УСТОЙЧИВОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА В НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Сибелев Н.С., Вдовин Я.О.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, sibelev.nikita@yandex.ru

Работа посвящена построению устойчивого приближенного решения задачи продолжения поля потенциала с поверхности в область, не содержащую источников.

Ключевые слова: потенциальное поле, формула Грина, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, некорректно поставленная задача, метод регуляризации Тихонова.

Введение

В пространстве R^3 рассматривается потенциальное поле **E**, источники которого имеют плотность ρ с ограниченным носителем:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ &\operatorname{div} \mathbf{E} = -\mathbf{4}\pi\rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, плотность ρ источников неизвестна, но известно, что носитель плотности целиком располагается в бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^{\infty} = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < +\infty\}, \tag{2}$$

Задача продолжения потенциального поля **E** с поверхности

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) = z\},\ F \in C^1,\ S \cap Supp\rho = \varnothing \tag{3}$$

в область, не содержащую источников:

$$\begin{aligned} &D(F, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\}, \\ &D(F, H) \cap Supp\rho = \varnothing, \end{aligned} \tag{4}$$

имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, && M \in D(F, H), \\ &\operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{0}, && \\ &\mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, && \\ &[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{x=0} = -f_0^0\mathbf{j} + f_0^1\mathbf{k}, && [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{x=l_x} = f_l^0\mathbf{j} - f_l^1\mathbf{k}, \\ &[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{y=0} = g_0^0\mathbf{i} - g_0^1\mathbf{k}, && [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{y=l_y} = -g_l^0\mathbf{i} + g_l^1\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Векторная задача (5) сводится к трем скалярным для компонент поля **E**. В частности, для компоненты $E_z(M)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} &\Delta E_z(M) = 0, && M \in D(F, H), \\ &E_z|_S = E_z^0 && \\ &E_z|_{x=0} = f_0^0, && E_z|_{x=l_x} = f_l^0, \\ &E_z|_{y=0} = g_0^0, && E_z|_{y=l_l} = g_l^0, \\ &\left.\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|_S = \frac{1}{|\mathbf{n}_1|}\left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y}\right), && \mathbf{n}_1 = (F_x, F_y, -1). \end{aligned} \tag{6}$$

Точное решение

С помощью формул Грина решение (6) представляется в виде разности двух функций:

$$E_z = v_z(M) - \Phi_z(M), M \in D(F, H). \quad (7)$$

Функцию Φ_z из (7) можно считать известной, а v_z вычисляется с помощью (8) и (9):

$$v_z(M) = \tilde{v}_z(M) - \xi(M) \quad (8)$$

где $\xi(M)$ вычисляется при помощи граничных функций $f_0^0, f_0^0, g_l^0, f_{0l}^0$, то есть значений компоненты $E_z(M)$ поля на боковой границе рассматриваемой области (4).

$$\tilde{v}^z(M) = \int_{\Pi(H)} G_H(M, P)\tilde{v}_{z,H}(P)dx_p dy_p, \quad M \in D(-\infty.H), \quad (9)$$

$$\Pi(H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = H\}.$$

Таким образом, нахождение точного решения (6) сводится к нахождению неизвестной функции $\tilde{}_{z,H}(P)$, которая, в свою очередь, является решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_{\Pi(H)} G_H(M, P)\tilde{v}^{z,H}(P)\, dx_p dy_p = \hat{\Phi}_z(M), \quad M \in \Pi(a), \quad a < \min_{(x,y)\in\Pi(0)} F(x, y), \quad (10)$$

$$\hat{\Phi}_z(M) = \Phi_z(M) + \xi(M).$$

Данная задача является некорректно поставленной.

Устойчивое приближенное решение

Рассмотрим теперь вместо вектор-функции $\mathbf{E}^0$ из (5) ее приближенное значение

$$\mathbf{E}^{0,\delta} = (E_x^{0,\delta}, E_y^{0,\delta}, E_z^{0,\delta}): \quad \left\| \mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0 \right\|_{L_2(\Pi(0))} = \delta. \quad (11)$$

Для нахождения устойчивого приближенного решения уравнения (10) необходимо минимизировать функционал Тихонова

$$M^\alpha[w] = \left\| \int_{\Pi(H)} G_H w d\sigma - \hat{\Phi}_z^\delta \right\|^2_{L_2(\Pi(a))} + \alpha \left\| w \right\|^2_{L_2(\Pi(H))} \quad (12)$$

В результате, по теореме сходимости, доказательство которой проводится аналогично теоремам из [1,2], полученное приближенное решение $E_z^{\delta,\alpha}(M)$ равномерно сходится к точному.

Выводы

В работе была рассмотрена задача продолжения потенциального поля с поверхности в область, не содержащую источников, при ненулевых значениях поля на боковой границе области. При помощи метода регуляризации Тихонова было построено устойчивое приближенное решение, сходимость которого к точному следует из теоремы сходимости.

Литература

1. *Ланеев Е.Б.* Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения: Учеб.пособие.,- М.: Изд-во РУДН, 2006.

2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.,* Методы решения некорректных задач.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е.

STABLE POTENTIAL FIELD CONTINUATION IN APERIODIC MODEL

Sibelev N.S., Vdovin Y.O.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia, sibelev.nikita@yandex.ru

The purpose of this work is to construct a stable approximate solution of potential field continuation problem from the surface to the domain containing no sources.

Key words: potential field, Green's theorem, Fredholm integral equation of the first kind, ill-posed problem, Tikhonov regularization method