Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 588–598
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598
EDN: YFDPHA

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА НА ОКРУЖНОСТИ

А. Джурджевак[1], **А. Р. Ширикян**[2,3]

[1] *Freie Universität Berlin, Berlin, Germany*
[2] *CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France*
[3] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Аннотация. В статье рассматривается проблема устойчивости потока одномерного уравнения Бюргерса на окружности. Используя некоторые идеи из теории сохраняющих положительность полугрупп, мы устанавливаем строгое сжатие в норме L^1. Как следствие, доказано, что уравнение с ограниченной внешней силой имеет единственное ограниченное решение на $\mathbb{R}$, которое экспоненциально устойчиво в норме H^1 при $t \to +\infty$. В случае случайной внешней силы показано, что разность между двумя траекториями стремится к нулю с вероятностью 1.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, экспоненциальная устойчивость, ограниченная траектория.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследования первого автора были частично поддержаны Немецким фондом научных исследований (DFG) в рамках гранта CRC 1114 *Scaling Cascades in Complex Systems*, проекта № 235221301, проект C10 — Numerical analysis for nonlinear SPDE models of particle systems. Исследования второго автора были поддержаны *CY Initiative* через грант *Investissements d'Avenir* ANR-16-IDEX-0008 и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Для цитирования: *А. Джурджевак, А. Р. Ширикян.* Экспоненциальная устойчивость потока обобщенного уравнения Бюргерса на окружности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 588–598. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598`

1. Введение

Рассмотрим обобщенное уравнение Бюргерса с вязкостью

$$\partial_t u - \nu \partial_x^2 u + \partial_x f(u) = h(t,x), \quad x \in \mathbb{S}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность единичной длины, так что все функции предполагаются периодическими по x с периодом 1, $\nu > 0$ — фиксированный параметр, h — внешняя сила, а $f \in C^2(\mathbb{R})$ — заданная функция (называемая *потоком*), вторая производная которой удовлетворяет неравенству[1]

$$f''(u) \geqslant \sigma \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

[1]Неравенство (1.2) для потока не требуется, если внешняя сила является ограниченной функцией времени. В частности, теоремы 3.1 и 4.1 справедливы для любого потока f класса C^2.

где $\sigma > 0$ — некоторое число. Функция h предполагается локально ограниченной в области $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$, что обеспечивает корректность задачи Коши для уравнения (1.1). А именно, для любого начального условия u_0 из класса Соболева $H^1(\mathbb{S})$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $u(t,x)$ в подходящем функциональном пространстве, такое, что

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{1.3}$$

(точную формулировку результата см. в разделе 2.1). Для простоты изложения мы будем предполагать во введении, что все функции, определенные на окружности $\mathbb{S}$, имеют *нулевое среднее значение*.

Простым следствием принципа максимума является невозрастание L^1-нормы разности двух решений уравнения (1.1). Сопоставляя это со сглаживающим свойством разрешающего оператора, легко показать, что поток, порожденный задачей (1.1), (1.3), является H^1-устойчивым в следующем смысле: если последовательность начальных условий (u_0^n) сходится к u_0 в H^1, то соответствующие решения (u^n) и u таковы, что

$$\sup_{t \geqslant 0} \|u^n(t) - u(t)\|_{H^1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Цель настоящей статьи — доказать, что поток на самом деле асимптотически экспоненциально устойчив при $t \to \infty$. В частности, мы покажем, что имеют место следующие два свойства (подробности даны в разделе 4):

Глобальный аттрактор: *Если h — ограниченная функция от $t \in \mathbb{R}$ со значениями в H^1, то существует единственное H^1-ограниченное решение уравнения* (1.1)*, определенное на вещественной прямой, и любое другое решение экспоненциально сходится к нему в H^1 при $t \to +\infty$.*

Стохастическое уравнение: *Если h — случайный процесс с непрерывными траекториями со значениями в H^2* (*не обязательно ограниченный по времени, но удовлетворяющий некоторому условию роста*)*, то L^1-норма разности двух решений уравнения* (1.1) *сходится к нулю с вероятностью* 1 *при $t \to +\infty$.*

Доказательство обоих результатов основано на сжимающем свойстве потока, установленном в разделе 3. Последнее использует одну идею из теории положительных операторов, примененную в работе [20] для случая граничного условия Дирихле.

Отметим, что различные результаты об устойчивости потока уравнения Бюргерса были получены ранее как в детерминистской, так и в стохастической постановках, при периодических граничных условиях и условии Дирихле, а также для всего пространства. Один из первых математически строгих результатов был получен Синаем [21]. Он исследовал случаи, когда h — периодическая по времени детерминистская функция или гладкий по пространственным переменным белый шум, и доказал сходимость с вероятностью 1 траекторий со случайными начальными данными к предельному периодическому решению или мере, причем оба эти объекта не зависят от начального условия. Кифер [19] получил аналогичный результат для уравнения Бюргерса в $\mathbb{R}^d$ при условии, что и решение, и внешняя сила являются потенциальными полями. Хилл и Сули [15] исследовали вязкие скалярные законы сохранения в ограниченной области $\mathbb{R}^d$ с не зависящей от времени внешней силой и доказали существование, единственность и экспоненциальную устойчивость стационарного решения. Жослин, Крейс и Мозер [17] исследовали уравнение Бюргерса на $\mathbb{S}$ с периодической по времени внешней силой и доказали существование и асимптотическую устойчивость периодического по времени решения. Боричев [9] исследовал обобщенное уравнение Бюргерса на $\mathbb{S}$ и в предположении, что h — гладкий по пространству белый шум, доказал, что существует единственная стационарная мера и что любое другое решение сходится к ней со скоростью, не зависящей от вязкости $\nu > 0$. Чанг и Квон [10] рассмотрели уравнение Бюргерса на $\mathbb{R}$ с квадратичным потоком и неотрицательной внешней силой h, не зависящей от времени, и доказали существование и единственность неотрицательного стационарного решения и полиномиальную сходимость к нему. Калита и Згличинский [18] исследовали это же уравнение с периодическим граничным условием и условием Дирихле и доказали сходимость к предельной траектории. Они также установили экспоненциальную скорость сходимости в случае граничного условия Дирихле. Бахтин и Ли [8], а также Данлап, Грэхем и Рыжик [11] построили пространственно-временные стационарные решения стохастического уравнения Бюргерса на $\mathbb{R}$ и доказали их устойчивость при $t \to +\infty$. Наконец, в недавней статье [12] доказана экспоненциальная синхронизация скалярного вязкого закона сохранения в ограниченной области с граничным условием Дирихле как в детерминистской, так и в стохастической постановках.

В настоящей статье устанавливается экспоненциальная скорость сходимости в периодической постановке и упрощаются некоторые доказательства, полученные ранее. Отметим также, что результаты данной статьи могут быть распространены на вязкие скалярные законы сохранения в более высокой размерности. Однако поскольку соответствующие доказательства не содержат каких-либо новых идей и могут быть проведены с использованием методов, изложенных в статьях[1] [12, 13], мы не обсуждаем их в данной работе.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 собраны различные результаты о задаче Коши для уравнения (1.1) и о линейных параболических уравнениях. В разделе 3 сформулирована и доказана основная теорема данной работы о строгом сжатии в L^1-норме для потока уравнения Бюргерса. Наконец, в разделе 4 мы приводим точную формулировку двух упомянутых выше утверждений и приводим их доказательства.

Обозначения и соглашения. Мы будем обозначать через $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ окружность единичной длины и отождествлять любую функцию на $\mathbb{S}$ с 1-периодической функцией на прямой $\mathbb{R}$. Лебеговские и соболевские пространства в области D обозначаются, соответственно, $L^p(D)$ и $H^s(D)$, и мы будем писать $|\cdot|_p$ и $\|\cdot\|_s$ для соответствующих норм и $(\cdot,\cdot)$ для скалярного произведения в L^2. В случае, когда $D = \mathbb{S}$, мы часто будем опускать $\mathbb{S}$ и писать просто L^p и H^s. Для заданной функции $g \in L^1(\mathbb{S})$ положим

$$\langle g\rangle = \int_{\mathbb{S}} g(x)\mathrm{d}x.$$

Если $J \subset \mathbb{R}$ — интервал (не обязательно ограниченный), а X — сепарабельное банахово пространство, то через $C_b(J,X)$ обозначается пространство ограниченных непрерывных функций $f : J \to X$ с естественной нормой, а через $L^2_{\mathrm{loc}}(J,X)$ — пространство измеримых по Борелю функций $f : J \to X$, таких, что для любого ограниченного интервала $I \subset J$

$$\|f\|^2_{L^2(I,X)} := \int_I \|f(t)\|^2_X \mathrm{d}t < \infty.$$

Пусть $\mathcal{X}(J)$ — пространство таких функций $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(J,H^2)$, для которых $\partial_t f \in L^2_{\mathrm{loc}}(J,L^2)$. В случае, когда интервал J ограничен, $\mathcal{X}(J)$ является гильбертовым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, определенной равенством

$$\|f\|^2_{\mathcal{X}} = \int_J \big(\|f(t)\|^2_2 + |\partial_t f(t)|^2_2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Если $J = J_T := [0,T]$, то мы будем писать $\mathcal{X}_T$ вместо $\mathcal{X}(J_T)$, а если $J = \mathbb{R}_+$, то просто $\mathcal{X}$. Наконец, для банахова пространства X через $B_X(R)$ будем обозначать закрытый шар в X радиуса R с центром в нуле.

2. Предварительные сведения

2.1. Задача Коши. Зафиксируем константы $\nu > 0$, $T > 0$ и рассмотрим уравнение (1.1) в области $Q_T := J_T \times \mathbb{S}$. Следующий результат хорошо известен и устанавливается стандартными методами, основанными на априорных оценках и принципе неподвижной точки; см. [6, 14].

Теорема 2.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, $u_0 \in H^1(\mathbb{S})$, а $h \in L^\infty(Q_T)$. Тогда задача* (1.1), (1.3) *имеет, и притом единственное, решение $u \in \mathcal{X}_T$, и найдется такая константа $K_T > 0$, зависящая*[2] *от ν, f, $|u_0|_{L^\infty}$, $|h|_{L^\infty(Q_T)}$, что*

$$|u|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant |u_0|_{L^\infty(\mathbb{S})} + T\,|h|_{L^\infty(Q_T)}, \tag{2.1}$$

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant K_T\big(\|u_0\|_1 + |h|_{L^2(Q_T)}\big). \tag{2.2}$$

[1] Препринт [13] был отозван из публикации, так как основной его результат покрывается работами [12, 15].

[2] Заметим, что никаких условий на среднее значение по x функции h не налагается, так что норма решений действительно может расти со временем T.

Доказательство. Для удобства читателя кратко изложим вывод априорных оценок. Чтобы установить неравенство (2.1), заметим, что функцию $u(t,x)$ можно рассматривать как решение линейного уравнения

$$\partial_t u - \nu\partial_x^2 u + b(t,x)\partial_x u = h(t,x),$$

где $b(t,x) = f'(u(t,x))$. Применяя принцип максимума к этому уравнению (см. [5, раздел 3.1]), получим (2.1). Для доказательства (2.2) возьмем сначала скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функцией $2u$. Используя периодичность и неравенство Коши—Шварца, получим

$$\partial_t|u|_2^2 + 2\nu\,|\partial_x u|_2^2 = 2(h,u) \leqslant |h|_2^2 + |u|_2^2. \tag{2.3}$$

Согласно неравенству Гронуола, отсюда следует, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(|u(t)|_2^2 + 2\nu\int\limits_0^t |\partial_x u(s)|_2^2 \mathrm{d}s\right) \leqslant C(T)\big(|u_0|_2^2 + |h|_{L^2(Q_T)}^2\big),$$

где $C(T) > 0$ зависит только от T. Для получения оценок на соболевские нормы высокого порядка умножим уравнение (1.1) скалярно в L^2 на функцию $-2\partial_x^2 u$. После несложных преобразований получим

$$\partial_t|\partial_x u|_2^2 + 2\nu\,|\partial_x^2 u|_2^2 \leqslant 2|h|_2|\partial_x u|_2 + K_1(T)|\partial_x u|_2|\partial_x^2 u|_2.$$

Здесь и далее через $K_i(T)$ обозначаются числа, которые могут быть выражены в терминах величины $|f'(u)|_{L^\infty(Q_T)}$ (которая конечна ввиду неравенства (2.1)). Применяя неравенство Коши, получаем

$$\partial_t|\partial_x u|_2^2 + \nu\,|\partial_x^2 u|_2^2 \leqslant K_2(T)|\partial_x u|_2^2 + \nu^{-1}|h|_2^2.$$

Используя снова неравенство Гронуола, приходим к соотношению

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(|\partial_x u(t)|_2^2 + \nu\int\limits_0^t |\partial_x^2 u(s)|_2^2 \mathrm{d}s\right) \leqslant K_3(T)\big(\|u_0\|_1^2 + |h|_{L^2(Q_T)}^2\big). \tag{2.4}$$

Наконец, решая уравнение (1.1) относительно $\partial_t u$ и беря L^2 норму в области Q_T, получаем

$$|\partial_t u|_2 \leqslant |h|_2 + K_4(T)\,|\partial_x u|_2 + \nu\,|\partial_x^2 u|_2.$$

Из неравенства (2.4) следует, что $|\partial_t u|_2$ также можно оценить через правую часть (2.2). Это завершает доказательство теоремы. □

2.2. Оценки диссипативности. В этом разделе мы будем предполагать, что $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция, такая, что

$$\langle h(t,\cdot)\rangle = 0 \tag{2.5}$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$. Наш первый результат касается диссипативности динамики для уравнения (1.1).

Теорема 2.2. *В дополнение к приведенным выше условиям предположим, что* $h \in L^\infty(Q)$. *Тогда для любого* $c \in \mathbb{R}$ *найдется такая константа* $C > 0$, *зависящая также от* ν, f *и* $|h|_{L^\infty(Q)}$, *что для любого начального условия* $u_0 \in H^1(\mathbb{S})$, *удовлетворяющего соотношению* $\langle u_0\rangle = c$, *для решения* $u \in \mathcal{X}$ *задачи* (1.1), (1.3) *при* $t \geqslant C\ln(|u_0|_2 + 2)$ *выполнено неравенство*

$$\|u(t)\|_1^2 + \int\limits_t^{t+1}\big(\|u(s)\|_2^2 + |\partial_s u(s)|_2^2\big)\mathrm{d}s \leqslant C. \tag{2.6}$$

Доказательство. Заметим, что интегрируя уравнение (1.1) по $t \in J_T$ и $x \in \mathbb{S}$, получим $\langle u(T)\rangle = \langle u_0\rangle = c$ для любого $T \geqslant 0$. Подставляя $u = c + v$ в (1.1), для v получим уравнение такого же вида, как и для u, в котором функция f заменена на ее сдвиг. Поэтому с самого начала мы можем предполагать, что $\langle u_0\rangle = 0$ и рассматривать решения с нулевым средним значением. Более того, так как пространство $\mathcal{X}_1$ непрерывно вложено в $C(J_1, H^1)$ (см. [7, гл. I, теорема 3.1]), достаточно оценить интеграл в левой части неравенства (2.6).

Для этого заметим, что скалярное произведение в (2.3) не превосходит $\nu|\partial_x u|_2^2 + C_1\nu^{-1}|h|_2^2$, где через C_i обозначаются несущественные константы, которые не зависят от решения. Сопоставляя это наблюдение с неравенством (2.3), получим

$$\partial_t |u|_2^2 + \nu\,|\partial_x u|_2^2 \leqslant C_1\nu^{-1}|h|_2^2. \tag{2.7}$$

Вспомнив, что u имеет нулевое среднее значение по x, применяя неравенство Пуанкаре к $|\partial_x u|_2^2$ и используя неравенство Гронуола, приходим к соотношению

$$|u(t)|_2^2 \leqslant e^{-\gamma t}|u_0|_2^2 + C_2 \sup_{s\geqslant 0}|h(s)|_2^2.$$

Сопоставляя это с (2.7), мы видим, что

$$\int\limits_t^{t+1} |\partial_x u(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant C_3\Big(e^{-\gamma t}|u_0|_2^2 + \sup_{s\geqslant 0}|h(s)|_2^2\Big).$$

В частности, существует такая константа $C_4 > 0$, что

$$\int\limits_t^{t+1} |\partial_x u(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant C_4 \quad \text{при } t \geqslant T := C_4 \ln(|u_0|_2 + 2).$$

Так как u — непрерывная функция от времени со значениями в H^1, для любого $t \geqslant T+1$ найдется такое $t_0 \in [t-1, t]$, что $\|u(t_0)\|_1 \leqslant C_5$. Применяя неравенство (2.2) к задаче Коши для (1.1) на интервале $[t_0, t_0+2]$, мы видим, что интеграл в (2.6) ограничен абсолютной константой C. Это завершает доказательство теоремы. ☐

Следующий результат полезен, когда правая часть в (1.1) является неограниченной. Приведенное свойство связано с сильной нелинейной диссипацией уравнения Бюргерса со строго выпуклым потоком.

Теорема 2.3. *В дополнение к условиям теоремы* 2.2 *предположим, что* $h \in C_b(\mathbb{R}_+, H^2)$, *а* f *удовлетворяет* (1.2). *Тогда для любого* $c \in \mathbb{R}$ *найдется константа* $C > 0$, *зависящая также от* ν, f *и* $|h|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2)}$, *такая, что для любого начального условия* $u_0 \in H^1$, *удовлетворяющего соотношению* $\langle u_0\rangle = c$, *для решения* $u \in \mathcal{X}$ *задачи* (1.1), (1.3) *выполнено неравенство* (2.6) *при* $t \geqslant 1$.

Доказательство. Согласно принципу максимума Кружкова (см. [2] или [9, раздел 4.1]), найдется константа $C_1 > 0$, зависящая только от ν, f и h, такая, что для любого $t_0 \geqslant 1/2$ имеем

$$|u(t_0)|_\infty \leqslant C_1.$$

Ввиду неравенства (2.1) (которое остается справедливым для начальных условий класса L^∞), норма решения в пространстве $L^\infty((t_0, t_0+1)\times\mathbb{S})$ ограничена константой, зависящей только от h. Беря скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функцией $-(t-t_0)\partial_x^2 u$ и осуществляя некоторые простые преобразования, легко получаем универсальную оценку для H^1-нормы решения в момент времени $t = t_0 + 1/2$, так что

$$\sup_{t\geqslant 1}\|u(t)\|_1 \leqslant C_2,$$

где $C_2 > 0$ зависит от ν, f и h. Теперь доказательство можно завершить точно таким же рассуждением, как и для теоремы 2.2. ☐

Комбинируя теоремы 2.2 и 2.3 со сглаживающим свойством уравнения (1.1), мы получаем следующую оценку на высшие производные решений. Ее доказательство можно получить, взяв скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функциями $(t-t_0)\partial_x^4 u$ или $\partial_x^4 u$ и выполнив некоторые стандартные преобразования.

Следствие 2.1. *При условиях теоремы* 2.2 (*или теоремы* 2.3) *найдется такая константа* $C > 0$, *не зависящая от начального условия, что решение* $u \in \mathcal{X}$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t)\|_2 \leqslant C, \tag{2.8}$$

где $t \geqslant 0$ принадлежит тем же полупрямым, что и в упомянутых выше теоремах. Если к тому же начальное условие u_0 принадлежит H^2, то оценка (2.8) *справедлива для всех $t \geqslant 0$ с некоторой константой $C > 0$, зависящей также от $\|u_0\|_2$.*

2.3. Некоторые свойства линейных параболических уравнений. Ключевым моментом нашего доказательства устойчивости потока уравнения Бюргерса является нижняя оценка для положительных решений параболических уравнений. Соответствующий результат выражается в терминах неравенства Харнака для линейного уравнения

$$\partial_t w - \nu \partial_x^2 w + \partial_x\big(a(t,x)w\big) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.9}$$

где $a : Q_T \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Доказательство следующего предложения можно найти в работе [4] (см. [3, раздел IV.2]).

Утверждение 2.1. *Пусть ν, T и ρ — положительные константы, $a \in L^\infty(Q_T)$ — некоторая функция, такая, что $\partial_x a \in L^\infty(Q_T)$ и*

$$|a|_{L^\infty(Q_T)} + |\partial_x a|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \rho. \tag{2.10}$$

Тогда для каждого $T' \in (0,T)$ найдется такое $\theta = \theta(T', T, \nu, \rho) > 0$, что для любого неотрицательного решения $w \in \mathcal{X}_T$ уравнения (2.9) *справедливо неравенство*

$$\theta \max_{x\in\mathbb{S}} w(T', x) \leqslant \min_{x\in\mathbb{S}} w(T, x). \tag{2.11}$$

Нам также понадобится свойство невозрастания L^1-нормы решений для уравнения (2.9). Оно сразу следует из принципа максимума по двойственности, см. [16, лемма 3.2.2].

Утверждение 2.2. *В условиях предложения* 2.1 *для любого решения $w \in \mathcal{X}_T$ уравнения* (2.9) *справедливо неравенство*

$$|w(t)|_1 \leqslant |w(s)|_1 \quad \textit{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{2.12}$$

3. Основной результат

Основным вспомогательным результатом для доказательства устойчивости потока уравнения Бюргерса является свойство сжатия L^1-нормы разности двух решений. Скорость сжатия зависит от нормы решений, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями и правой частью. А именно, справедлив следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ и любых положительных чисел ν, R и T найдется такое $q \in (0,1)$, что выполнено следующее свойство: для любой внешней силы $h \in L^\infty(Q_T)$ с L^∞-нормой, не превосходящей R, и средним значением, удовлетворяющем соотношению* (2.5) *для п. в. $t \in J_T$, и любых начальных условий $u_0, v_0 \in B_{H^1}(R)$, таких, что $\langle u_0\rangle = \langle v_0\rangle = c$, соответствующие решения удовлетворяют неравенству*

$$|u(T) - v(T)|_1 \leqslant q\,|u_0 - v_0|_1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через w разность $u - v$ и заметим, что она удовлетворяет уравнению (2.9), в котором

$$a(t,x) = \int_0^1 f'(v(t,x) + \tau w(t,x))\,\mathrm{d}\tau.$$

Более того, при всех $t \in J_T$ имеем $\langle w(t)\rangle = 0$, а ввиду неравенства (2.8), примененного к решениям u и v, найдется такое $\rho > 0$, зависящее только от ν, f, R, T, что выполнено (2.10). В частности, для любого положительного решения уравнения (2.9) справедливо неравенство Харнака (2.11).

Положим $w_0 = u_0 - v_0$ и обозначим через w_0^+ и w_0^-, соответственно, положительную и отрицательную части w_0; т. е. $w_0^\pm = \max\{\pm w_0, 0\}$. Пусть $w^\pm$ — решение уравнения (2.9), равное $w_0^\pm$ при $t = 0$, так что $w(t) = w^+(t) - w^-(t)$ для всех $t \in J_T$, и функции $w^\pm$ неотрицательны. Если $w^+(T/2, x) \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$ для всех $x \in \mathbb{S}$, то $|w^+(T/2)|_1 \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$. Так как среднее значение $w(t)$ равно нулю, L^1-нормы функций $w^+(t)$ и $w^-(t)$ равны, так что $|w^-(T/2)|_1 \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$. Сопоставляя это с (2.12), выводим

$$|w(T)|_1 \leqslant |w(T/2)|_1 \leqslant |w^+(T/2)|_1 + |w^-(T/2)|_1 \leqslant \frac{1}{2}\,|w_0|_1.$$

Точно такие же рассуждения применимы, когда $w^-(T/2,x) \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$ для всех $x \in \mathbb{S}$.

Предположим теперь, что

$$\max_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T/2,x) \geqslant \frac{1}{4}\,|w_0|_1.$$

Ввиду неравенства Харнака (2.11), существует такая константа $\theta > 0$, что

$$\min_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T,x) \geqslant \theta \max_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T/2,x) \geqslant \frac{\theta}{4}\,|w_0|_1.$$

Сопоставляя эту оценку с (2.12), выводим

$$\begin{aligned}
|w(T,x)|_1 &= \int_{\mathbb{S}} \bigl|w^+(T,x) - w^-(T,x)\bigr|\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{\mathbb{S}} \bigl|(w^+(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1) - (w^-(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \\
&\leqslant \int_{\mathbb{S}} \bigl(w^+(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1\bigr)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{S}} \bigl(w^-(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1\bigr)\,\mathrm{d}x = \\
&= |w^+(T)|_1 + |w^-(T)|_1 - \tfrac{\theta}{2}\,|w_0|_1 \leqslant |w_0^+|_1 + |w_0^-|_1 - \tfrac{\theta}{2}\,|w_0|_1 = \bigl(1 - \tfrac{\theta}{2}\bigr)|w_0|_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем требуемое неравенство (3.1), в котором $q = \max\Bigl\{\dfrac{1}{2}, 1 - \dfrac{\theta}{2}\Bigr\}$. □

4. Приложения

4.1. Единственность и устойчивость ограниченной траектории. Рассмотрим уравнение (1.1), в котором $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, а h принадлежит пространству $C_b(\mathbb{R}, H^1)$ и удовлетворяет (2.5) при всех $t \in \mathbb{R}$. Следующий результат описывает поведение решений уравнения (1.1) при больших временах.

Теорема 4.1. *При названных выше условиях для любого $c \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение $v(t,x)$ для (1.1) в пространстве $\mathcal{X}(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}, H^1)$, такое, что*

$$\langle v(t,\cdot)\rangle = c \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Более того, существует такое $\gamma > 0$, что для любого числа $R > 0$, достаточно большой константы $C_R > 0$ и любого начального условия $u_0 \in B_{H^1}(R)$, такого, что $\langle u_0\rangle = c$, соответствующее решение $u(t,x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t) - v(t)\|_1 \leqslant C_R\, e^{-\gamma t}|u_0 - v(0)|_1^{2/5}, \quad t \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Доказательство.

Шаг 1: *экспоненциальная устойчивость*. Покажем сначала, что для любого $R > 0$ и любых начальных условий $u_{01}, u_{02} \in B_{H^1}(R)$, таких, что $\langle u_{01}\rangle = \langle u_{02}\rangle$, соответствующие решения удовлетворяют неравенству

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_1 \leqslant C_R\, e^{-\gamma t}|u_{01} - u_{02}|_1^{2/5}, \quad t \geqslant 1, \tag{4.3}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от начальных условий. Для этого рассмотрим сначала случай, когда решения удовлетворяют неравенству (2.8) при всех $t \geqslant 0$. Согласно хорошо известному неравенству интерполяции (см. [1, раздел 15.1]), для любого $u \in H^2$ имеем $\|u\|_1 \leqslant C_1\|u\|_2^{3/5}|u|_1^{2/5}$. Так как H^2-норма разности $u = u_1 - u_2$ ограничена, неравенство (4.3) будет установлено при $t \geqslant 0$, если мы покажем экспоненциальное убывание L^1-нормы $|u(t)|_1$.

Для этого заметим, что разность $u(t,x)$ удовлетворяет линейному уравнению (2.9). Ввиду невозрастания L^1-нормы (см. предложение 2.2), достаточно доказать, что $|u(k)|_1 \leqslant q^k |u(0)|_1$ для любого целого числа $k \geqslant 0$, где $q \in (0,1)$ не зависит от k. Последняя оценка является непосредственным следствием теоремы 3.1.

Для того, чтобы доказать (4.3) для произвольных начальных данных из $B_{H^1}(R)$, заметим, что решения u_i удовлетворяют неравенству (2.8) при $t \geqslant 1$ с некоторой константой $C = C(R)$. Используя неравенство интерполяции и невозрастание L^1-нормы, получаем, что $\|u(t)\|_1 \leqslant C_2(R)|u(0)|_1^{2/5}$ при $t \geqslant 1$. С другой стороны, решения $u_i \in \mathcal{X}$ удовлетворяют (2.8) при $t \geqslant t_0 = C_3 \ln(R+2)$, так что

$$\|u(t)\|_1 \leqslant C_4 e^{-\gamma(t-t_0)}|u(t_0)|_1^{2/5} \leqslant C_5 e^{-\gamma t}|u(t_0)|_1^{2/5}$$

при $t \geqslant t_0$. Сопоставляя это с полученной выше оценкой для $\|u(t)\|_1$, справедливой при $t \geqslant 1$, приходим к неравенству (4.3).

Шаг 2: ограниченное решение. Зафиксируем теперь число $c \in \mathbb{R}$ и построим ограниченное в H^1 решение $v \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ уравнения (1.1), определенное на действительной прямой и удовлетворяющее соотношению (4.1). Как только это будет установлено, неравенство устойчивости (4.2) будет следовать из (4.3).

Построение функции v основано на стандартной идее, использующей решения с начальными моментами времени, уходящими на $-\infty$. А именно, обозначим через u^n решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию $u^n(-n) = c$. Тогда для любых $m < n$ и $T \geqslant 1 - m$ неравенство (4.3), примененное к полупрямой $[-m, +\infty)$, влечет, что

$$\sup_{|t|\leqslant T} \|u^m(t) - u^n(t)\|_1 \leqslant C_6 e^{-\gamma(T+m)}.$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$, мы видим, что последовательность (u^n) сходится в H^1 к некоторой функции $v \in C_b(\mathbb{R}, H^1)$ равномерно на любом конечном интервале. Далее, так как последовательность (u^n) ограничена в $\mathcal{X}([-T,T])$ для любого $T > 0$, слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве влечет, что $v \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. Легко проверить, что v является решением уравнения (1.1), удовлетворяющим соотношению (4.1). Это завершает доказательство теоремы. □

4.2. Уравнения со случайной правой частью. Рассмотрим теперь случай, когда внешняя сила h является случайным процессом. А именно, мы предполагаем, что почти каждая траектория h является непрерывной функцией времени со значениями в H^2, такой, что соотношение (2.5) выполняется при $t \geqslant 0$, а случайная величина

$$K := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \max_{t\leqslant s\leqslant t+1} \|h(s)\|_2 \, \mathrm{d}t \tag{4.4}$$

конечна почти наверное. Например, в силу теоремы Биркгофа условие (4.4) заведомо выполняется, если h — стационарный случайный процесс в H^2 с непрерывными с вероятностью 1 траекториями, такой, что

$$M := \mathbb{E} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|h(t)\|_2 < \infty. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Предположим, что $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенству* (1.2), *упомянутые выше условия выполнены для h, а $u_0, v_0 \in H^1$ — произвольные начальные данные, такие, что $\langle u_0\rangle = \langle v_0\rangle$. Тогда с вероятностью* 1 *соответствующие решения принадлежат пространству $\mathcal{X}$ и таковы, что*

$$|u(t) - v(t)|_1 \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{4.6}$$

Замечание 4.1. Теорема 4.2 не применима к случаю, когда внешняя сила в уравнении (1.1) имеет вид $h + \eta$, где $h = h(x)$ — детерминистская функция, а $\eta = \eta(t,x)$ — регулярный по пространственным переменным белый шум. Однако, комбинируя диссипативность динамики с марковским свойством, нетрудно построить возрастающую последовательность моментов остановки (t_k), такую, что разность $t_k - t_{k-1}$ имеет конечный экспоненциальный момент, а решения ограничены в пространстве H^2 на интервале $[t_k, t_k + 1]$. Повторяя затем рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 4.2, можно установить экспоненциальную сходимость в (4.6) и единственность стационарной меры. Поскольку описанный выше подход хорошо известен и подробно изложен в [12, раздел 3], мы опускаем соответствующее доказательство.

Доказательство теоремы 4.2. Зафиксируем два начальных условия $u_0, v_0 \in B_{H^1}(R)$ с одним и тем же средним значением и обозначим через u, v соответствующие решения. Ввиду теоремы 2.1 они корректно определены и принадлежат пространству $\mathcal{X}$ с вероятностью 1. Из конечности почти наверное случайной величины (4.4) следует, что существует возрастающая случайная последовательность (t_k), стремящаяся к $+\infty$ вероятностью 1, такая, что

$$\sup_{t_k \leqslant t \leqslant t_k+2} \|h(t)\|_2 \leqslant 2K+1.$$

Применяя следствие 2.1 к решениям u, v на интервалах $[t_k, t_k+2]$, мы построим конечную с вероятностью 1 случайную константу $C>0$, такую, что

$$\sup_{t_k+1 \leqslant t \leqslant t_k+2} (\|u(t)\|_2 + \|v(t)\|_2) \leqslant C.$$

Используя теперь теорему 3.1, находим случайную величину $q \in (0,1)$, такую, что $|u(t_k+2) - v(t_k+2)|_1 \leqslant q\,|u(t_k+1) - v(t_k+1)|_1$ для любого $k \geqslant 1$. Сопоставляя это с неравенством (2.12), заключаем, что с вероятностью 1

$$|u(t_k+2) - v(t_k+2)|_1 \leqslant q^k |u_0 - v_0|_1 \quad \text{при всех } k \geqslant 1.$$

Используя снова (2.12), мы видим, что сходимость (4.6) имеет место почти наверное. □

Замечание 4.2. Теорема 4.2 не уточняет скорость сходимости в (4.6), и вряд ли можно сказать что-то еще о сходимости (4.6) без какой-либо дополнительной информации. С другой стороны, если h — перемешивающийся стационарный процесс, такой, что выполнено (4.5), то случайная величина K в (4.4) равна M почти наверное (по теореме Биркгофа). В этом случае любая информация о скорости перемешивания даст некоторые количественные оценки для случайных времен (t_k), использованных в приведенном выше доказательстве, а это позволяет описать скорость сходимости в (4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. *Кружков С. Н.* О задаче Коши для некоторых классов квазилинейных параболических уравнений// Мат. заметки. — 1969. — *6*, № 3. — С. 295–300.
3. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985.
4. *Крылов Н. В., Сафонов М. В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 1. — С. 161–175.
5. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1971.
8. *Bakhtin Y., Li L.* Thermodynamic limit for directed polymers and stationary solutions of the Burgers equation// Commun. Pure Appl. Math. — 2019. — *72*, № 3. — С. 536–619.
9. *Boritchev A.* Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation// Geom. Funct. Anal. — 2013. — *23*, № 6. — С. 1730–1771.
10. *Chung J., Kwon O.* Asymptotic behavior for the viscous Burgers equation with a stationary source// J. Math. Phys. — 2016. — *57*, № 10. — 101506.
11. *Dunlap A., Graham C., Ryzhik L.* Stationary solutions to the stochastic Burgers equation on the line// Commun. Math. Phys. — 2021. — *382*, № 2. — С. 875–949.
12. *Djurdjevac A., Rosati T.* Synchronisation for scalar conservation laws via Dirichlet boundary// ArXiv. — 2022. — 2211.05814.
13. *Djurdjevac A., Shirikyan A.* Stabilisation of a viscous conservation law by a one-dimensional external force// ArXiv. — 2022. — 2204.03427.
14. *Evans L. C.* Partial differential equations. — Providence: Am. Math. Soc., 2010.

15. *Hill A. T., Süli E.* Dynamics of a nonlinear convection-diffusion equation in multidimensional bounded domains// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1995. — *125*, № 2. — С. 439–448.
16. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. — Berlin: Springer, 1997.
17. *Jauslin H. R., Kreiss H. O., Moser J.* On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions// В сб.: «Differential equations: La Pietra 1996». — Providence: Am. Math. Soc., 1999. — С. 133–153.
18. *Kalita P., Zgliczyński P.* On non-autonomously forced Burgers equation with periodic and Dirichlet boundary conditions// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2020. — *150*, № 4. — С. 2025–2054.
19. *Kifer Y.* The Burgers equation with a random force and a general model for directed polymers in random environments// Probab. Theory Related Fields. — 1997. — *108*, № 1. — С. 29–65.
20. *Shirikyan A.* Global exponential stabilisation for the Burgers equation with localised control// J. Éc. Polytech. Math. — 2017. — *4*. — С. 613–632.
21. *Sinaĭ Ya. G.* Two results concerning asymptotic behavior of solutions of the Burgers equation with force// J. Stat. Phys. — 1991. — *64*, № 1-2. — С. 1–12.

А. Джурджевак
Freie Universität Berlin, Berlin, Germany
E-mail: `adjurdjevac@zedat.fu-berlin.de`

А. Р. Ширикян
CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `Armen.Shirikyan@cyu.fr`

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598
EDN: YFDPHA

Exponential stability of the flow for a generalized Burgers equation on a circle

A. Djurdjevac[1] and A. R. Shirikyan[2,3]

[1] *Freie Universität Berlin, Berlin, Germany*
[2] *CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France*
[3] *RUDN University, Moscow, Russia*

Abstract. The paper deals with the problem of stability for the flow of the 1D Burgers equation on a circle. Using some ideas from the theory of positivity preserving semigroups, we establish the strong contraction in the L^1 norm. As a consequence, it is proved that the equation with a bounded external force possesses a unique bounded solution on $\mathbb{R}$, which is exponentially stable in H^1 as $t \to +\infty$. In the case of a random external force, we show that the difference between two trajectories goes to zero with probability 1.

Keywords: Burgers equation, exponential stability, bounded trajectory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research of the first author has been partially supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through grant CRC 1114 *Scaling Cascades in Complex Systems*, Project Number 235221301, Project C10 — Numerical analysis for nonlinear SPDE models of particle systems. The research of the second author has been supported by the *CY Initiative* through the grant *Investissements d'Avenir* ANR-16-IDEX-0008 and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115).

For citation: A. Djurdjevac, A. R. Shirikyan, "Exponential stability of the flow for a generalized Burgers equation on a circle," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 588–598. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598`

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov, "O zadache Koshi dlya nekotorykh klassov kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy" [On the Cauchy problem for some classes of quasilinear parabolic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1969, **6**, No. 3, 295–300 (in Russian).
3. N. V. Krylov, *Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Nonlinear Second-Order Elliptic and Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
4. N. V. Krylov and M. V. Safonov, "Nekotoroe svoystvo resheniy parabolicheskikh uravneniy s izmerimymi koeffitsientami" [A certain property of solutions to parabolic equations with measurable coefficients], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1980, **44**, No. 1, 161–175 (in Russian).
5. E. M. Landis, *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
6. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
7. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya. T. 1* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. 1], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
8. Y. Bakhtin and L. Li, "Thermodynamic limit for directed polymers and stationary solutions of the Burgers equation," *Commun. Pure Appl. Math.*, 2019, **72**, No. 3, 536–619.
9. A. Boritchev, "Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation," *Geom. Funct. Anal.*, 2013, **23**, No. 6, 1730–1771.
10. J. Chung and O. Kwon, "Asymptotic behavior for the viscous Burgers equation with a stationary source," *J. Math. Phys.*, 2016, **57**, No. 10, 101506.
11. A. Dunlap, C. Graham, and L. Ryzhik, "Stationary solutions to the stochastic Burgers equation on the line," *Commun. Math. Phys.*, 2021, **382**, No. 2, 875–949.
12. A. Djurdjevac and T. Rosati, "Synchronisation for scalar conservation laws via Dirichlet boundary," *ArXiv*, 2022, 2211.05814.
13. A. Djurdjevac and A. Shirikyan, "Stabilisation of a viscous conservation law by a one-dimensional external force," *ArXiv*, 2022, 2204.03427.
14. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 2010.
15. A. T. Hill and E. Süli, "Dynamics of a nonlinear convection-diffusion equation in multidimensional bounded domains," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1995, **125**, No. 2, 439–448.
16. L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1997.
17. H. R. Jauslin, H. O. Kreiss, and J. Moser, "On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions," In: *Differential Equations: La Pietra 1996*, Am. Math. Soc., Providence, 1999, pp. 133–153.
18. P. Kalita and P. Zgliczyński, "On non-autonomously forced Burgers equation with periodic and Dirichlet boundary conditions," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2020, **150**, No. 4, 2025–2054.
19. Y. Kifer, "The Burgers equation with a random force and a general model for directed polymers in random environments," *Probab. Theory Related Fields*, 1997, **108**, No. 1, 29–65.
20. A. Shirikyan, "Global exponential stabilisation for the Burgers equation with localised control," *J. Éc. Polytech. Math.*, 2017, **4**, 613–632.
21. Ya. G. Sinaĭ, "Two results concerning asymptotic behavior of solutions of the Burgers equation with force," *J. Stat. Phys.*, 1991, **64**, No. 1-2, 1–12.

A. Djurdjevac
Freie Universität Berlin, Berlin, Germany
E-mail: `adjurdjevac@zedat.fu-berlin.de`

A. R. Shirikyan
CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `Armen.Shirikyan@cyu.fr`