Численные методы расчета конструкций

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК НА РАВНОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

В.К. МУСАЕВ*, доктор технических наук, профессор*
Российский университет дружбы народов
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Россия
musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация об устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке. Применяется девятиточечный шаблон.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, явная схема, узловые точки, прямоугольная сетка.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке [1].

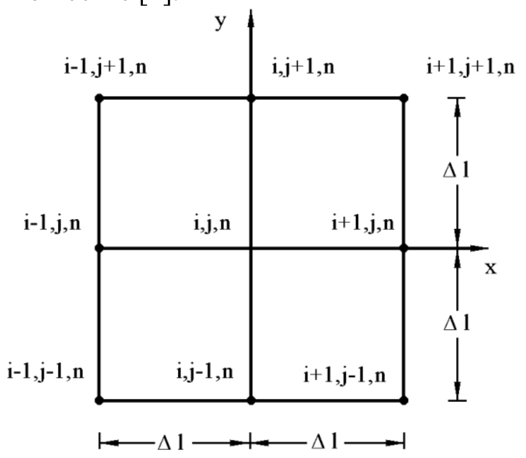

Рис. 1. Прямоугольная равномерная конечноэлементная сетка по пространственным координатам

Некоторая информация о достоверности и разработки алгоритма численного моделирования волн напряжений в деформируемых телах приведена в работах [2–5].

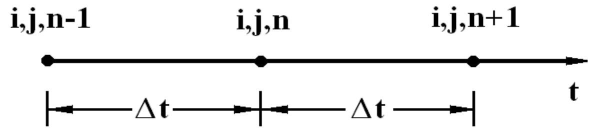

Рис. 2. Прямоугольная равномерная конечноэлементная сетка по временной координате

Используя основные соотношения для прямоугольного конечного элемента, покажем матрицу жесткости $\overline{\mathrm{K}}$ и вектор инерции для $\vec{H}$ двумерного конечного элемента

$$\overline{K}=\rho h\begin{Vmatrix} k_{1i,j}, & k_{2i,j} \\ k_{3i,j}, & k_{4i,j} \end{Vmatrix}; \tag{1}$$

$$\vec{H}=\rho abh\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{Vmatrix}^T; \tag{2}$$

где $k_{1i,j}=\rho(\frac{b}{a}C_p^2P_{1i,j}+\frac{a}{b}C_s^2P_{2i,j})$; $k_{2i,j}=\rho((C_p^2-2C_s^2)P_{3i,j}+C_s^2P_{4i,j})$;

$k_{3i,j}=\rho((C_p^2-2C_s^2)P_{4i,j}+C_s^2P_{3i,j})$; $k_{4i,j}=\rho(\frac{a}{b}C_p^2P_{2i,j}+\frac{b}{a}C_s^2P_{1i,j})$;

$$\overline{P}_1=\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 2, & -2, & -1, & 1 \\ -2, & 2, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -2, & 2 \end{Vmatrix};\quad \overline{P}_2=\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 2, & 1, & -1, & -2 \\ 1, & 2, & -2, & -1 \\ -1, & -2, & 2, & 1 \\ -2, & -1, & 1, & 2 \end{Vmatrix};$$

$$\overline{P}_3=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & -1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{Vmatrix};\quad \overline{P}_4=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{Vmatrix};$$

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; a – половина длины прямоугольного конечного элемента; b – половина высоты прямоугольного конечного элемента; h – толщина прямоугольного конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для некоторого деформируемого тела [1, 2], записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R},\ \ \dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0,\quad \vec{\Phi}\Big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0\ , \tag{3}$$

где $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (3) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \overline{H}^{-1}(-\overline{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \quad \vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \dot{\vec{\Phi}}_{i+1}, \tag{4}$$

где Δt – шаг по временной координате.

Исследуем на устойчивость явные конечноэлементные линейные схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных сетках с помощью метода Неймана [6, 7].

Будем искать решение явных двухслойных конечноэлементных линейных схем в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных сетках в виде:

$$u_{i,j,n} = GP^n e^{i_1 \alpha i} e^{i_1 \beta j}, \tag{5}$$

$$v_{i,j,n} = FP^n e^{i_1 \alpha i} e^{i_1 \beta j}, \tag{6}$$

где $i_1 = \sqrt{-1};$ G и F – константы; P – функция целых чисел α и β.

Рассмотрим устойчивость одномерной явной двухслойной конечноэлементоной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке (рис. 1–2) [8].

Рассмотрим уравнение динамического равновесия (4) для узловой точки (i, j, n) через элементы матрицы жесткости (1) и вектора инерции (2) конечного элемента с четырьмя узловыми точками

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{i,j,n+1} = \dot{u}_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{(H_1 + H_3 + H_5 + H_7)}&((k_{1,1} + k_{3,3} + k_{5,5} + k_{7,7})u_{i,j,n} + \\
&+ (k_{1,2} + k_{3,4} + k_{5,6} + k_{7,8})v_{i,j,n} + (k_{5,7} + k_{3,1})u_{i+1,j,n} + \\
&+ (k_{5,8} + k_{3,2})v_{i+1,j,n} + k_{3,7}u_{i+1,j-1,n} + k_{3,8}v_{i+1,j-1,n} + \\
&+ (k_{3,5} + k_{1,7})u_{i,j-1,n} + (k_{3,6} + k_{1,8})v_{i,j-1,n} + k_{1,5}u_{i-1,j-1,n} + \\
&+ k_{1,6}v_{i-1,j-1,n} + (k_{1,3} + k_{7,5})u_{i-1,j,n} + (k_{1,4} + k_{7,6})v_{i-1,j,n} + \\
&+ k_{7,3}u_{i-1,j+1,n} + k_{7,4}v_{i-1,j+1,n} + (k_{7,1} + k_{5,3})u_{i,j+1,n} + \\
&+ (k_{7,2} + k_{5,4})v_{i,j+1,n} + k_{5,1}u_{i+1,j+1,n} + k_{5,2}v_{i+1,j+1,n}),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n} + \Delta t \dot{u}_{i,j,n+1}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{i,j,n+1} = \dot{v}_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{(H_2 + H_4 + H_6 + H_8)}&((k_{2,1} + k_{4,3} + k_{6,5} + k_{8,7})u_{i,j,n} + \\
&+ (k_{2,2} + k_{4,4} + k_{6,6} + k_{8,8})v_{i,j,n} + (k_{6,7} + k_{4,1})u_{i+1,j,n} + \\
&+ (k_{6,8} + k_{4,2})v_{i+1,j,n} + k_{4,7}u_{i+1,j-1,n} + k_{4,8}v_{i+1,j-1,n} + \\
&+ (k_{4,5} + k_{2,7})u_{i,j-1,n} + (k_{4,6} + k_{2,8})v_{i,j-1,n} + k_{2,5}u_{i-1,j-1,n} + \\
&+ k_{2,6}v_{i-1,j-1,n} + (k_{2,3} + k_{8,5})u_{i-1,j,n} + (k_{2,4} + k_{8,6})v_{i-1,j,n} + \\
&+ k_{8,3}u_{i-1,j+1,n} + k_{8,4}v_{i-1,j+1,n} + (k_{8,1} + k_{6,3})u_{i,j+1,n} + \\
&+ (k_{8,2} + k_{6,4})v_{i,j+1,n} + k_{6,1}u_{i+1,j+1,n} + k_{6,2}v_{i+1,j+1,n}),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$v_{i,j,n+1} = v_{i,j,n} + \Delta t \dot{v}_{i,j,n+1}. \tag{10}$$

Подставляя (1–2) и (5–6) в (7–10), получаем систему при $\cos\alpha = \sin\beta = 1$, которая имеет следующий вид:

$$G(\frac{\Delta l^2}{\Delta t^2}(-P + 2 - P^{-1}) - C_1) - FC_2 = 0, \tag{11}$$

$$FC_2 + G(\frac{\Delta l^2}{\Delta t^2}(-P + 2 - P^{-1}) - C_1) = 0, \tag{12}$$

где

$$C_1 = \frac{4}{3}(C_p^2 + C_s^2);\;\; C_2 = (\nu C_p^2 + C_s^2).$$

Из (11) и (12) получим матрицу

$$\overline{\eta} = \begin{Vmatrix} \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2}(-P + 2 - P^{-1}) - C_1, & -C_2 \\ -C_2, & \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2}(-P + 2 - P^{-1}) - C_1 \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Раскрывая определитель матрицы $|\overline{\eta}| = 0$ в (13), получим характеристическое уравнение

$$(S - C_1)(S - C_1) = C_2^2,$$

$$S = \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2}(-P + 2 - P^{-1}). \tag{14}$$

Из уравнений (14) получим

$$P^2 - 2(1 - \frac{15 - \nu}{12}\frac{C_p^2 \Delta t^2}{\Delta l^2})P + 1 = 0.$$

Устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке (4) будет иметь место, если шаг по временной координате подчинить условию

$$\Delta t \quad h\frac{\Delta l}{C_p},$$

где

$$h = \sqrt{\frac{12}{15 - \nu}} \;\; (0{,}83 < h < 0{,}89).$$

Литература

1. *Мусаев В.К.* О сходимости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 3. – С. 60–68.

2. *Мусаев В.К.* Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

3. *Сазонов К.Б., Сущев Т.С., Шепелина П.В., Куранцов О.В., Акатьев С.В.* Моделирование нестационарного волнового напряженного состояния в деформируемых объ-

ектах с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2012. – С. 332–334.

4. *Nemchinov V.V.* Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Volume 9, Issue 1. – P. 85–89.

5. *Nemchinov V.V.* Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Volume 9, Issue 1. – P. 90–97.

6. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 420 с.

7. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

8. *Мусаев В.К.* Об устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной хемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной треугольной сетке// Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 2. – С. 59–65.

R e f e r e n c e s

1. *Musaev, V.K.* (2008). O sxodimosti dvumernoj yavnoj dvuxslojnoj konechnoe'lementnoj linejnoj sxemy v peremeshheniyax dlya vnutrennix uzlovyx tochek na ravnomernoj pryamougol'noj setke. *Vestnik Rossijskogo Universiteta Druzhby Narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti,* № 3, pp. 60–68.

2. *Musaev, V.K.* (2009). Ozenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo e'ksperimenta pri reshenii zadach nestacionarnoj volnovoj teorii uprugosti. *Nauchnyj Zhurnal Problem Kompleksnoj Bezopasnosti,* № 1, pp. 55–80.

3. *Sazonov, K.B., Sushhev, T.S., Shepelina, P.V., Kurancov, O.V., Akat'ev, S.V.* (2012). Modelirovanie nestacionarnogo volnovogo napryazhennogo sostoyaniya v deformiruemyx ob"ektax s pomoshh'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax. *Informacionno-telekommunikacionnye texnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotexnologichnyx sistem*. Tez. dokl. Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem, Moscow: RUDN, pp. 332–334.

4. *Nemchinov, V.V.* (2013). Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2013, Vol. 9, Iss. 1, pp. 85–89.

5. *Nemchinov, V.V.* (2013). Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering,* Vol. 9, Iss. 1, pp. 90–97.

6. *Rixtmajer, R., Morton, K.* (1972). *Raznostnye Metody Resheniya Kraevyx Zadach.* Moscow: "Mir", 420 s.

7. *Bate, K., Vilson, E.* (1982). Chislennye Metody Analiza i Metod Konechnyx E'lementov. Moscow: Strojizdat, 448 p.

8. *Musaev, V.K.* (2008). Ob ustoychivosti dvumernoy yavnoy dvuhsloynoy konechnoelementnoy lineynoy shemy v peremescheniyah dlya vnutrennih uzlovyh tochek na ravnomernoy treugol'noy setke. *Vestnik Rossijskogo Universiteta Druzhby Narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti,* № 2, pp. 59–65.

THEORETICAL INVESTIGATION OF THE STABILITY OF EXPLICIT TWO-LAYER LIEAR SCHEME FOR INTERNAL ANCHOR POINTS ON THE UNIFORM RECTANGULAR GRID

Musayev V.K.
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

Provides information about the stability of two-dimensional explicit two-layer linear finite element scheme of movement for internal anchor points on the uniform rectangular grid. Applies ninepoint pattern.

KEY WORDS: sustainability, explicit scheme, anchor points, rectangular grid.