НЕПОЛНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНО-НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Диваков Д.В.

ФГБОУ ВПО РУДН, dmitriy.divakov@gmail.com

Работа посвящена решению волноводной задачи в случае плоского двумерного локально-нерегулярного волновода неполным методом Галеркина.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, неполный метод Галеркина.

Введение

Нерегулярные волноводы – основа для современных датчиков моментального химического анализа, что делает моделирование распространения собственных мод в таких структурах актуальной научно-практической задачей. В работе рассматривается задача распространения собственных мод внутри локально-нерегулярного оптического волновода, состоящего из диэлектрических материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерный волновод с локальной нерегулярностью.

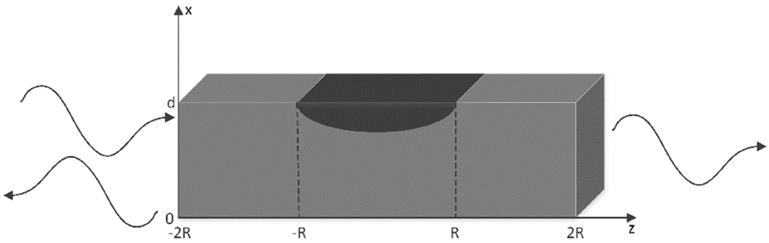

Рис. 1. Двумерный локально-нерегулярный волновод

В регулярных участках волновода поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца с постоянным коэффициентом, а в нерегулярной области – уравнению Гельмгольца с переменным коэффициентом. На первом этапе изучения будем рассматривать закрытый волновод, то есть поле на границах $x=0$ и $x=d$ равно нулю тождественно. На границах $z=-R$ и $z=R$ поля в регулярных областях и в нерегулярном участке приравниваются, а так же приравниваются их первые производные.

Однако, для дальнейшего численного решения задачи удобнее записать на границах $z=-R$ и $z=R$ эквивалентные условия третьего рода – парциальные условия излучения, предложенные Свешниковым.

Как итог, краевая задача для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом будет рассматриваться в ограниченной области $[0,d]\times[-R,R]$.

Приближенное решение поставленной краевой задачи будем искать в виде конечной суммы ряда по собственным функциям $\varphi_n(x)$ поперечного сечения волновода, удовлетворяющим при этом однородным краевым условиям при $x=0$ и $x=d$:

$$u^N(x,z)=\sum_{n=1}^{N}u_n(z)\varphi_n(x) \qquad (1)$$

Коэффициенты частичной суммы ряда $u_n(z)$ являются неизвестными функциями, которые и подлежат дальнейшему отысканию.

Подставляя приближенное решение (1) в уравнение Гельмгольца и применяя проекционные соотношения метода Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $u_n(z)$ с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2}{dz^2}\vec{u} + \left[\mathbf{Q}(z) - \mathbf{\Lambda}\right]\vec{u} = \vec{0} \tag{2}$$

С учетом вида приближенного решения (1) парциальные условия излучения редуцируются к следующему виду:

$$\left.\left(\frac{d}{dz}\vec{u} + i\mathbf{\Gamma}\vec{u}\right)\right|_{z=-R} = \vec{b} \tag{3}$$

$$\left.\left(\frac{d}{dz}\vec{u} - i\mathbf{\Gamma}\vec{u}\right)\right|_{z=R} = \vec{0} \tag{4}$$

Постановка разностной задачи

Аппроксимируем дифференциальные операторы в (2), (3) и (4) их разностными аналогами на равномерной сетке с шагом $h = 2R / M$ и общим количеством узлов M, обозначая $\vec{u}(z_j) = \vec{u}_j$ [1]. Тогда задача (2), (3), (4) редуцируется к системе линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей:

$$\vec{u}_1 - \mathbf{B}_0\vec{u}_0 = h\vec{b} \tag{5}$$

$$\vec{u}_{j+1} - \mathbf{B}_j\vec{u}_j + \vec{u}_{j-1} = 0, \quad j = \overline{1, M-1} \tag{6}$$

$$-\mathbf{B}_0\vec{u}_M + \vec{u}_{M-1} = 0 \tag{7}$$

Устойчивость метода решения

Наиболее распространенные методы решения системы (5), (6), (7) – это метод матричной прогонки, метод блочного LU-разложения, метод направленной ортогонализации и метод LU-разложения, адаптированный к разреженной матрице.

Наиболее экономичным из перечисленных является метод матричной прогонки, устойчивость которого не была подробно изучена для класса волноводных задач. Поэтому, вопросу устойчивости этого метода было уделено особое внимание. Для его устойчивости достаточно выполнения следующих условий [2]:

$$\left\|\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}_j\right)^{-1}\right\| \le 1 \tag{8}$$

$$\left\|\mathbf{B}_0^{-1}\right\| < 1 \tag{9}$$

Опираясь на результаты из [3] и [4] был получен следующий результат: для выполнения условий (8) и (9) необходимо, чтобы рассматривался не резонансный случай, и выполнялось условие:

$$4\varepsilon\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2 \le 1 \tag{10}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость, λ_0 – длина волны, d – толщина волновода.

В рассматриваемых задачах $\varepsilon > 1$, а толщина d является величиной одного порядка с длиной волны λ_0.

Таким образом, заявленный достаточный критерий устойчивости метода матричной прогонки выполняться не будет.

Выводы

В работе рассмотрена редукция волноводной задачи для двухмерного локально-нерегулярного волновода неполным методом Галеркина к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Далее полученная краевая задача аппроксимировалась конечными разностями, в результате чего мы перешли к системе линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей, наиболее просто решаемой методом матричной прогонки, устойчивость которого и проверялась.

По результатам проделанной работы можно сказать лишь о том, что заявленный достаточный критерий устойчивости метода матричной прогонки не выполняется для поставленной задачи, поэтому про устойчивость метода сказать ничего определенного нельзя.

Кроме того, проверенный критерий также является и критерием блочного диагонального преобладания (аналог диагонального преобладания для блочных матриц) и его невыполнение ставит под сомнение также и применимость метода блочного LU-разложения для блочно-трехдиагональной матрицы полученной системы.

Следующим этапом изучения, поэтому, будет проверка применимости методов направленной ортогонализации и адаптированного к блочно-трехдиагональной матрице метода LU-разложения для решения волноводной задачи.

Автор выражает благодарность Малых М.Д., Севастьянову Л.А. за содействие в работе и обсуждение результатов.

Литература

1. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552 с.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб.пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1973. – 280 с.
4. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

REDUCED GALERKIN'S METHOD FOR SIMULATION OF LOCALLY-IRREGULAR OPTICAL WAVEGUIDING SYSTEMS

Divakov D.V.
PFUR, dmitriy.divakov@gmail.com

The work is dedicated to the solving of waveguiding problem for plane two-dimensional locally irregular waveguide using reduced Galerkin's method.

Key words: irregular waveguide, reduced Galerkin's method.