+\lambda\tau$

$$I_3=-\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0+\lambda\tau}^{t_1+\lambda\tau}h(x,t')\left(\frac{\partial f(x,t',u(x,t'),u_{x_j}(x,t'),u_t(x,t'))}{\partial u_{x_j}}g_{x_j}(x,t'-\lambda\tau)+\right.$$
$$\left.+g(x,t'-\lambda\tau)D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t',u(x,t'),u_{x_j}(x,t'),u_t(x,t'))}{\partial u_{x_j}}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Сделаем замену $t'=t$ и в силу условия (7) в последнем интеграле можно вернуться к первоначальным пределам интегрирования. В результате имеем

$$I_3=-\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_\Omega\int_{t_0}^{t_1}h(x,t)\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}g_{x_j}(x,t-\lambda\tau)+\right.$$
$$\left.+g(x,t-\lambda\tau)D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

или

$$I_3 = -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1} h(x,t)\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}} g_{x_j}(x,t+\lambda\tau)+\right.$$
$$\left. + g(x,t+\lambda\tau) D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \quad (10)$$

$$I_4 = -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau)\times$$
$$\times D_t\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_t} g(x,t)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$
$$= -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1} h(x,t+\lambda\tau)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_t} g_t(x,t)+\right.$$
$$\left. + g(x,t) D_t\left(\frac{\partial f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_{x_j}(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_t}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Обозначим $t' = t + \lambda\tau$

$$I_4 = -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0+\lambda\tau}^{t_1+\lambda\tau} h(x,t')\left(\frac{\partial f(x,t',u(x,t'),u_{x_j}(x,t'),u_t(x,t'))}{\partial u_t} g_t(x,t'-\lambda\tau)+\right.$$
$$\left. + g(x,t'-\lambda\tau) D_t\left(\frac{\partial f(x,t',u(x,t'),u_{x_j}(x,t'),u_t(x,t'))}{\partial u_t}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Сделаем замену $t' = t$ и в силу условия (7) в последнем интеграле можно вернуться к первоначальным пределам интегрирования. В результате получаем

$$I_4 = -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1} h(x,t)\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t} g_t(x,t-\lambda\tau)+\right.$$
$$\left. + g(x,t-\lambda\tau) D_t\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

или

$$I_4 = -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1} h(x,t)\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t} g_t(x,t+\lambda\tau)+\right.$$
$$\left. + g(x,t+\lambda\tau) D_t\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \quad (11)$$

$$I_5=\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}h(x,t)\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u}g(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \qquad (12)$$

Таким образом, из (6) и (8)–(12) имеем

$$\langle< N'_u h,g\rangle=\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}h(x,t)\left\{\left(\frac{\partial^2 a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 b^{ij}_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}-\right.\right.$$
$$-D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}\right)-D_t\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t}\right)+$$
$$\left.+\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_t(x,t))}{\partial u}\right)g(x,t+\lambda\tau)+a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)\frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2}-$$
$$-b^{ij}_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)\frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}-\left(2\frac{\partial b^{ij}_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}\right)\times$$
$$\left.\times g_{x_j}(x,t+\lambda\tau)+\left(2\frac{\partial a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)}{\partial t}-\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t}\right)g_t(x,t+\lambda\tau)\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$\forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\quad \forall i,j=\overline{1,n}. \qquad (13)$$

С другой стороны, имеем

$$\langle N'_u g,h\rangle=$$
$$=\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2}-b^{ij}_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 g(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}+\left\{\frac{\partial f}{\partial u}g+\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}g_{x_j}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial f}{\partial u_t}g_t\right\}(x,t+\lambda\tau)\right\}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\quad \forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\forall i,j=\overline{1,n}. \qquad (14)$$

Обозначим $I_\lambda f(x,t,u,u_x,u_t)=f(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_x(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))$. Левые части (13) и (14) равны тогда и только тогда, когда

$$I_\lambda f(x,t,u,u_x,u_t)=f(x,t,u,u_x,u_t), \qquad (15)$$

$$a_\lambda(x,t)=a_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau),\quad b^{ij}_\lambda(x,t)=b^{ij}_{-\lambda}(x,t+\lambda\tau)\quad \forall\lambda=-1,0,1,$$

$$\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}h(x,t)\left\{\left(\frac{\partial^2 a_\lambda(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 b^{ij}_\lambda(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}-D_{x_j}\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_{x_j}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-D_t\left(\frac{\partial f(x,t,u(x,t),u_{x_j}(x,t),u_t(x,t))}{\partial u_t}\right)\right)g(x,t+\lambda\tau)-2\left(\frac{\partial b^{ij}_\lambda(x,t)}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}\right)g_{x_j}(x,t+\lambda\tau)+$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial u_t}\right)g_t(x,t+\lambda\tau)\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=0\quad \forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\ \forall i,j=\overline{1,n}.$$

Условие (15) выполняется, например, для периодических функций. В силу произвольности h и g заключаем, что для потенциальности оператора N (3) на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (1) необходимо и достаточно для $\forall(x,t) \in Q$, $\forall u \in D(N)$ выполнения условий

$$\begin{cases} \frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} = 0, \\ \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u_t} = 0, \\ D_t\left(\frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u_t}\right) - D_{x_j}\left(\frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}\right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Отметим, что третье условие последней системы следует из первых двух условий. В частности, из первого условия системы (16) следует, что

$$I_\lambda f(x,t,u,u_x,u_t) = \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} u_t(x,t+\lambda\tau) + I_\lambda \varphi(x,t,u,u_x), \tag{17}$$

где φ — произвольная гладкая функция.

Подставляя полученное выражение (17) для f во второе условие системы (16), получаем

$$I_\lambda \varphi(x,t,u,u_x) = -\frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x} u_x(x,t+\lambda\tau) + I_\lambda \psi(x,t,u), \tag{18}$$

где ψ — произвольная гладкая функция.

Таким образом, из равенств (17) и (18) находим

$$I_\lambda f(x,t,u,u_x,u_t) = \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} u_t(x,t+\lambda\tau) - \frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x} u_x(x,t+\lambda\tau) + I_\lambda \psi(x,t,u), \tag{19}$$

что и требовалось доказать. □

3. Построение функционала $F_N[u]$ для оператора N уравнения (3)

Запишем (3), используя выражение для f (19)

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t+\lambda\tau) - b_\lambda^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t+\lambda\tau) + \\ + \frac{\partial a_\lambda(x,t)}{\partial t} u_t(x,t+\lambda\tau) - \frac{\partial b_\lambda^{ij}(x,t)}{\partial x} u_x(x,t+\lambda\tau) + I_\lambda \psi(x,t,u) = 0. \tag{20}$$

Находим функционал по формуле

$$F_N[u] = \int_0^1 \langle N(u_0 + \mu(u-u_0)), u - u_0 \rangle \, \mathrm{d}\mu =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 (a_\lambda(x,t)[u_{0tt} + \mu(u_{tt} - u_{0tt})] - b_\lambda^{ij}(x,t)[u_{0x_ix_j} + \mu(u_{x_ix_j} - u_{0x_ix_j})] + \\ + a_{\lambda t}(x,t)[u_{0t} + \mu(u_t - u_{0t})] - b_{\lambda x_i}^{ij}(x,t)[u_{0x_j} + \mu(u_{x_j} - u_{0x_j})])(u-u_0)\mathrm{d}\mu \mathrm{d}t \mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1} I_\lambda\psi(x,t,\tilde{u})(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

где $\tilde{u}=u_0+\mu(u-u_0)$.

Проинтегрируем по переменной μ первый интеграл (20) и получим

$$F_N[u]=\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1}(a_\lambda(x,t)[u_{0tt}+\frac{1}{2}(u_{tt}-u_{0tt})]-$$
$$-b_\lambda^{ij}(x,t)[u_{0x_ix_j}+\frac{1}{2}(u_{x_ix_j}-u_{0x_ix_j})]+a_{\lambda t}(x,t)[u_{0t}+\frac{1}{2}(u_t-u_{0t})]-$$
$$-b_{\lambda x_i}^{ij}(x,t)[u_{0x_j}+\frac{1}{2}(u_{x_j}-u_{0x_j})])(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1} I_\lambda\psi(x,t,\tilde{u})(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

или

$$F_N[u]=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}(a_\lambda(x,t)[u_{0tt}+u_{tt}]-b_\lambda^{ij}(x,t)[u_{0x_ix_j}+u_{x_ix_j}]+a_{\lambda t}(x,t)[u_{0t}+u_t]-$$
$$-b_{\lambda x_i}^{ij}(x,t)[u_{0x_j}+u_{x_j}])(u-u_0)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1} I_\lambda\psi(x,t,\tilde{u})(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}D_t\Big(a_\lambda(x,t)(u_{0t}+u_t)(u-u_0)\Big)-D_{x_i}\Big(b_\lambda^{ij}(x,t)(u_{0x_j}+u_{x_j})(u-u_0)\Big)-$$
$$-a_\lambda(x,t)(u_{0t}+u_t)(u_t-u_{0t})+b_\lambda^{ij}(x,t)(u_{0x_j}+u_{x_j})(u_{x_i}-u_{0x_i})\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1} I_\lambda\psi(x,t,\tilde{u})(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \quad (21)$$

Таким образом, из (21) следует, что искомый функционал оператора (20) имеет вид

$$F_N[u]=-\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}(a_\lambda(x,t)u_t^2-b_\lambda^{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j})\mathrm{d}t\mathrm{d}x+$$
$$+\sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1} I_\lambda\psi(x,t,\tilde{u})(u-u_0)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 1. Оператор

$$N(u)\equiv 2u_{tt}(x,t)+e^{u(x,t)}u_x(x,t+\tau)-e^{u(x,t-\tau)}u_x(x,t-\tau)+$$
$$+2\sin(x+t-\tau)-e^{\sin(x+t-\tau)}\cos(x+t)+e^{\sin(x+t-2\tau)}\cos(x+t-2\tau)=0$$

является потенциальным на области определения

$$D(N)=\Big\{u\in U=C^{1,2}_{x,t}(\overline{\Omega}\times[t_0-\tau,t_1+\tau]):\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}=\varphi_{1k}(x,t),$$
$$(x,t)\in E_1=\overline{\Omega}\times[t_0-\tau,t_0],\quad \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}=\varphi_{2k}(x,t),$$
$$(x,t)\in E_2=\overline{\Omega}\times[t_1,t_1+\tau],\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_\tau}=\psi,\Big\}$$

относительно билинейной формы (1), что нетрудно проверить.

Следуя изложению пункта **2**, $a_\lambda(x,t)=2, b^{ij}_\lambda(x,t)=0$ для заданного оператора $N(u)$ можно построить функционал $F_N[u]$, который имеет следующий вид:

$$F_N[u]=\int\limits_\Omega\int\limits_{t_0}^{t_1}(u_t^2(x,t-\tau)-e^{u(x,t)}u_x(x,t+\tau)+2\sin(x+t-\tau)-$$
$$-e^{\sin(x+t-\tau)}\cos(x+t)+e^{\sin(x+t-2\tau)}\cos(x+t-2\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Следует отметить, что $u_0=\sin(x+y-\tau)$ является решением данной вариационной задачи.

4. Построение вариационного множителя вида $M=M(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_x(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))$ для оператора N уравнения (3)

Пусть структура функции f отлична от вида (19). Тогда оператор N (3) не будет потенциален. Следовательно можно рассматривать вопрос о существовании некоторого вариационного множителя вида $M=M(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_x(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau))$.

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Если условия (6) не выполняются,* $a_\lambda(x,t)\neq 0$ *и* $b^{ij}_\lambda(x,t)\neq 0$ *в* Q, *то для оператора* N *(3) существует вариационный множитель* $M=M(x,t+\lambda\tau,u,u_x,u_t),\quad \forall\lambda=-1,0,1\Leftrightarrow\forall u\in D(N),\forall(x,t)\in Q$ *выполняются условия:*

$$M(x,t,u(x,t))=I_\lambda M(x,t,u(x,t)),\frac{1}{M}D_{x_i}(b^{ij}_\lambda M)+\frac{\partial}{\partial u_{x_j}}f=0,$$

$$\frac{1}{M}D_t(a_\lambda M)-\frac{\partial}{\partial u_t}f=0.\quad\forall u\in D(N),\ \forall\lambda=-1,0,1,\quad\forall i,j=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}N(u+\epsilon h)\bigg|_{\epsilon=0}\equiv$$
$$\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\sum_{\lambda=-1}^{1}M(x,t+\lambda\tau,u+\epsilon h,u_{x_j}+\epsilon h_{x_j},u_t+\epsilon h_t)\left(a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2(u+\epsilon h)(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2}-\right.$$
$$\left.-b^{ij}_\lambda(x,t)\ \frac{\partial^2(u+\epsilon h)(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i\partial x_j}+f(x,t+\lambda\tau,(u+\epsilon h),(u_{x_j}+\epsilon h_{x_j}),(u_t+\epsilon h_t))\right)\bigg|_{\epsilon=0},$$

$$
\begin{aligned}
N'_u h = \sum_{\lambda=-1}^{1} M \Bigg(a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 h(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2} - b_\lambda^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 h(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i \partial x_j} + \\
+ \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} h(x,t+\lambda\tau) + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}(x,t+\lambda\tau) + \frac{\partial f}{\partial u_t} h_t(x,t+\lambda\tau) \right\} \Bigg) + \\
+ \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} h(x,t+\lambda\tau) + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}(x,t+\lambda\tau) + \frac{\partial M}{\partial u_t} h_t(x,t+\lambda\tau) \right\} N(u) \\
\forall u \in D(N), \quad \forall h, g \in D(N'_u), \quad \forall i,j = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

Используя определение билинейной формы, получим

$$
\begin{aligned}
\langle N'_u h, g \rangle = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ M \Bigg(a_\lambda(x,t)\frac{\partial^2 h(x,t+\lambda\tau)}{\partial t^2} - b_\lambda^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 h(x,t+\lambda\tau)}{\partial x_i \partial x_j} + \\
+ \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} h_{x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_t} h_t \right\} (x,t+\lambda\tau) \Bigg) + \\
+ \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} h + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} h_{x_j} + \frac{\partial M}{\partial u_t} h_t \right\} (x,t+\lambda\tau) N(u) \Bigg\} g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\
\forall u \in D(N),\ \forall h, g \in D(N'_u), \quad \forall i,j = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим и преобразуем каждое слагаемое данного выражения

$$
I_1 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} a_\lambda(x,t) M \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_2 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} b_\lambda^{ij}(x,t) M \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x,t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_3 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} M \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}(x,t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_4 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} M \frac{\partial f}{\partial u_t} h_t(x,t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_5 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} M \frac{\partial f}{\partial u} h(x,t+\lambda\tau) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_6 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial M}{\partial u} h(x,t+\lambda\tau) N(u) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$
I_7 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}(x,t+\lambda\tau) N(u) g(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,
$$

$$I_8 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial M}{\partial u_t} h_t(x, t + \lambda\tau) N(u) g(x, t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что допустимые функции h и g на границе области обращаются в ноль, и в силу области определения оператора N выполняется условие (6), получаем

$$I_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} D_{tt}(a_\lambda(x,t) M g(x,t)) h(x, t+\lambda\tau) \mathrm{d}t \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ D_{tt}(a_\lambda(x,t)M) g(x,t) + 2D_t(a_\lambda(x,t)M) g_t(x,t) + g_{tt}(x,t) a_\lambda(x,t) M \Big\} \times$$

$$\times h(x, t+\lambda\tau) \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ D_{tt}(a_\lambda(x,t)M) g(x,t) + 2D_t(a_\lambda(x,t)M) g_t(x,t) +$$

$$+ g_{tt}(x,t) a_\lambda(x,t) M \Big\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_2 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} D_{x_i x_j}(b_\lambda^{ij}(x,t) M g(x,t)) h(x, t+\lambda\tau) \mathrm{d}t \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ D_{x_i x_j}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) g(x,t) + 2D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) g_{x_j}(x,t) +$$

$$+ g_{x_i x_j}(x,t) b_\lambda^{ij}(x,t) M) \Big\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_3 \equiv -\sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ M \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} g_{x_j}(x,t) + g(x,t) D_{x_j}\left(M \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} \right) \right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_4 \equiv -\sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ M \frac{\partial f}{\partial u_t} g_t(x,t) + g(x,t) D_t\left(M \frac{\partial f}{\partial u_t} \right) \right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_5 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ M \frac{\partial f}{\partial u} g(x,t) \right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_6 \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} N(u) g(x,t) \right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_7 \equiv -\sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} N(u) g_{x_j}(x,t) + g(x,t) D_{x_j}\left(\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} N(u) \right) \right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} h(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

$$I_8 \equiv -\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)g_t(x,t)+g(x,t)D_t\left(\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)\right\}\Big|_{t\to t-\lambda\tau}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Таким образом, из последних равенств получаем

$$\langle N'_u h, g\rangle = \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left\{D_{tt}(a_\lambda(x,t)M)-D_{x_ix_j}(b_\lambda^{ij}(x,t)M)-D_{x_j}\left(M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}\right)-\right.\right.$$
$$-D_t\left(M\frac{\partial f}{\partial u_t}\right)+M\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial M}{\partial u}N(u)-D_{x_j}\left(\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right)-D_t\left(\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)\Big\}g(x,t)-$$
$$-\left\{2D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M)+M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}+\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right\}g_{x_j}(x,t)+$$
$$+\left\{2D_t(a_\lambda(x,t)M-M\frac{\partial f}{\partial u_t}-\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)+\right\}g_t(x,t)+M(g_{tt}(x,t)a_\lambda(x,t)-$$
$$\left.-g_{x_ix_j}(x,t)b_\lambda^{ij}(x,t))\right\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\quad \forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\ \forall i,j=\overline{1,n}. \tag{22}$$

С другой стороны, имеем

$$\langle N'_u g, h\rangle = \sum_{\lambda=-1}^{1}\int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(M\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial M}{\partial u}N(u)\right)g(x,t+\lambda\tau)+\right.$$
$$+\left(M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}+\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right)g_{x_j}(x,t+\lambda\tau)+\left(M\frac{\partial f}{\partial u_t}+\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)g_t(x,t+\lambda\tau)+$$
$$\left.+Ma_\lambda(x,t)g_{tt}(x,t+\lambda\tau)-Mb_\lambda^{ij}(x,t)g_{x_ix_j}(x,t+\lambda\tau)\right\}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$\forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\quad \forall i,j=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Равенство левых частей (22) и (23) обеспечивает критерий потенциальности (2), что в свою очередь равносильно следующему:

$$\sum_{\lambda=-1}^{1}\int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left\{\left\{D_{tt}(a_\lambda(x,t)M)-D_{x_ix_j}(b_\lambda^{ij}(x,t)M)-D_{x_j}\left(M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}\right)-D_t\left(M\frac{\partial f}{\partial u_t}\right)+M\frac{\partial f}{\partial u}+\right.\right.\right.$$
$$+\frac{\partial M}{\partial u}N(u)-D_{x_j}\left(\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right)-D_t\left(\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau}-\left(M\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial M}{\partial u}N(u)\right)\Big\}g(x,t+\lambda\tau)-$$
$$-\left\{\left\{2D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M)+M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}-\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau}+M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}-\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right\}g_{x_j}(x,t+\lambda\tau)+$$
$$+\left\{\left\{2D_t(a_\lambda(x,t)M)-M\frac{\partial f}{\partial u_t}-\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau}-\left(M\frac{\partial f}{\partial u_t}+\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)\right\}g_t(x,t+\lambda\tau)+$$
$$+\left\{Ma_\lambda(x,t)g_{tt}(x,t)-Mb_\lambda^{ij}(x,t)g_{x_ix_j}(x,t)\right\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau}-Ma_\lambda(x,t)g_{tt}(x,t+\lambda\tau)+$$
$$\left.+Mb_\lambda^{ij}(x,t)g_{x_ix_j}(x,t+\lambda\tau)\right\}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=0\quad \forall u\in D(N),\ \forall h,g\in D(N'_u),\ \forall i,j=\overline{1,n}.$$

В силу произвольности g и h следует, что $\forall u \in D(N)$, $\forall (x,t) \in Q$ выполняются условия

$$\Big\{D_{tt}(a_\lambda(x,t)M) - D_{x_ix_j}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) - D_{x_j}\left(M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}}\right) - D_t\left(M\frac{\partial f}{\partial u_t}\right) + M\frac{\partial f}{\partial u} +$$

$$+\frac{\partial M}{\partial u}N(u) - D_{x_j}\left(\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right) - D_t\left(\frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau} - \left(M\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}N(u)\right) = 0,$$

$$-\Big\{2D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau} + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u) = 0,$$

$$+\Big\{2D_t(a_\lambda(x,t)M) - M\frac{\partial f}{\partial u_t} - \frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau} - \left(M\frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right) = 0,$$

$$\Big\{Ma_\lambda(x,t)g_{tt}(x,t) - Mb_\lambda^{ij}(x,t)g_{x_ix_j}(x,t)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau} - Ma_\lambda(x,t)g_{tt}(x,t+\lambda\tau) +$$

$$+ Mb_\lambda^{ij}(x,t)g_{x_ix_j}(x,t+\lambda\tau) = 0. \quad (24)$$

Из условий (24) получаем

$$\Big\{M\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}N(u)\Big\}\Big|_{t\to t+\lambda\tau} = M\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}N(u), \quad (25)$$

$$\begin{cases} D_t\left(D_t(a_\lambda(x,t)M) - M\frac{\partial f}{\partial u_t} - \frac{\partial M}{\partial u_t}N(u)\right) - \\ \qquad -D_{x_j}\left(D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u)\right) = 0, \\ D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}N(u) = 0, \\ D_t(a_\lambda(x,t)M) - M\frac{\partial f}{\partial u_t} - \frac{\partial M}{\partial u_t}N(u) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Равенство (25) приводит нас к выполнению условия

$$M(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_t(x,t)) = M(x,t+\lambda\tau,u(x,t+\lambda\tau),u_x(x,t+\lambda\tau),u_t(x,t+\lambda\tau)).$$

В системе (26) первое равенство является следствием двух последних, которые можно записать в виде

$$\begin{cases} D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}\left\{a_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_\lambda^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + f\right\} = 0, \\ D_t(a_\lambda(x,t)M) - M\frac{\partial f}{\partial u_t} - \frac{\partial M}{\partial u_t}\left\{a_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_\lambda^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + f\right\} = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$D_{x_i}(b_\lambda^{ij}(x,t)M) = b_{\lambda x_i}^{ij}(x,t)M + b_\lambda^{ij}(x,t)\left(\frac{\partial M}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial u}u_{x_i} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}u_{x_jx_i} + \frac{\partial M}{\partial u_t}u_{tx_i}\right),$$

$$D_t(a_\lambda(x,t)M) = a_{\lambda t}(x,t)M + a_\lambda(x,t)\left(\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial u}u_t + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}u_{x_jt} + \frac{\partial M}{\partial u_t}u_{tt}\right),$$

условия (26) принимают следующий вид:

$$b_{\lambda x_i}^{ij}(x,t)M + b_\lambda^{ij}(x,t)\left(\frac{\partial M}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial u}u_{x_i} + \frac{\partial M}{\partial u_t}u_{tx_i}\right) + M\frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}\left(a_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\right) = 0,$$

$$a_{\lambda t}(x,t)M + a_\lambda(x,t)\left(\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial u}u_t + \frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}u_{x_j t}\right) -$$
$$- M\frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial M}{\partial u_t}\left(b_\lambda^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - f\right) = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Из данных условий получаем

$$\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}}a_\lambda = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial u_t}b_\lambda^{ij} = 0,$$

а так как $a_\lambda \neq 0$, $b_\lambda^{ij} \neq 0$, следовательно $\frac{\partial M}{\partial u_{x_j}} = 0$ и $\frac{\partial M}{\partial u_t} = 0$, то есть $M = M(x,t,u)$ так же из условий получим следующее

$$D_{x_i}(bM) + \frac{\partial}{\partial u_{x_j}}(Mf) = 0, \quad D_t(a_\lambda M) - \frac{\partial}{\partial u_t}(Mf) = 0.$$

Окончательно получаем

$$\frac{1}{M}D_{x_i}(bM) + \frac{\partial}{\partial u_{x_j}}f = 0, \quad \frac{1}{M}D_t(a_\lambda M) - \frac{\partial}{\partial u_t}f = 0.$$

Полученные результаты проиллюстрируем на **примере 2**.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$N_2(u) \equiv -2au_{tt}(x,t) - 2be^{u(x,t-\tau)-u(x,t)}u_{xx}(x,t) + b(u_x)^2(x,t+\tau) -$$
$$- a(u_t)^2(x,t) - 2be^{u(x,t-\tau)-u(x,t)}u_x(x,t-\tau)u_x(x,t) = 0,$$

$$(x,t) \in Q = (c,d) \times (t_0, t_1 - \tau),\ t_1 - t_0 > 2\tau,\ \tau > 0, \quad (x,t) \in (c,d) \times (t_0,t_1),$$

где a, b — константы, u — неизвестная функция, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Зададим область определения оператора N_2

$$D(N_2) = \left\{ u \in U = C_{x,t}^{2,2}(\overline{Q_\tau}) \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = \varphi_{1k}(x,t) \quad (x,t) \in E_1 = [c,d] \times [t_0 - \tau, t_0]; \right.$$
$$k = 0,1,\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{2k}(x,t),\ (x,t) \in E_1 = [c,d] \times [t_1 - \tau, t_1];$$
$$\left. k = 0,1,\ u(c,t) = \psi_1(t),\ u(d,t) = \psi_2(t) t \in [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \right\},$$

где $Q_\tau = (c,d) \times (t_0 - \tau, t_1 + \tau)$, $\varphi_{i0} \in C^1(E_i)$, $\varphi_{i1} = \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial t}$ $\psi_i \in C([t_0 - \tau, t_1 + \tau])$ $(i = 1,2)$.

Легко проверить, что оператор N_2 является непотенциальным относительно области определения $D(N_2)$ относительно классической билинейной формы (2).

Следуя пункту **3**, найдём вариационный множитель $M = M(x,t,u,u_t) \neq 0$ и соответствующий функционал $F_N[u]$ такой, что

$$\delta F[u,h] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} M(x,t,u,u_t)N(u)h\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad \forall u \in D(N) \quad \forall h \in D(N_u').$$

Используя теорему **2** найдём множитель $M = e^{u(x,t)}$. В нашем случае $a_0 = -2a$, $b_0^x = 2b$, $f = b(u_x)^2(x, t+\tau) - a(u_t)^2(x,t) - 2be^{u(x,t-\tau)-u(x,t)}u_x(x,t-\tau)u_x(x,t)$ Оператор $N(u) = e^{u(x,t)}N_2(u)$ является потенциальным. Соответствующий функционал имеет вид

$$F_N[u] = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} e^{u(x,t-\tau)}[a(u_t)^2(x,t-\tau) + b(u_x)^2(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

5. Заключение

В заключение следует отметить, что для построения вариационного принципа необходимо исследовать на потенциальность оператор N на множестве $D(N)$ относительно заданной билинейной формы. В случае потенциальности построить для оператора N соответствующий функционал, содержащий производные от неизвестной функции u меньшего порядка, чем уравнение $N(u) - f = 0$, и множество решений исследуемого уравнения совпадает с множеством критических точек построенного функционала. В случае непотенциальности заданного оператора можно исследовать и другие методы, в частности, рассматривать задачу об отыскании вариационного множителя.

Литература

1. *Колесникова И. А.* Об условиях потенциальности для дифференциально-разностных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 443–445. [Kolesnikova I. A. On Potentiality Conditions for Partial Differential-Difference Equations // Differential Equations. — 2010. —Vol. 46. —No 3. —P. 1-4]
2. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов:Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНИТИ, 1992. — Т. 40, С. 176. [Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G. Variational principles for nonpotential operators / / Journal of Mathematical Sciences. —1992. —V. 40. —P. 176]
3. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 145–153. [Skubachevskii A. L., Shamin R. V. First mixed problem for a parabolic difference-differential equationMathematical Notes. — 1999. —Vol. 66, No 1. — P. 145–153]
4. *Скубачевский А. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач // Труды МИАН. — 2010. — Т. 269, № 1. — С. 225–241. [Skubachevskii A. L. Asymptotic formulas for solutions of nonlocal elliptic problems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2010. — Vol. 269, No 1. — P. 218–234]
5. *Попов А. М.* Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 423–426. [Popov A. M. Potentiality Conditions for Differential-Difference Equations. Differential Equations. —1998. —Vol. 46, No 3. — P. 423–426]
6. *Попов А. М.* Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64, № 3. — С. 437–442. [Popov A. M. Potentiality Conditions of Helmholtz for Sistems of Differential-Diffe Potentialityrence Equations // Mathematical Notes. —1998. —Vol. 64, No 3. — P. 437–442]
7. *Савчин В. М.* Условия потенциальности Гельмгольца для ДУЧП с отклоняющимися аргументами. XXXI Научная конференция факультета физико-математических и естественных наук. Тезисы докладов. — 1995. — С. 25.

[Savchin V. M. Potentiality Conditions of Helmholtz for DEPD with deviation arguments / / XXXI Scientific conference of The faculty of Physico-mathematical and Natural Sciences. Thesis. —1995. —RUDN. — P. 25]
8. *Kolesnikova I. A., Savchin V. M.* On the Existence of Variational Principles for a Class of the Evolutionary Differential-Difference Equations // Journal of Function Spaces and Applications. — 2012. — Vol. 2012, Article ID 780382. — `http://www.hindawi.com/journals/jfsa/2012/780382/`.

UDC 517.972.5

Variational Principles for a Differential Difference Quasilinear Operator

I. A. Kolesnikova

Department Mathematical Analisys and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, 117198, Moscow, Russia

The purpose of the present paper is to investigate the potentiality of the operator of differential difference equations and to construct the functional, if the given operator is a potential on a given set relatively to the some bilinear form. Method of construction of variational factor is suggested.

Key words and phrases: differential difference equations, functional differentional equations, variational factor, inverse problem of the calculus of variations, variational principles, equations with deviating arguments.