Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 163–172
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 514.85; 517.9; 531.01
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172
EDN: YCNSKX

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ АСПЕКТАМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Основная цель работы — построить аналоги символов Кристоффеля для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем. Указанные аналоги представляют особый интерес в плане выявления взаимосвязи между динамикой систем с бесконечным числом степеней свободы и геометрией Римана, а также геометрией, определяемой псевдоримановой метрикой.

Ключевые слова: символы Кристоффеля, ковариантная производная, геодезическая.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы, проект № 002092-0-000.

Для цитирования: *В. М. Савчин.* К геометрическим аспектам бесконечномерных динамических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 163–172. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172

1. Введение

Предмет настоящей статьи находится между аналитической механикой и римановой геометрией. Тензорные методы давно начали применять в динамике конечномерных систем [5]. Первоначально они были направлены на использование в динамике идей римановой геометрии. В свою очередь, задачи механики способствовали развитию геометрии. За более чем сто лет были получены значительные результаты (см., например, [2, 5, 8] и имеющиеся там ссылки). В частности, было показано, что кривизна многообразия — инвариант, различающий римановы метрики $a_{ij}\left(u^1, \ldots, u^n\right)$, $i, j = \overline{1, n}$, существенно влияет на вид геодезических на нем, т. е. на движение в соответствующей динамической системе [1].

Геодезическими называются линии $u^i = u^i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, n}$, являющиеся решениями уравнений

$$\frac{d^2u^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{du^k}{dt}\frac{du^i}{dt} = 0,\ j = \overline{1, n},$$

где Γ^j_{ki} — символы Кристоффеля второго рода.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей, расположенным на разных уровнях, подразумевается суммирование.

Если метрика $a_{ij}\left(u^1,\ldots,u^n\right)$ невырождена (т. е. $\det\left(a_{ij}\right)\neq 0$), то

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}a^{kl}\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}\right), \tag{1.1}$$

где $\left(a^{kl}\right)$ — матрица, обратная к $\left(a_{lk}\right)$.

Символы Кристоффеля первого рода находятся через компоненты метрического тензора по формулам

$$\Gamma_{k,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial a_{ji}}{\partial u^k}\right). \tag{1.2}$$

Как отмечено в работе [3], в задачах механики в качестве римановой метрики естественно выбрать метрику, которая определяет кинетическую энергию системы.

Наша основная цель — построить аналоги символов Кристоффеля (1.1), (1.2) для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем.

2. Постановка задачи. Уравнения геодезических

Обозначим $U=C^2\left([t_0,t_1],U_1\right)$, $V=C\left([t_0,t_1],U_1\right)$, где U_1, V_1 — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $U_1\subseteq V_1$.

Пусть состояние бесконечномерной динамической системы определяется функцией $u\in U$, удовлетворяющей условиям $u|_{t=t_0}=u_0$, $u|_{t=t_1}=u_1$, где u_0, u_1 — заданные элементы из U_1. *Кривой* u в U_1 назовем отображение $u:[t_0,t_1]\to U_1$.

Будем следовать обозначениям и терминологии работ [2, 7].

Пусть задана симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle : V_1\times V_1\to\mathbb{R}$ и кинетическая энергия системы $T\left[u,u_t\right]=\dfrac{1}{2}\left\langle u_t,A_u u_t\right\rangle$, где A_u — линейный дифференцируемый по Гато оператор, в общем случае, зависящий нелинейно от u; $u_t=\dfrac{du}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{u\left(t+\Delta t\right)-u(t)}{\Delta t}\in U_1$.

Обозначим $A_u'\left(h;g\right)=\left(\dfrac{d}{d\varepsilon}A_{u+\varepsilon g}h\right)\Big|_{\varepsilon=0}$; $f\left(t,u,u_t\right)$ — плотность действующих на систему сил; $F[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}T\left[u,u_t\right]dt$, $u\in D\left(F\right)=\left\{u\in U : u|_{t=t_0}=u_0, u|_{t=t_1}=u_1\right\}$; дифференциал Гато $\delta F[u,h]=\dfrac{d}{d\varepsilon}F[u+\varepsilon h]\big|_{\varepsilon=0}$. Построение в работе сопряженных операторов основано на тождестве Лагранжа [4].

Определение 2.1. Функция $u\in D\left(F\right)$ называется *стационарной* для функционала F, если $\delta F[u,h]=0$ $\forall h\in D\left(F_u'\right)$.

Теорема 2.1. *Стационарная функция функционала $F[u]$ является решением операторного уравнения*

$$\frac{1}{2}\left(A_u+A_u^*\right)u_{tt}+\frac{1}{2}\left[A_u'\left(u_t;u_t\right)+A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)\right]=0, \tag{2.1}$$

где $\left(\ldots\right)^*$ — оператор, сопряжённый к оператору $\left(\ldots\right)$ относительно заданной билинейной формы, $u_{tt}=\dfrac{d^2u}{dt^2}$, $A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)=\left(A_u'\left(u_t;\cdot\right)\right)^* u_t$.

Доказательство. Для дальнейшего использования отметим, что при существовании производной Гато N_u' оператора N имеет место равенство [9]

$$N(u+\varepsilon h)=N(u)+\varepsilon N_u'h+r(u,\varepsilon h),\ \ u\in D(N), \tag{2.2}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r(u,\varepsilon h)}{\varepsilon}=0.$$

Используя равенство (2.2), получаем

$$F[u+\varepsilon h]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle u_t+\varepsilon h_t, A_{u+\varepsilon h}\left(u_t+\varepsilon h_t\right)\rangle\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle u_t+\varepsilon h_t, A_{u+\varepsilon h}u_t+A_{u+\varepsilon h}\varepsilon h_t\rangle\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle u_t+\varepsilon h_t, A_u u_t+A'_u\left(u_t;\varepsilon h\right)+A_u\varepsilon h_t+A'_u\left(\varepsilon h_t;\varepsilon h\right)+r(u,\varepsilon h)\Big\rangle\,dt.$$

Отсюда находим

$$\delta F[u,h]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\langle h_t, A_u u_t\rangle+\big\langle u_t, A'_u\left(u_t;h\right)+A_u h_t\big\rangle\right]dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[D_t\left\langle h, A_u u_t\right\rangle-\left\langle h, D_t\left(A_u u_t\right)\right\rangle+$$

$$+\left\langle A_u^{\prime *}\left(u_t;\cdot\right)u_t, h\right\rangle+\langle A_u^* u_t, h_t\rangle\Big]\,dt\ \forall u\in D\left(F\right), \forall h\in D\left(F'_u\right). \tag{2.3}$$

Поскольку

$$\langle A_u^* u_t, h_t\rangle=D_t\left\langle A_u^* u_t, h\right\rangle-\left\langle D_t\left(A_u^* u_t\right), h\right\rangle,$$

то из (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\delta F[u,h]&=\frac{1}{2}\left\langle\left(A_u+A_u^*\right)u_t, h\right\rangle\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}+\\&+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\left\langle A_u^{\prime *}\left(u_t;\cdot\right)u_t-A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-A'_u\left(u_t;u_t\right)-\left(A_u+A_u^*\right)u_{tt}, h\right\rangle\right]dt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Принимая во внимание, что

$$h\big|_{t=t_0}=h\big|_{t=t_1}=0,$$

из (2.4) находим

$$\delta F[u,h]=-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big\langle\left(A_u+A_u^*\right)u_{tt}+A'_u\left(u_t;u_t\right)+A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-$$

$$-A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right), h\Big\rangle\Big]\,dt\ \forall u\in D\left(F\right), \forall h\in D\left(F'_u\right).$$

Из условия $\delta F[u,h]=0$, $u\in D\left(F\right)$, $\forall h\in D\left(F'_u\right)$ получаем операторное уравнение (2.1).
Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если* $A_u^*=A_u$, *то уравнение* (2.1) *принимает вид*

$$A_u u_{tt}+\frac{1}{2}\left[A'_u\left(u_t;u_t\right)+A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)\right]=0. \tag{2.5}$$

При отсутствии сил движение системы с кинетической энергией $T\left[u,u_t\right]$ можно интерпретировать как движение в U по инерции при метрике

$$ds^2=\langle u_t, A_u u_t\rangle\,dt^2. \tag{2.6}$$

Заимствуя терминологию в механике, при таком движении траектории (кривые) называют *геодезическими линиями* относительно метрики (2.6). Таким образом, задача о движении по инерции сводится к нахождению геодезических линий. Операторное уравнение (2.5) выражает далеко идущее обобщение этого факта.

Следствие 2.2. *Если* $A_u^*=A_u$ *и существует обратный оператор* A_u^{-1}, *то уравнение* (2.1) *представимо в виде*

$$u_{tt}+\frac{1}{2}A_u^{-1}\left[A'_u\left(u_t;u_t\right)+A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)\right]=0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим конечномерную систему с координатами $\left(u^1, \dots, u^n\right)$, $u^i\left(t_0\right) = u^i_0$, $u^i\left(t_1\right) = u^i_1$, $t \in \left[t_0, t_1\right]$, $i = \overline{1,n}$ и кинетической энергией $T = \frac{1}{2}\dot{u}^i a_{ij}(u)\dot{u}^j$, где $\left(a_{ij}\right)^n_{i,j=1}$ — симметрическая матрица, $\det\left(a_{ij}\right)^n_{i,j=1} \neq 0$, $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$.

Теорема 2.2. *Если* $T = \frac{1}{2}\dot{u}^i a_{ij}(u)\dot{u}^j$, *то уравнение* (2.7) *совпадает с уравнениями геодезических*

$$\frac{d^2u^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{2.8}$$

где

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2}a^{jl}\left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l}\right)$$

— символы Кристоффеля.

Доказательство. В рассматриваемом частном случае

$$\langle u_t, A_u u_t\rangle = \dot{u}^i a_{ij}(u)\dot{u}^j, \qquad F[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\dot{u}^i a_{ij}(u)\dot{u}^j dt.$$

Имеем

$$F\left[u + \varepsilon h\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\dot{u}^i + \varepsilon\dot{h}^i\right)\left(a_{ij}(u + \varepsilon h)\right)\left(\dot{u}^j + \varepsilon\dot{h}^j\right)dt.$$

Отсюда находим

$$\delta F[u,h] = \frac{d}{d\varepsilon}F[u + \varepsilon h]\big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\dot{h}^i\dot{u}^j a_{ij}(u) + \dot{u}^i\dot{h}^j a_{ij}(u) + \dot{u}^i\dot{u}^j\frac{\partial a_{ij}(u)}{\partial u^k}h^k\right]dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta F[u,h] = \frac{1}{2}\left[h^i\dot{u}^j a_{ij} + h^j\dot{u}^i a_{ij}\right]\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\dot{u}^i\dot{u}^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}h^k - h^i\left(\ddot{u}^j a_{ij} + \dot{u}^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^k\right) - h^j\left(\ddot{u}^i a_{ij} + \dot{u}^i\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\ddot{u}^k\right)\right]dt.$$

Поскольку $h^i\left(t_0\right) = h^i\left(t_1\right) = 0$, $i = \overline{1,n}$, то поменяв индексы суммирования в слагаемых под знаком интеграла, находим

$$\delta F[u,h] = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[-h^k\ddot{u}^j\left(a_{kj} + a_{jk}\right) + h^k\dot{u}^i\dot{u}^j\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j}\right)\right]dt.$$

Учитывая симметричность матрицы $\left(a_{ij}\right)^n_{i,j=1}$, приходим к равенству

$$\delta F[u,h] = -\int\limits_{t_0}^{t_1}h^k\left[a_{kj}\ddot{u}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j\right]dt.$$

Из условия $\delta F[u,h] = 0$, $u \in D\left(F\right)$, $\forall h \in D\left(F'_u\right)$ заключаем, что u является решением системы уравнений

$$a_{kj}\ddot{u}^j + \Gamma_{k,ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0, \tag{2.9}$$

где $\Gamma_{k,ij}$ — символы Кристоффеля первого рода (1.2).

Поскольку $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0$, то систему уравнений (2.9) можно разрешить относительно $\ddot{u}^j$ ($j = \overline{1,n}$). В результате приходим к системе уравнений (2.8).

Таким образом, получены уравнения геодезических (2.8).

Теорема доказана. □

Сопоставляя уравнения (2.7), (2.8), из изложенного выше заключаем, что справедливо

Следствие 2.3. *Уравнение* (2.7) *— операторный аналог уравнений геодезических* (2.8), *при этом оператор*

$$K_{1u}[\cdot] = \frac{1}{2}\left[A'_u(\cdot;\cdot) + A^{*\prime}_u(\cdot;\cdot) - A'^{*}_u(\cdot;\cdot)\right] \tag{2.10}$$

определяет аналог символов Кристоффеля первого рода $\Gamma_{k,ij}$, *а*

$$K_{2u}[\cdot] = A_u^{-1}K_{1u}[\cdot]$$

— аналог символов Кристоффеля второго рода Γ_{ij}^k.

Оператор $\dfrac{D}{dt}$, определённый формулой

$$\frac{Du_t}{dt} = u_{tt} + A_u^{-1}K_{1u}[u_t],$$

является аналогом ковариантной производной u_t по t.

Указанные выше аналоги представляют особый интерес в плане взаимосвязи с геометрией Римана, а также геометрией, определяемой псевдоримановой метрикой.

3. Движение системы с потенциальными силами

Рассмотрим теперь случай, когда на систему с кинетической энергией $T[u,u_t] = \dfrac{1}{2}\langle u_t, A_u u_t\rangle$ действуют силы с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$.

Здесь $\forall t \in [t_0,t_1]$ и $\forall u \in U_1$ оператор $P_u : U_1 \to V_1$ является линейным и в общем случае нелинейно зависящим от t, u; $Q : [t_0,t_1] \times U_1 \to V_1$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный.

Будем предполагать, что при каждых $t \in [t_0,t_1]$ и $g(t)$, $u(t) \in U_1$ функция $P_u g(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируема.

Тогда уравнения движения заданной динамической системы могут быть представлены в операторном виде

$$N(u) \equiv \frac{1}{2}(A_u + A_u^*)u_{tt} + K_{1u}[u_t] - \mathcal{F}(u) = 0,\ u \in D(N) \equiv D(F).$$

Определение 3.1. Силы с плотностью $\mathcal{F}(u)$ называются *потенциальными* на $D(N)$ относительно билинейной формы

$$\Phi(v,u) = \int_{t_0}^{t_1} \langle v,u\rangle\,dt,$$

если существует функционал $\Pi[u]$ такой, что его дифференциал Гато

$$\delta\Pi[u,h] = -\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathcal{F}(u), h\rangle\,dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \langle \operatorname{grad}\Pi[u], h\rangle\,dt\ \forall u \in D(N), \forall h \in D\left(N'_u\right).$$

Если $D(N)$ — выпуклое множество, то для этого необходимо и достаточно выполнения критерия потенциальности [7]

$$\Phi\left(\mathcal{F}'_u h, g\right) = \Phi\left(\mathcal{F}'_u g, h\right)\ \ \forall u \in D(N), \forall h,g \in D\left(N'_u\right). \tag{3.1}$$

При этом искомый потенциал $\Pi[u]$ может быть найден по формуле

$$\Pi[u] = -\int\limits_0^1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \mathcal{F}(\hat{u} + \lambda(u - \hat{u})), u - \hat{u}\rangle \, dt d\lambda + \text{const},$$

где $\hat{u}$ — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

Теорема 3.1. *Если $D_t^* = -D_t$ и силы с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$ потенциальны, то существуют операторы $R(t,u)$ и $B[u]$ такие, что*

$$\Pi[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\langle R(t,u), u_t\rangle - B[u]\} \, dt, \ \ u \in D(N).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u+\varepsilon h) &= P_{u+\varepsilon h}(u_t + \varepsilon h_t) + Q(t, u+\varepsilon h) = P_{u+\varepsilon h} u_t + P_{u+\varepsilon h}\varepsilon h_t + Q(t, u+\varepsilon h) = \\ &= P_u u_t + \varepsilon P'_u(u_t; h) + \varepsilon P_u h_t + \varepsilon^2 P'_u(h_t; h) + Q(t,u) + \varepsilon Q'_u h + r(u, \varepsilon h).\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{F}'_u h = P_u h_t + P'_u(u_t; h) + Q'_u h.$$

Теперь условие (3.1) может быть представлено в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_u h_t + P'_u(u_t;h) + Q'_u h, g\right\rangle dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_u g_t + P'_u(u_t; g) + Q'_u g, h\right\rangle dt$$
$$\forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u).$$

Преобразуя, получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{\Big\langle \big[P_u D_t + P'_u(u_t;\cdot) + Q'_u\big] h, g\Big\rangle - \\ &- \left\langle \left[P'^*_u(u_t;\cdot) - \frac{\partial P^*_u}{\partial t} - P^{*'}_u(\cdot; u_t) - P^*_u D_t + Q'^*_u\right] h, g\right\rangle\Big\} dt = \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle (P_u + P^*_u) D_t h + \Big[P'_u(u_t;\cdot) - P'^*_u(u_t;\cdot) + P^{*'}_u(\cdot;u_t)\Big] h + \\ &+ \left(\frac{\partial P^*_u}{\partial t} + Q'_u - Q'^*_u\right) h, g\Big\rangle \, dt \ \forall u \in D(N), \forall g, h \in D\left(N'_u\right).\end{aligned}$$

В силу невырожденности рассматриваемый билинейной формы и произвольности $g, h \in D(N'_u)$ отсюда получаем условия потенциальности сил с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$ в виде

$$\begin{aligned}&P^*_u = -P_u, \\ &\frac{\partial P^*_u}{\partial t} + Q'_u - Q'^*_u = 0, \\ &P'_u(u_t;\cdot) + P^{*'}_u(\cdot; u_t) - \big(P'_u(u_t;\cdot)\big)^* = 0 \ \forall u \in D(N).\end{aligned}$$

При их выполнении искомый потенциал $\Pi[u]$ находится по формуле

$$\Pi[u] = -\int\limits_0^1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_{\tilde{u}} \tilde{u}_t + Q(t, \tilde{u}), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda}\right\rangle\Big|_{\tilde{u} = \hat{u} + \lambda(u - \hat{u})} dt d\lambda + \text{const}.$$

Определим искомые операторы R и B соответственно формулами

$$\Phi\left(R(t,u),u_t\right)=\int\limits_0^1\Phi\left(P_{\tilde u}\frac{\partial\tilde u}{\partial\lambda},\tilde u_t\right)|_{\tilde u=\hat u+\lambda(u-\hat u)}d\lambda+\mathrm{const},$$

$$B[u]=\int\limits_0^1\left\langle Q(t,\tilde u)+\lambda\frac{\partial P_{\tilde u}}{\partial t}\left(u-\hat u\right),\frac{\partial\tilde u}{\partial\lambda}\right\rangle|_{\tilde u=\hat u+\lambda(u-\hat u)}d\lambda+\mathrm{const}.$$

Найденные так операторы R и B позволяют записать функционал

$$\Pi[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\langle R(t,u),u_t\rangle-B[u]\right\}dt,\ \ u\in D(N).$$

Отметим, что

$$\delta\Pi[u,h]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\langle\left[R_u'^{*}-R_u'\right]u_t-\left(\operatorname{grad}B[u]+\frac{\partial R}{\partial t}\right),h\right\rangle dt$$

$$\forall u\in D(N),\forall h\in\left(N_u'\right).$$

Таким образом, для потенциальности сил с линейной по скорости u_t плотностью $\mathcal{F}(u)=P_uu_t+Q(t,u)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$-\mathcal{F}(u)=\left(R_u'^{*}-R_u'\right)u_t-\left(\operatorname{grad}B[u]+\frac{\partial R}{\partial t}\right)\ \ \forall u\in D(N).$$

Теорема доказана. □

4. Пример

Обозначим $U=C^2\left([t_0,t_1],U_1\right),\ V=C\left([t_0,t_1],V_1\right);\ \Omega$ — ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $U_1=C^2\left(\overline{\Omega}\right),\ V_1=C\left(\overline{\Omega}\right),\ \Delta=\dfrac{\partial^2}{\left(\partial x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2}{\left(\partial x^2\right)^2}+\frac{\partial^2}{\left(\partial x^3\right)^2}$ — оператор Лапласа, $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)$. Положим $A_u=-\Delta+\alpha u+\beta u^2$, где α, β — постоянные. Будем считать, что область определения $D\left(A_u\right)$ оператора A_u состоит из тех функций $u\in U$, которые удовлетворяют условиям

$$u|_{t=t_0}=u_0,u|_{t=t_1}=u_1,$$
$$u|_\Gamma=\psi(t,x),$$

где $\Gamma=[t_0,t_1]\times\partial\Omega$, $u_i\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)\ \ (i=0,1)\,,\ \psi\in C(\Gamma)$.

Зададим билинейную форму

$$\langle v,g\rangle=\int\limits_\Omega v(t,x)g(t,x)dx.$$

Определим квадратичную форму по u_t

$$T=\frac{1}{2}\left\langle u_t,A_uu_t\right\rangle,$$

которую будем трактовать как кинетическую энергию некоторой системы.

Найдем вид уравнения (2.1) для этого случая.

С этой целью получаем

$$A_uv=-\Delta v+\alpha uv+\beta u^2v,$$

$$A_{u+\varepsilon h}v=-\Delta v+\alpha v\left(u+\varepsilon h\right)+\beta v\left(u+\varepsilon h\right)^2,$$

$$A_u'(v;h)=\frac{d}{d\varepsilon}A_{u+\varepsilon h}v\Big|_{\varepsilon=0}=\alpha vh+2\beta vuh=\left(\alpha v+2\beta vu\right)h.$$

Найдем A_u^*.

Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} h\cdot A_u g dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} h\left(-\Delta g+\alpha u g+\beta u^2 g\right) dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} g\left(-\Delta h+\alpha u h+\beta u^2 h\right) dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} g\cdot A_u h dxdt \ \forall u\in D(A_u), \forall g,h\in D(A'_u).$$

Таким образом,

$$A_u^* = A_u \ \forall u\in D\left(A_u\right).$$

Далее получаем

$$A_u^{\prime *}(v;\cdot)h = (\alpha v + 2\beta u v)h.$$

Согласно формуле (2.10) находим

$$K_{1u}\left[u_t\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t + \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t - \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t = \frac{1}{2}\left[\alpha + 2\beta u\right]u_t^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$\left(-\Delta+\alpha u+\beta u^2\right)u_{tt} + \frac{1}{2}\left(\alpha+2\beta u\right)u_t^2 = 0.$$

Если предположить, что на систему действуют силы с плотностью $\dfrac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2}$, то получаем уравнение

$$\left(-\Delta+\alpha u+\beta u^2\right)u_{tt} + \frac{1}{2}\left(\alpha+2\beta u\right)u_t^2 - \frac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2} = 0.$$

При $\alpha=\beta=0$ отсюда приходим к уравнению Соболева [6]

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2} = 0, \tag{4.1}$$

связанному с исследованиями колебаний жидкости во вращающемся сосуде.

Нетрудно проверить, что для уравнения (4.1) при соответствующих граничных условиях существует первый интеграл

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)^2\right]dx = \mathrm{const}.$$

5. Заключение

Уравнения движения вида (2.1), (2.7) допускают содержательную интерпретацию в терминах римановой геометрии. При этом определяющими являются полученные операторные аналоги символов Кристоффеля первого и второго рода, а также обобщенная ковариантная производная. На их основе составляются уравнения геодезических для бесконечномерных систем. Изложенный операторный подход позволяет рассматривать задачи как с римановыми, так и псевдоримановыми метриками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
3. *Козлов В. В.* Об интегрируемости уравнений динамики в непотенциальном силовом поле// Усп. мат. наук. — 2022. — *77*, № 6. — С. 137–158.
4. *Марчук Г. И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992.
5. *Синдж Дж. Л.* Тензорные методы в динамике. — М.: Иностр. лит., 1947.

6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — *18*, № 1. — С. 3–50.
7. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1992. — *40*. — С. 3–176.
8. *Lovelock D., Rund H.* Tensors, differential forms, and variational principles. — New York: Willey, 1975.
9. *Nashed M. Z.* Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis// В сб.: «Nonlinear Functional Analysis and Applications». — New York–Lodon: Academic Press, 1975. — С. 103–310.

В. М. Савчин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: savchin-vm@rudn.ru

UDC 514.85; 517.9; 531.01
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172
EDN: YCNSKX

To geometric aspects of infinite-dimensional dynamical systems

V. M. Savchin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The main goal of the work is to construct analogues of Christoffel symbols for infinite-dimensional systems and on this basis to obtain geodesic equations for such systems. These analogies are of particular interest in terms of identifying the relationship between the dynamics of systems with an infinite number of degrees of freedom and Riemannian geometry, as well as geometry defined by the pseudo-Riemannian metric.

Keywords: Christoffel symbols, covariant derivative, geodesic.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The paper was supported by the People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, project № 002092-0-000.

For citation: V. M. Savchin, "To geometric aspects of infinite-dimensional dynamical systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 163–172. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical Methods of Classical Mechanics], Editorial URSS, Moscow, 2000 (in Russian).
2. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Modern Geometry. Methods and Applications], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. V. V. Kozlov, "Ob integriruemosti uravneniy dinamiki v nepotentsial'nom silovom pole" [On the integrability of dynamics equations in a potential force field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2022, **77**, No. 6, 137–158 (in Russian).
4. G. I. Marchuk, *Sopryazhennye uravneniya i analiz slozhnykh sistem* [Coupled Equations and Analysis of Complex Systems], Nauka, Moscow, 1992 (in Russian).

5. J. L. Synge, *Tenzornye metody v dinamike* [Tensor Methods in Dynamics], Inostr. lit., Moscow, 1947 (in Russian).
6. S. L. Sobolev, "Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki" [On one new problem of mathematical physics], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1954, **18**, No. 1, 3–50 (in Russian).
7. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov" [Variational principles for nonpotential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
8. D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, differential forms, and variational principles*, Willey, New York, 1975.
9. M. Z. Nashed, "Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis," In: *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Academic Press, New York–Lodon, 1975, pp. 103–310.

V. M. Savchin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: savchin-vm@rudn.ru