



УДК 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139

## О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением

А. А. Тютюнник

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В статье исследуются волноводы постоянного сечения с идеально проводящими стенками и произвольным заполнением. Поставлена и дискретизирована задача об отыскании нормальных мод волновода в полной векторной постановке. В рамках численных экспериментов для нескольких вариантов заполнений вычислены направляемые и эванесцентные моды волновода. Поставлена и дискретизирована задача дифракции нормальной волновой моды, подающей на стык двух волноводов, сечения которых совпадают, а заполнение на стыке меняется скачком, приведены результаты численных экспериментов для конкретных конфигураций волноводных стыков и вычислены коэффициенты прохождения и отражения направляемых мод.

В основу решения системы уравнений Максвелла положена декомпозиция полей при помощи четырёх потенциалов, и в рамках настоящей работы предложен символьно-численный метод, реализующий этот подход. Представленные в работе численные эксперименты показывают, что предложенный подход и метод на его основе позволяют эффективно вычислять различные характеристики волноведущих систем. Об адекватности используемого подхода свидетельствует также результат сравнения полученных результатов с результатами В.В. Шевченко для задачи дифракции на стыке двух открытых волноводов.

Символьно-численный метод, используемый в работе, реализован в системе компьютерной алгебры Maple, в частности расчёты матричных элементов в рамках неполного метода Галёркина проведены в символьном виде для ускорения дальнейших расчётов с использованием численных методов.

**Ключевые слова:** волновод, уравнения Максвелла, нормальные моды, парциальные условия излучения, неполный метод Галёркина, метод Канторовича, Maple, Sage, Sagemath

### 1. Введение

Распространение электромагнитных волн в полых волноводах было описано в символьном виде в ставшей уже классической работе [1]. Исследование закрытых волноводов со сложным заполнением  $\epsilon$  и  $\mu$  требует применения численных методов [2]. В работах [3, 4] был предложен метод исследования задачи волноводного распространения излучения, основанный на декомпозиции полей по четырём потенциалам. Этот подход может быть применён и к исследованию открытых волноведущих систем путём введения виртуальных стенок [5, 6].

В настоящей работе предложенный подход применяется к 1) расчёту нормальных мод для модельных задач и 2) расчёту коэффициентов отражения и прохождения волноводных мод на стыке двух волноводов. Результаты численных экспериментов верифицировались в работе путём сравнения результатов расчёта модельных примеров в рамках двух независимых реализаций метода четырёх потенциалов, первая реализация разработана в системе компьютерной алгебры Sage, вторая — в Maple. Данные, полученные в рамках численных экспериментов по расчёту прохождения излучения через стык волноводов, сравнивались с результатами расчётов аналогичной конфигурации методом поперечных сечений, полученных в работе Шевченко [7].

---

Статья поступила в редакцию 2 марта 2018 г.

Автор благодарен Севастьянову Л. А. и Малых М. Д. за полезные обсуждения, а также Дивакову Д. В. за конструктивные советы по реализации символьно-численного метода.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Вычисления проводились в системах компьютерной алгебры Maple, Sage: матричные коэффициенты задачи на собственные значения вычислялись символьно, задача на собственные значения решалась численно с использованием встроенных в систему компьютерной алгебры численных методов.

## 2. Описание поля в волноводе при помощи четырёх потенциалов

Рассмотрим волновод постоянного односвязного сечения  $S$  с идеально проводящими стенками; относительно заполнения  $\varepsilon, \mu$  которого не будем делать пока никаких предположений. Ось  $Oz$  направим по оси цилиндра, нормаль к  $S$  будем обозначать как  $\vec{n}$ , касательный вектор, перпендикулярный к  $\vec{e}_z$  как  $\vec{\tau}$ . Положим

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T.$$

Декомпозиция Гельмгольца [4, теоремы 1 и 2] позволяет искать решение системы уравнений Максвелла в виде

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \nabla' u_h. \quad (1)$$

Введённые здесь четыре скалярные функции будем называть потенциалами и всегда предполагать, что они удовлетворяют граничным условиям

$$u_e = u_h = n \cdot \nabla v_e = n \cdot \nabla v_h|_{\partial S} = 0 \quad (2)$$

на границе волновода. При этом автоматически выполняются граничные условия идеальной проводимости, а сами уравнения Максвелла можно записать в следующем виде [3, 4]

$$\begin{cases} \nabla' \left( \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0, \\ \nabla' \left( \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  являются постоянными, эта система распадается на пару уравнений Гельмгольца, данный подход был предложен в работах [3, 4]. Мы воспользуемся некоторыми теоретическими результатами из этих работ, чтобы в данной статье привести результаты компьютерных экспериментов, содержащих символьные и численные расчёты в системе компьютерной алгебры Maple.

## 3. Дискретизация уравнений Максвелла

Рассмотрим вначале однородный вдоль оси  $z$  волновод квадратного сечения  $S = \{x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$ . Пусть на некотором отрезке  $a < z < b$  заполнение  $\varepsilon, \mu$  не меняется вдоль оси. Дискретизацию по пространству будем проводить, используя стандартный базис метода Галёркина [8, 9]. Раскладывать приближенное решение будем по конечному числу функций, удовлетворяющих граничным условиям. В качестве базиса в данном случае подходит базис  $\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$ , составленный из собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и условиями Неймана, а именно:

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{N^2-1} = (\cos(\pi nx) \cos(\pi my), 0, 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (4)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=N^2-1}^{2N^2-2} = (0, \cos(\pi nx) \cos(\pi my), 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (5)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=2N^2-2}^{3N^2-2} = (0, 0, \sin(\pi nx) \sin(\pi my), 0)^T, \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=3N^2-2}^{4N^2-2} = (0, 0, 0, \sin(\pi nx) \sin(\pi my))^T, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Приближенное решение системы (3) будем строить по аналогии с неполным методом Галёркина [2, 9] в виде разложения

$$(v_h, v_e, u_e, u_h)^T = \sum_{j=1}^{4N^2-2} w_j(z) \vec{\varphi}_j(x, y). \quad (8)$$

После подстановки приближенного решения в уравнения системы и применения проекционной схемы метода Галёркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора искомых коэффициентных функций  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{4N^2-2})^T$ :

$$B \frac{d\vec{w}}{dz} + ikA\vec{w} + \frac{1}{ik}C\vec{w} = \vec{0}, \quad (9)$$

где  $A, B$  и  $C$  — квадратные матрицы, элементы которых представляют собой двойные интегралы по сечению волновода  $S$ :

$$a_{ij} = \iint_S \varepsilon (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \\ + \iint_S \mu (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy, \quad (10)$$

$$b_{ij} = \iint_S (\nabla' \varphi_{j1} \cdot \nabla' \varphi_{i1} + \nabla' \varphi_{j3} \cdot \nabla' \varphi_{i3} + \nabla \varphi_{j2} \cdot \nabla \varphi_{i2} + \nabla \varphi_{j4} \cdot \nabla \varphi_{i4}) dx dy, \quad (11)$$

$$c_{ij} = \iint_S \left( \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}}{\varepsilon} \right) dx dy, \quad (12)$$

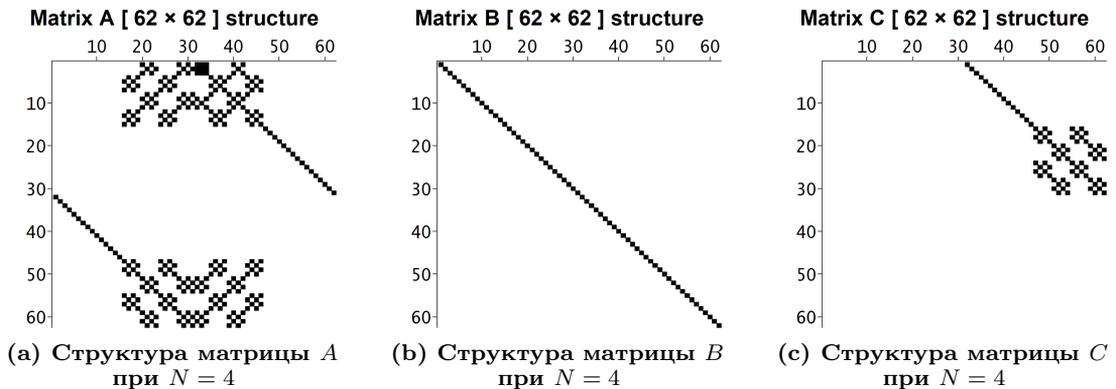
где  $\varphi_{jn}$ ,  $n = 1, \dots, 4$  —  $n$ -я компонента  $j$ -й вектор-функции  $\vec{\varphi}_j$ .

#### 4. Волновод с прямоугольной вставкой

Широкий класс волноводов — это волноводы с кусочно-постоянным заполнением  $\varepsilon$  и  $\mu$ . В этом случае интегралы (10)–(12), определяющие матричные элементы, можно вычислить в символьном виде. Если  $\varepsilon$  полином, то вычислить интеграл (12) в символьном виде невозможно в силу теоремы Лиувилля [10].

Рассмотрим структуру матриц  $A, B$  и  $C$ , полученных символьно методом четырёх потенциалов для квадратного волновода с произвольной прямоугольной вставкой.

На приведённом рис. 1 чёрными квадратами обозначены символьные выражения, тождественно не равные нулю, белыми квадратами — символьные нули. Структура матрицы  $A$  разреженная, причём ненулевые символьные элементы матрицы расположены в блочно-шахматном порядке. Матрица  $C$  обладает также разреженной структурой с блочно-шахматным расположением ненулевых элементов. Матрица  $B$  обладает более простой — диагональной структурой в рамках выбранного базиса.

Рис. 1. Структура матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 

Вычисление матричных элементов осуществлялось символично в Maple с помощью встроенной функции `int`.

Далее полученные выражения использовались для численных расчётов. Этот приём позволил избежать многократного повторения трудоёмкой процедуры численного интегрирования.

## 5. Нормальные моды

Однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) допускает решения, которые зависят от  $z$  как  $e^{ik\beta z}$ , такие решения называют нормальными модами волновода. Подставляя вид решения  $\vec{w}(z) = \vec{\psi}e^{ik\beta z}$  в (9) и сокращая ненулевые множители, получим задачу на собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы  $K$

$$K\vec{\psi} = \beta\vec{\psi},$$

где матрица  $K$  выражается через матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  следующим образом:

$$K = B^{-1} \left( A - \frac{1}{k^2} C \right).$$

Величина  $\beta$ , входящая в степень экспоненты, называется коэффициентом фазового замедления моды, он определяет характер распространения моды. Моды с вещественным  $\beta > 0$  представляют собой волны, бегущие вдоль оси волновода в положительном направлении, моды с  $\beta < 0$  — в отрицательном направлении, их называют распространяющимися. Моды с мнимым  $\beta$  экспоненциально убывают в одном из направлений, их называют эванесцентными.

Вычисление собственных мод требует решения задачи на собственные значения и собственные векторы матрицы  $K$ . Благодаря диагональной структуре матрицы  $B$  в выбранном базисе матрицу  $K$  также можно вычислить символично. Вид разреженной вычисленной символично матрицы  $K$  аналогичен виду матриц  $A$  и  $C$  и приведён на рис. 2.

Приведём далее результаты численных расчётов коэффициентов фазового замедления для квадратного волновода из материала с  $\varepsilon_1 = 1$  единичной ширины и высоты с квадратной вставкой  $p_x = p_y = p$  из материала с  $\varepsilon_2 = 2$  (см. рис. 3).

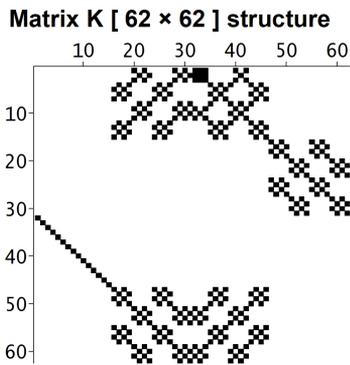


Рис. 2. Структура матрицы  $K$  при  $N = 4$

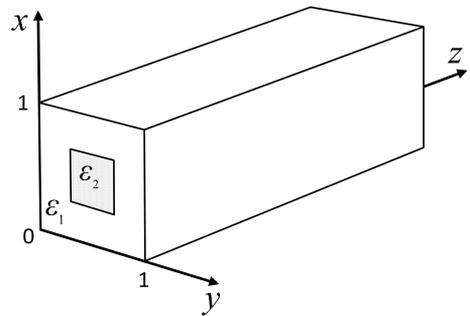


Рис. 3. Квадратный волновод с квадратной вставкой ширины  $p$

С увеличением толщины или изменением диэлектрической проницаемости вставки мнимые собственные значения трансформируются в действительные (см. [3]), что соответствует появлению новой распространяющейся моды. Проиллюстрируем описанное поведение собственных значений при изменении толщины диэлектрической вставки с  $p = 0,668$  до  $p = 0,670$ , которые приведены на рис. 4. Ось абсцисс соответствует действительной части собственных значений, ось ординат — мнимой. Собственные значения  $\beta_j$ , лежащие на оси абсцисс соответствуют направляемым модам, причём моды, бегущие в положительном направлении оси  $z$ , имеют  $\beta_j > 0$ , а бегущие в отрицательном направлении —  $\beta_j < 0$ . На мнимой оси расположены  $\beta_j$ , отвечающие эванесцентным модам.

При толщине  $p = 0,668$  (левый график на рис. 4) в волноводе имеется три направляемые моды, бегущие в положительном направлении  $z$ , и три — бегущие в отрицательном. Квадратиком на рис. 4 обозначено мнимое собственное значение, которое при толщине  $p = 0,668$  приближается к нулю и при толщине  $p = 0,670$  (правый график на рис. 4) оно переходит на действительную ось, что соответствует появлению новой направляемой моды волновода.

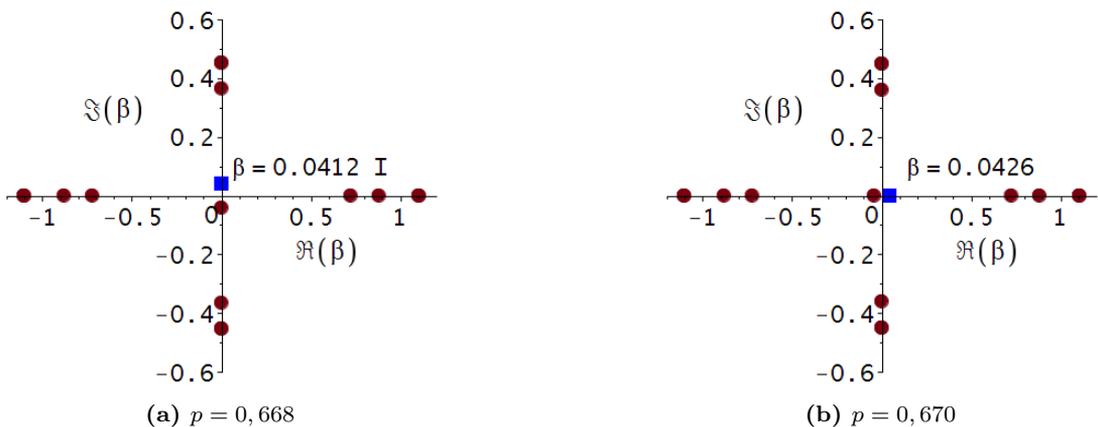


Рис. 4. Собственные значения

Случаю  $p = 0$  соответствует полый волновод, собственные значения для которого известны аналитически. В результате сравнения с численными результатами, полученными описанным методом, относительная погрешность при вычислении собственных значений в этом случае составила  $\delta < 2 \cdot 10^{-10}$ .

Численный расчёт собственных значений производится средствами системы компьютерной алгебры Maple. С помощью функции `ImportMatrix` производится загрузка матрицы  $K$ , предварительно вычисленной символично. Чтобы получить численные значения элементов матрицы, необходимо в этом случае в символьные выражения, зависящие от параметров вставки, подставить численные значения этих параметров, используя функцию `subs`. Для полученной матрицы  $K$  можно далее вычислить собственные значения, используя встроенную функцию `Eigenvalues`. Для матрицы  $K$  интересующей нас размерности  $194 \times 194$  вычисления собственных значений и собственных векторов на современном компьютере с конфигурацией Intel(R) Core(TM) i7-6500U 2.50 ГГц, 8.00 ГБ ОЗУ занимают менее чем 0.5 сек.

Описанный подход позволяет всесторонне исследовать спектральные характеристики волноведущих систем с кусочно-постоянным заполнением за приемлемое время.

## 6. Задача рассеяния на стыке двух волноводов

Предложенный подход к представлению уравнений Максвелла через вспомогательные потенциалы с последующей дискретизацией позволяет достаточно просто в конструктивном виде сформулировать задачу волноводной дифракции. В качестве примера рассмотрим простейшую в рамках нашего подхода задачу из этого класса — задачу о дифракции волны на стыке двух волноводов.

Пусть имеются два волновода, имеющие одинаковые сечения, но различное заполнение, и пусть они стыкуются при  $z = 0$ . Иными словами, пусть

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1(x, y), & z < 0, \\ \varepsilon_2(x, y), & z > 0, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_1(x, y), & z < 0, \\ \mu_2(x, y), & z > 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать случай дифракции волноводной моды, налетающей из левого ( $z < 0$ ) волновода на правый ( $z > 0$ ). Поле в левом и правом волноводах может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод, приближенное вычисление которых осуществляется методом четырёх потенциалов. При  $z < 0$  задача отыскания нормальных мод редуцируется к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы  $K^{(1)}$

$$K^{(1)} \vec{\psi}^{(1)} = \beta^{(1)} \vec{\psi}^{(1)}, \quad (13)$$

а при  $z > 0$  — к задаче

$$K^{(2)} \vec{\psi}^{(2)} = \beta^{(2)} \vec{\psi}^{(2)}. \quad (14)$$

Поле в левом волноводе состоит из падающей на стык моды с  $\text{Re}(\beta_1^{(1)}) > 0$  и амплитудным коэффициентом  $A$  и отражённых мод с  $\text{Re}(\beta_j^{(1)}) < 0$  и амплитудными коэффициентами отражения  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ . Поле в правом волноводе состоит из прошедших мод с  $\text{Re}(\beta_j^{(2)}) > 0$ , характеризующихся амплитудными коэффициентами прохождения  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ .

Задача дифракции такой волны на стыке состоит в отыскании поля, равного

$$w = Aw^{(1)}(x, y)e^{ik\beta_1^{(1)}z} + \sum_{\text{Re}\{\beta_j^{(1)}\} < 0} R_j w_j^{(1)}(x, y)e^{ik\beta_j^{(1)}z}$$

при  $z < 0$  и

$$w = \sum_{\operatorname{Re} \beta_j^{(2)} > 0} T_j w_j^{(2)}(x, y) e^{ik\beta_j^{(2)}z}$$

при  $z > 0$ , где  $w_j^{(1)}(x, y)$  и  $w_j^{(2)}(x, y)$  определяет поперечное распределение  $j$ -й нормальной моды левого и правого волноводов соответственно. Они определены как

$$w_j^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(1)} \vec{\varphi}_m(x, y), \quad w_j^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(2)} \vec{\varphi}_m(x, y), \quad (15)$$

где  $\psi_{mj}^{(1)}$  и  $\psi_{mj}^{(2)}$  — это  $m$ -я компонента  $j$ -го собственного вектора задачи (13) и (14) соответственно. На границе должно выполняться условие непрерывности тангенциальных составляющих полей:

$$[\vec{E}_\perp] = 0, \quad [\vec{H}_\perp] = 0.$$

В силу единственности (с точностью до аддитивной константы) представления полей через потенциалы [3, 4], это условие выполняется, если потенциалы непрерывны. Таким образом, условие сопряжения полей ведёт к легко выписываемому условию на коэффициенты  $R_j, T_j$

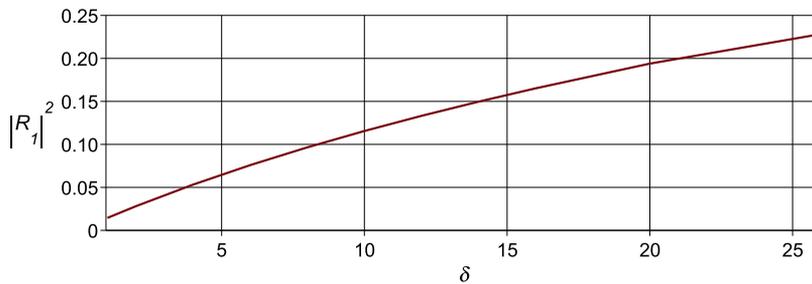
$$Aw^{(1)}(x, y) + \sum_{\operatorname{Re}\{\beta_j\}^{(1)} < 0} R_j w_j^{(1)}(x, y) = \sum_{\operatorname{Re}\{\beta_j\}^{(2)} > 0} T_j w_j^{(2)}(x, y). \quad (16)$$

Поскольку и  $w_j^{(1)}(x, y)$  и  $w_j^{(2)}(x, y)$  согласно (15) раскладываются по системе функций  $\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$  для выполнения (16) коэффициенты при каждой функции  $\vec{\varphi}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4N^2 - 2$ , должны быть равны между собой. Приравнивая коэффициенты при каждой  $\vec{\varphi}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4N^2 - 2$ , в которые входят линейные комбинации  $R_j, T_j$ , получим систему из  $4N^2 - 2$  линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов отражения  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$  и прохождения  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ . Число неизвестных  $R_j, T_j$  в точности равно числу уравнений, поэтому полученная система имеет и притом единственное решение.

Описанная процедура получения системы линейных алгебраических уравнений реализовывалась в системах компьютерной алгебры Maple и Sage для сравнения результатов расчётов модельного стыка, речь о котором пойдёт ниже.

## 7. Численное решение задачи дифракции на стыке закрытых волноводов

Рассмотрим стык полого волновода  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\mu_1 = 1$  с волноводом градиентным, которому соответствует  $\varepsilon_2 = 1 + \delta xy(1-x)(1-y)$ ,  $\mu_2 = 1$ . Значение безразмерного параметра  $\delta$  определяет, насколько сильно различаются материалы левого и правого волноводов. Рассмотрим случай, когда из полого волновода на волновод градиентный налетает одна направляемая мода с  $\beta \simeq 0,778$  и единичной амплитудой  $A = 1$ . Будем численно оценивать её коэффициент отражения от стыка  $|R_1(\delta)|^2$  для  $\delta \in [1; 26]$  при  $N = 2$ .



**Рис. 5. Коэффициент отражения первой моды от стыка при  $N = 2$ , (а) результаты, полученные в работе В.В. Шевченко, (б) результаты, полученные в данной работе.**

Отражение при малых значениях параметра  $\delta$  незначительно. Увеличение параметра  $\delta$  влечёт большее отражение волноводной моды от стыка, что физически соответствует поведению моды на стыке волноводов из различных материалов.

Сравнение реализаций символьно-численного метода расчёта коэффициентов отражения и прохождения в Maple и Sage для рассматриваемого случая показывает, что  $|R_1^{\text{Maple}}(1) - R_1^{\text{Sage}}(1)| < 0,002$ . Точность совпадения обусловлена различными реализациями символьно-численного метода, а также различной точностью численного расчёта интегралов в системах Maple и Sage.

## 8. Численное решение задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов

Рассмотрим теперь второй пример, сделав предварительное замечание. Одним из первых методов исследования закрытых нерегулярных волноводов был разработан Б. З. Каценеленбаумом [11] — метод поперечных сечений, который был обобщён на открытые волноводы В. В. Шевченко [12]. Попытки обосновать метод поперечных сечений для открытых волноводов привели к серьёзным теоретическим трудностям, связанным с наличием непрерывного спектра задачи, описывающего излучательные моды открытого волновода. Волноводная задача для закрытого нерегулярного волновода тем временем имеет корректную постановку.

В работе [5] было показано, что расчёт открытого волновода можно проводить в рамках модели так называемого «ящика Дирихле». Предложенная модель содержит предположение о возможности поместить открытый волновод в объемлющий полый закрытый волновод, границы которого удалены от реальных границ волноводного слоя и поставить корректную математическую задачу. В этом случае поведение направляемых и излучательных мод открытого волновода будет адекватно описываться в рамках предложенной приближенной модели, что подтверждается численными экспериментами, приведёнными в [5] и настоящей работе.

В рамках модели «ящика Дирихле» будем проводить расчёт стыка открытых планарных волноводов, который подробно исследовался в работе В. В. Шевченко [7]. Рассмотрим аналогичную структуру, помещённую в ящик, и применим для расчёта предложенный в настоящей работе метод. В работе [7] рассматривается стык волноводов одинаковой толщины с различными диэлектрическими проницаемостями: из левого планарного волновода с  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\mu_0 = 1$  толщины  $d$  падает первая направляемая мода на правый планарный волновод  $\varepsilon_1 = s \cdot \varepsilon_0$ ,  $\mu_1 = 1$  такой же толщины, причём длина волны связана с толщиной соотношением  $d/\lambda = 0,4$ . Покровная среда для обоих волноводов — воздух  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . В рамках модели «ящика Дирихле» единичной ширины и высоты толщина волноводного слоя была принята  $d = 0,01$ , чтобы

высота «ящика» была много больше толщины волноводного слоя. Ниже приведён график зависимости коэффициента прохождения направляемой моды в зависимости от безразмерного параметра  $s = \varepsilon_1/\varepsilon_0$  при  $N = 7$  (рис. 6 (b)).

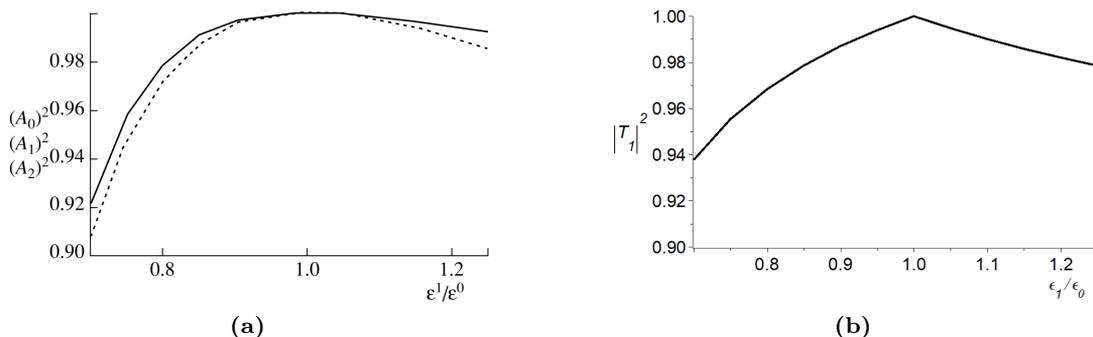


Рис. 6. Коэффициент прохождения первой моды через стык при  $N = 7$

Приведённая на графике зависимость демонстрирует качественную согласованность с результатами работы В. В. Шевченко [7] (рис. 6 (a)). Численные значения также имеют одинаковый порядок, что говорит об адекватности предложенного метода, в том числе для исследования открытых волноводов, помещённых в «ящик Дирихле».

## 9. Заключение

Рассмотренные численные примеры показывают, что предложенная в первой части статьи схема сведения системы уравнений Максвелла в волноводе к системе двух связанных уравнений Гельмгольца, записанных в «гамильтоновой форме», приводит в рамках неполного метода Галёркина к очень удобной для численно-аналитического анализа системе обыкновенных дифференциальных уравнений. За рамками статьи осталось обсуждение возможностей, которые открывает указанный в статье произвол в выборе и упорядочении базиса. Можно полагать, что этот подход позволит создать простые в использовании для прикладных исследований комплексы программ для исследования волноводного распространения электромагнитных волн.

## Литература

1. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010. — 197 с.
3. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2018. — Vol. 32, issue 7. — Pp. 886–898. — DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
4. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.

5. Моделирование распространения поляризованного света в тонкопленочной волноводной линзе / Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 56–68. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68.
6. Диваков Д. В. Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе: автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Российский университет дружбы народов, Москва. — 2017.
7. Иванов А. А., Шевченко В. В. Плоскопоперечный стык двух планарных волноводов // Радиотехника и электроника. — 2009. — Т. 54, № 1. — С. 68–77.
8. Свешников А. Г. Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236, № 5. — С. 1076–1079.
9. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е. Векторная модель волновода с входящими ребрами // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). — 2012. — № 2.
10. Bronstein M. Symbolic Integration I. — Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. — 303 p.
11. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — Москва: АН СССР, 1961. — 216 с.
12. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — Москва: Наука, 1969. — 191 с.

UDC 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139

## On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling

A. A. Tyutyunnik

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The paper investigates waveguides of constant cross-section with ideally conducting walls and arbitrary filling. The problem of finding the normal modes of a waveguide in a full vector formulation has been set and discretized. In the framework of numerical experiments, the guiding and evanescent modes of the waveguide are calculated for several variants of the fillings. The problem of diffraction of the normal waveguide mode incident on the joint of two waveguides, the cross-sections of which coincide, and the filling at the junction varies abruptly, is set and discretized. The results of numerical experiments for specific configurations of waveguide joints are presented, and the transmission and reflection coefficients of the guided modes are calculated.

The solution of the Maxwell equations system is based on the decomposition of fields with the help of four potentials, and in the present work a symbolic-numerical method is realized that uses this approach. The numerical experiments presented in this paper show that the proposed approach and the method on its basis allow the effective calculation of various characteristics of waveguide systems. The adequacy of the approach used is also evidenced by comparing the results obtained with the results of V.V. Shevchenko for the diffraction problem at the junction of two open waveguides

The symbolic-numerical method used in the work is implemented in the computer algebra system Maple, in particular, the calculations of matrix elements in the framework of the incomplete Galerkin method are carried out in symbolic form to accelerate further calculations using numerical methods.

**Key words and phrases:** waveguide, Maxwell's equations, normal modes, partial radiation conditions, incomplete Galerkin method, Kantorovich method, Sage, Sagemath

## References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, *Mathematical Problems of the Theory of Diffraction*, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
3. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 32 (7) (2018) 886–898.
4. M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (1) (2018) 39–48, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.
5. D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (1) (2017) 56–68, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68.
6. D. V. Divakov, Numerical Solution of Waveguide Propagation Problem of Polarized Light in an Integrated Optical Waveguide, abstract of PhD thesis. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow. in Russian (2017).
7. A. A. Ivanov, V. V. Shevchenko, A Planar Transversal Junction of Two Planar Waveguides, *Journal of Communications Technology and Electronics* 54 (1) (2009) 63–72.
8. A. G. Sveshnikov, Incomplete Galerkin Method, *DAN USSR* 236 (5) (1977) 1076–1079, in Russian.
9. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky, Vector Waveguide Model with Incoming Edges, *Zhurnal radioelektroniki (electronic journal)* (2), in Russian.
10. M. Bronstein, *Symbolic Integration I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1997.
11. B. Z. Katzenelenbaum, *The Theory of Irregular Waveguides with Slowly Varying Parameters*, AN USSR, Moscow, 1961, in Russian.
12. V. V. Shevchenko, *Smooth Transitions in Open Waveguides*, Nauka, Moscow, 1969, in Russian.

© Тютюнник А. А., 2018

### Для цитирования:

*Тютюнник А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129–139. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139.*

### For citation:

Tyutyunnik A. A. On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (2) (2018) 129–139. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139. In Russian.

### Сведения об авторах:

**Тютюнник Анастасия Александровна** — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, тел.: +7 (495)9522572)

### Information about the authors:

**Tyutyunnik A. A.** — assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, phone: +7 (495)9522572)