Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 599–620
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620
EDN: YQAARE

ЭТА-ИНВАРИАНТ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В работе исследуется эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром и его основные свойства. Используя подход Мельроуза, мы определяем эта-инвариант как регуляризацию числа вращения семейства. При этом регуляризация следа включает получение асимптотики следа композиций обратимых краевых задач с параметром при больших значениях параметра. Получение асимптотики использует аппарат псевдодифференциальных краевых задач и опирается на сведение краевых задач с параметром к краевым задачам без параметра.

Ключевые слова: эта-инвариант, эллиптическая краевая задача с параметром, псевдодифференциальная краевая задача, оператор Буте де Монвеля, регуляризованный след.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарны В. Е. Назайкинскому за полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России» и РФФИ, проект № 21-51-12006.

Для цитирования: *К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 599–620. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620

Введение

Впервые η-инвариант появился в цикле работ Атьи, Патоди и Зингера [10–12] и выражал вклад границы в формулу индекса для оператора Дирака на многообразии с краем. Также в цитируемой серии работ было введено понятие η-инварианта эллиптических самосопряжённых псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии как регуляризации типа дзета-функции сигнатуры квадратичной формы, отвечающей оператору. η-Инвариант по определению является спектральным инвариантом и появляется во многих формулах индекса, а также имеет приложения в геометрии и анализе (см., напр., [15, 16, 27]).

Позднее Мельроуз [24] предложил использовать иной подход к построению η-инварианта. А именно, используя методы теории эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) с параметром (см. [2, 8]), Мельроуз определил η-инвариант как регуляризацию числа вращения и показал, что построенный η-инвариант в случае операторов первого порядка с параметром совпадает с η-инвариантом Атьи—Патоди—Зингера для некоторого обратимого самосопряжённого оператора (см. также [22, 23]). Более точно, число вращения обратимого эллиптического ПДО с параметром $D(p)$, $p \in \mathbb{R}$, формально вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(D(p)^{-1}\frac{dD(p)}{dp}\right) dp,$$

где след существует только для операторов сильно отрицательного порядка, а интеграл может расходиться. Поэтому построение соответствующих регуляризаций играет ключевую роль при исследовании η-инварианта.

В дальнейшем η-инвариант использовался в формулах индекса на многообразиях с цилиндрическими концами и/или коническими точками (см. [17, 28]), на многообразиях с периодическими концами [26], также были определены η-формы [25]. Обобщение η-инварианта на случай некоторых классов нелокальных операторов и приложение к проблеме индекса были исследованы в недавних работах авторов [4, 30, 33]. Особый интерес в рамках текущего исследования представляет η-инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера краевых задач, построенный в работе [18] (см. также [14, 21] в случае краевых задач для операторов Дирака).

Цель данной работы — рассмотреть η-инвариант Мельроуза для краевых задач с параметром [2] и исследовать его свойства. При этом регуляризация следа подразумевает получение асимптотики на бесконечности следа композиций обратимых краевых задач с параметром — основной технический результат работы (см. теорему 2.1 ниже). Доказательство этого результата задействует аппарат краевых задач для ПДО [6, 13] (см. также [9, 19]) и состоит в сведении краевых задач для ПДО с параметром к краевым задачам для ПДО (без параметра) на цилиндре.

Предполагается, что построенный таким образом η-инвариант будет участвовать в формулах индекса на многообразиях с цилиндрическими концами и на областях с угловыми точками на границе (см. [5]). Также к исследованию η-инварианта краевых задач с параметром приводит проблема индекса некоторых нелокальных задач (см. [7]).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 напоминаются основные сведения из теории эллиптических краевых задач. Раздел 2 содержит формулировку основных результатов работы, доказательства которых приведены в разделе 7. В третьем разделе в качестве примеров приведены вычисления η-инварианта краевых задач для оператора второго порядка с параметром при различных краевых условиях. Раздел 6 посвящён сведению операторов Буте де Монвеля с параметром, построенных в разделе 4, к операторам Буте де Монвеля без параметра при помощи изоморфизма, построенного в разделе 5.

1. Эллиптические краевые задачи с параметром

Напомним понятие эллиптической краевой задачи с параметром из работы [2].

Краевые задачи с параметром. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем ∂M. Введём такие локальные координаты (x', x_n) в окрестности края, что многообразие локально определяется условием $M = \{x_n \geqslant 0\}$, а его край — условием $\partial M = \{x_n = 0\}$, т. е. x_n — определяющая функция края, а x' — координаты на крае. Двойственные координаты обозначаются (ξ', ξ_n). Семейство операторов вида

$$D(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} D_k p^k \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

где $D_k = D_k(x, -i\partial_x)$ — дифференциальные операторы на M порядка $\leqslant m-k$, будем называть *оператором с параметром порядка m на многообразии M*. Здесь и всюду далее используется обозначение $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определение 1.1. Оператор вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} D(p) \\ \\ i^* B(p) \end{pmatrix} \colon C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix}, \tag{1.1}$$

где $D(p)$ и $B(p)$ — семейства с параметром порядков m и b, соответственно, а $i^*\colon C^\infty(M,E) \to C^\infty(\partial M, E|_{\partial M})$ — оператор сужения сечений на край, индуцированный вложением $i\colon \partial M \hookrightarrow M$, будем называть *краевой задачей порядка* (m, b) *с параметром*. Здесь E и F — комплексные векторные расслоения на M, а G — комплексное векторное расслоение на ∂M.

В локальных координатах граничный оператор $i^*B(p)$ может быть записан в виде

$$C^\infty(M, E) \ni u \overset{i^*B(p)}{\longmapsto} \sum_{0\leqslant k\leqslant b} B_k(p)(-i\partial_{x_n})^k\Big|_{x_n=0} u \in C^\infty(\partial M, G),$$

где $B_j(p)$ — операторы с параметром порядка $\leqslant b-k$ на границе. Будем говорить, что краевая задача (1.1) имеет *тип* $d \in \mathbb{Z}$, если $B_k(p) = 0$ при всех $k \geqslant d$, т. е. тип равен максимальному порядку нормальной производной в краевых условиях плюс один. В частности, тип задачи Дирихле равен 1, а задачи Неймана — 2. Будем предполагать, что тип $d \leqslant \operatorname{ord} D(p)$.

Эллиптичность с параметром. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ через $H^s(M)$ обозначим пространство Соболева функций на M с нормой, обозначаемой $\|\cdot\|_s$. Введём семейство норм в $H^s(M)$, зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$:

$$|\!|\!| u |\!|\!|_s^2 = \|u\|_s^2 + |p|^{2s}\|u\|_0^2. \tag{1.2}$$

Аналогично определяются нормы с параметром в пространствах Соболева на границе. Известно, что краевая задача (1.1) определяет ограниченный оператор в пространствах Соболева

$$\mathcal{D}(p)\colon H^s(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M, F) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, G) \end{matrix} \tag{1.3}$$

при условии $s-d-1/2 > 0$, где d — тип граничного оператора. При этом нормы операторов (1.3), отвечающие нормам (1.2) в пространствах $H^s(M)$, ограничены равномерно по $p \in \mathbb{R}$.

Перейдём к условиям эллиптичности задачи (1.1). Гладкая функция

$$\sigma(D)(x, \xi, p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \sigma(D_k)(x, \xi)p^k \in C^\infty\big(T^*M \times \mathbb{R}, \operatorname{Hom}(E, F)\big),$$

где $\sigma(D_k)(x, \xi)$ — главные символы дифференциальных операторов D_k, называется *внутренним символом* краевой задачи с параметром. Фиксируем точку $(x', \xi') \in T^*\partial M$. Заморозим коэффициенты операторов $D(p)$ и $B(p)$ в точке x', отбросим младшие члены (т. е. в дифференциальных операторах D_k и B_k оставим только производные старших порядков $m-k$ и $b-k$, соответственно) и выполним преобразование Фурье по касательной переменной x'. Получим семейство краевых задач

$$\begin{cases} \sigma(D)\left(x', 0, \xi', -i\partial_{x_n}, p\right) u(x_n) = 0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant d-1} \sigma(B_k)(x', \xi', p)\left(-i\partial_{x_n}\right)^k u\Big|_{x_n=0} = g \end{cases} \tag{1.4}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_n \geqslant 0\}$.

Через $L_+(x', \xi', p) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, E_{x'})$ обозначим пространство решений первого уравнения задачи (1.4), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Говорят, что краевая задача с параметром (1.3) удовлетворяет *условию Шапиро—Лопатинского*, если задача (1.4) имеет единственное решение $u \in L_+(x', \xi', p)$ для любой правой части $g \in G_{x'}$.

Теорема 1.1 (Агранович, Вишик [2]). *Пусть для задачи* (1.3) *выполнены условия эллиптичности с параметром*:

1) *внутренний символ* $\sigma(D)(x, \xi, p)$ *обратим при всех* $(x, \xi, p) \in T^*M \setminus \{|\xi| + |p| = 0\}$;
2) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского.*

Тогда оператор (1.3) *фредгольмов при всех* $p \in \mathbb{R}$ *и обратим при всех достаточно больших* p. *При этом норма обратного оператора* $\mathcal{D}(p)^{-1}$, *отвечающая семействам норм* (1.2) *в пространствах Соболева, равномерно ограничена по* p, *т. е. выполнена оценка*

$$\big|\!\big|\!\big| \mathcal{D}(p)^{-1}(f, g) \big|\!\big|\!\big|_s \leqslant C_1 |\!|\!| f |\!|\!|_{s-m} + C_2 |\!|\!| g |\!|\!|_{s-b-1/2}, \quad \text{где} \quad s-(d-1) > \frac{1}{2},$$

а константы C_1 *и* C_2 *не зависят от* f, g *и* p.

2. Формулировка основных результатов

Алгебра задач с параметром. Фиксируем числа m_0, b_0 и d_0. Через $\Psi_p(M)$ обозначим алгебру операторов с параметром

$$\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G), \end{matrix}$$

мультипликативно порождённую композициями вида $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_0(p)^{-1}$, где множители — краевые задачи с параметром

$$\mathcal{D}_0(p),\mathcal{D}_1(p)\colon C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G), \end{matrix} \tag{2.1}$$

причём задача $\mathcal{D}_0(p)$ имеет порядки (m_0,b_0) и тип d_0 и является эллиптической и обратимой при всех $p\in\mathbb{R}$, а задача $\mathcal{D}_1(p)$ имеет порядки (m_1,b_1) и тип d_1, подчинённые неравенствам

$$m_1\leqslant m_0,\quad b_1\leqslant b_0,\quad d_1\leqslant d_0.$$

Из этого определения следует, что алгебра $\Psi_p(M)$ состоит из линейных комбинаций произведений вида

$$\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j\mathcal{D}_{0j}^{-1}, \tag{2.2}$$

где порядки и тип операторов с параметром $\mathcal{D}_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j\leqslant m_0,\quad b_j\leqslant b_0,\quad d_j\leqslant d_0\qquad \forall j\geqslant 1, \tag{2.3}$$

а задачи $\mathcal{D}_{0j}$ являются эллиптическими с параметром и имеют порядки (m_0,b_0) и тип d_0.

Теорема 2.1. *Пусть для произведения*

$$\mathcal{D}(p)=\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j(p)\mathcal{D}_{0j}(p)^{-1} \tag{2.4}$$

выполнены неравенства (2.3) *и неравенства*

$$m_1-m_0+k<-\dim M,\quad b_1-b_0+k<-\dim M+1,\quad \text{где}\quad k=\sum_{j=2}^N \max(m_j-m_0,b_j-b_0). \tag{2.5}$$

Тогда семейство $\mathcal{D}(p)$ состоит из ядерных операторов (*т. е. операторов, для которых существует след*) *и для следа семейства существует асимптотическое разложение при $p\to\pm\infty$ вида*

$$\operatorname{tr}\mathcal{D}(p)\sim p^\ell\sum_{j\leqslant 0} c_j^\pm p^j,\quad \text{где}\quad \ell=\max(m_1-m_0+k+\dim M, b_1-b_0+k+\dim M-1), \tag{2.6}$$

причём разложение можно дифференцировать по параметру любое число раз.

Регуляризованный след и η-инвариант. Следуя методу из работы [24], определим регуляризованный след на алгебре $\Psi_p(M)$. Введём пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(p)\in C^\infty(\mathbb{R})$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p)\sim\sum_{i\leqslant N} c_i^\pm p^i+\sum_{0\leqslant j\leqslant N} d_j^\pm p^j\ln|p|\quad \text{при } p\to\pm\infty,$$

где $N>0$ — некоторое целое число, а $c_j^\pm, d_j^\pm\in\mathbb{C}$. Причём это разложение можно дифференцировать произвольное число раз. Через $\mathcal{P}\subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство многочленов.

Рассмотрим семейство $\mathcal{D}\in\Psi_p(M)$. Оно является линейной комбинацией произведений вида (2.2). Для краткости будем считать, что

$$\mathcal{D}=\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j\mathcal{D}_{0j}^{-1}. \tag{2.7}$$

Это произведение, вообще говоря, не имеет следа, поскольку для него неравенства (2.5) могут быть не выполнены. Рассмотрим производную семейства (2.7) по параметру

$$\partial_p \mathcal{D}(p) = (\partial_p \mathcal{D}_1)\mathcal{D}_{01}^{-1}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_{02}^{-1}\ldots - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_{01}^{-1}(\partial_p\mathcal{D}_{01})\mathcal{D}_{01}^{-1}\mathcal{D}_2\ldots + \mathcal{D}_1\mathcal{D}_{01}^{-1}(\partial_p\mathcal{D}_2)\ldots$$

Порядок при дифференцировании будет падать, как минимум, на единицу. Отсюда и из теоремы 2.1 следует, что при

$$\ell \geqslant \max(m_1 - m_0 + k + \dim M + 1,\ b_1 - b_0 + k + \dim M) \tag{2.8}$$

семейство $\partial_p^\ell \mathcal{D}(p)$ будет иметь след. Теперь можно дать определение регуляризованного следа.

Определение 2.1. *Регуляризованным следом* будем называть функционал

$$\mathrm{TR}\colon \Psi_p(M) \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P},$$
$$(\mathrm{TR}\,\mathcal{D})(p) = \int_0^p \int_0^{q_{\ell-1}} \cdots \int_0^{q_1} \mathrm{tr}\big(\partial_q^\ell \mathcal{D}(q)\big)\, dq dq_1 \ldots dq_{\ell-1},$$

где ℓ определяется из (2.8).

Из теоремы 2.1 следует, что это определение корректно, т. е. регуляризованный след действительно попадает в пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, а выбор другого числа ℓ меняет регуляризованный след на многочлен. Так же, как в [24] (см. также [3]), доказывается, что регуляризованный след является следом, т. е. выполнено равенство

$$\mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p)\big) = \mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_2(p)\mathcal{D}_1(p)\big) \quad \forall\, \mathcal{D}_1(p), \mathcal{D}_2(p) \in \Psi_p(M). \tag{2.9}$$

Определим *регуляризованный интеграл*

$$\fint_{\mathbb{R}} \colon S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \fint_{\mathbb{R}} f(p)dp = c_0,$$

где c_0 — постоянный член в асимптотическом разложении интеграла

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j\leqslant N} c_j T^j + \sum_{0\leqslant j\leqslant N} d_j T^j \ln T \quad \text{при} \quad T \to +\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j, d_j \in \mathbb{C}$. Отметим, что регуляризованный интеграл нечётных функций равен нулю.

Дадим определение η-инварианта для краевой задачи. Пусть $\mathcal{D}(p)$ — задача с параметром вида (1.3), которая является эллиптической и обратимой при всех $p \in \mathbb{R}$. Для краткости введём следующее обозначение для композиции регуляризованных следа и интеграла:

$$\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \fint_{\mathbb{R}} \circ\, \mathrm{TR}\,.$$

Определение 2.2. *η-Инвариантом* задачи $\mathcal{D}(p)$ с параметром называется число

$$\eta\big(\mathcal{D}(p)\big) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}\big) \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

Установим некоторые свойства η-инварианта.

Теорема 2.2.

1) (*Логарифмическое свойство.*) *Рассмотрим обратимые эллиптические задачи с параметром*

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} D_0(p) \\ \\ i^*B_0(p) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{D}}(p) = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_0(p) \\ \\ i^*\widetilde{B}_0(p) \end{pmatrix} : C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

где $\operatorname{ord} D_0 = \operatorname{ord} \widetilde{D}_0$, $\operatorname{ord} B_0 = \operatorname{ord} \widetilde{B}_0$ *и* $\text{тип}\, B_0 = \text{тип}\, \widetilde{B}_0$. *Имеет место равенство*

$$\eta(\mathcal{D}) - \eta(\widetilde{\mathcal{D}}) = \eta(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}),$$

где η*-инвариант семейства* $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}$ *определяется формулой* (2.10).

2) (*Формальный след.*) *Отображение*

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Tr}}\colon \Psi_p(M) &\longrightarrow \qquad \mathbb{C}, \\ \mathcal{D}(p) \quad &\longmapsto \operatorname{Tr}\big(\partial_p \mathcal{D}(p)\big), \end{aligned}$$

называемое формальным следом, является следом на алгебре $\Psi_p(M)$, *т. е.* $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$ *для всех элементов* $A, B \in \Psi_p(M)$.

3) (*Вариация* η*-инварианта.*) *Пусть* $\mathcal{D}_t(p)$, $t \in [0,1]$, *есть гладкая гомотопия обратимых эллиптических задач с параметром. Тогда производная* η*-инварианта по параметру* t *равна*

$$\partial_t \eta(\mathcal{D}_t) = \frac{1}{2\pi i}\, \widetilde{\operatorname{Tr}}\big(\mathcal{D}_t^{-1}\partial_t \mathcal{D}_t\big).$$

Доказательство.

1) Пользуясь линейностью и циклическим свойством следа Tr, получаем

$$\begin{aligned} \eta\big(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\big) &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\operatorname{Tr}\big((\partial_p\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\big) - \operatorname{Tr}\big(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}(\partial_p\widetilde{\mathcal{D}})\mathcal{D}^{-1}\big)\Big) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\big((\partial_p\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\big) - \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\big((\partial_p\widetilde{\mathcal{D}})\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\big) = \eta(\mathcal{D}) - \eta(\widetilde{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

2) Очевидным образом следует из (2.9).

3) Доказательство аналогично случаю замкнутого многообразия [24, с. 554], см. также [3, предложение 7.2], и следует из циклического свойства следа Tr. □

Замечание 2.1. Формальный след может быть явно вычислен, см. теорему 7.1 ниже.

3. Примеры вычисления η-инварианта краевых задач

Пример 1. Краевые условия без параметра. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - p^2)u(x) = f(x), \\ u(0) = h_0, \quad u(1) = h_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ \\ B \end{pmatrix} : H^s[0,1] \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-2}[0,1] \\ \oplus \\ \mathbb{C}^2 \end{matrix},$$

где $A = \partial_x^2 - p^2$, $Bu(x) = \big(u(0), u(1)\big)$. Нетрудно показать, что оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям Шапиро—Лопатинского на обоих концах отрезка и является обратимым при всех $|p| \neq 0$. Имеем

$$\partial_p\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1} = (R, C), \quad \partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2pR & -2pC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь Rf — решение задачи (3.1) с однородными краевыми условиями, а Ch — решение задачи при $f = 0$ и $h = (h_0, h_1)$.

Общее решение уравнения $Au = f$ имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{p}\int_0^x \operatorname{sh} p(x-y) f(y)\,dy + C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}. \tag{3.2}$$

Из однородных граничных условий получаем

$$u(1) = \frac{1}{p}\int_0^1 \operatorname{sh} p(1-y) f(y)\,dy + 2C_1 \operatorname{sh} p = 0, \quad C_2 = -C_1.$$

Таким образом,

$$Rf(x) = \frac{1}{p}\int_0^x \operatorname{sh} p(x-y) f(y)\,dy - \frac{\operatorname{sh} px}{p \operatorname{sh} p}\int_0^1 \operatorname{sh} p(1-y) f(y)\,dy.$$

Ядро Шварца оператора $-2pR$ равно

$$K(x,y) = 2\operatorname{sh} p(y-x)\chi(y-x) + \frac{2}{\operatorname{sh} p}\operatorname{sh} px \operatorname{sh} p(1-y), \quad \text{где } \chi(y-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } y-x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при } y-x > 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{tr}\big(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\big) = \operatorname{tr}(-2pR) = \int_0^1 K(x,y)\Big|_{y=x} dx = \frac{1}{\operatorname{sh} p}\int_0^1 \big(\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} p(2x-1)\big)dx =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} p}\left(\operatorname{ch} p \cdot x - \frac{1}{2p}\operatorname{sh} p(2x-1)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\operatorname{sh} p}\left(\operatorname{ch} p - \frac{1}{p}\operatorname{sh} p\right) = \operatorname{cth} p - \frac{1}{p}. \quad (3.3)$$

Поскольку найденный след есть нечетная функция, то из свойств следа и регуляризованного интеграла следует, что

$$\eta(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\big(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\big)dp = 0.$$

Пример 2. Краевые условия нулевого порядка с параметром. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - p^2)u(x) = f(x), \\ (p+i)u(0) = h_0, \quad u(1) = h_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ \\ B \end{pmatrix} : H^s[0,1] \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-2}[0,1] \\ \oplus \\ \mathbb{C}^2 \end{matrix},$$

где $A = \partial_x^2 - p^2$, $Bu(x) = \big((p+i)u(0), u(1)\big)$.

Аналогично примеру 1 находим

$$\partial_p \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2p \\ i_0^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1} = (R, C), \quad \partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2pR & -2pC \\ i_0^* R & i_0^* C \end{pmatrix},$$

где $i_0^* u(x) = (u(0), 0)$, Ch — решение задачи (3.4) при $f = 0$ и $h = (h_0, h_1)$, а оператор R такой же, как в (3). Из определения оператора C имеем

$$i_0^* Ch = \frac{h_0}{p+i}. \quad (3.5)$$

Далее, получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = -2p \operatorname{tr} R + \operatorname{tr}(i_0^* C).$$

Выражение $-2p \operatorname{tr} R$ вычислено в (3.3). Наконец, из (3.3) и (3.5) получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = \operatorname{cth} p - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+i}.$$

Таким образом,

$$\eta(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i}\fint_{\mathbb{R}} \frac{1}{p+i}dp = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \ln\left(\frac{T+i}{-T+i}\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\big(\arg(T+i) - \arg(-T+i)\big) = -\frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

Пример 3. Краевые условия первого порядка с параметром. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}(\partial_x^2-p^2)u(x)=f(x),\\ (p+i)u'(0)=h_0, \quad u(1)=h_1.\end{cases} \tag{3.7}$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A\\ \\ B\end{pmatrix}: H^s[0,1]\longrightarrow \begin{matrix}H^{s-2}[0,1]\\ \oplus\\ \mathbb{C}^2\end{matrix}, \quad \text{где} \quad A=\partial_x^2-p^2, \quad Bu(x)=\big((p+i)u'(0),u(1)\big).$$

Аналогично предыдущему примеру находим

$$\partial_p\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-2p\\ i_0^*\partial_x\end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1}=(R,C), \quad \partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2pR & -2pC\\ i_0^*\partial_xR & i_0^*\partial_xC\end{pmatrix},$$

где $i_0^*u(x)=(u(0),0)$, Rf — решение задачи (3.7) с однородными краевыми условиями, а Ch — решение задачи (3.7) при $f=0$, $h=(h_0,h_1)$. Отсюда получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})=-2p\operatorname{tr}R+\operatorname{tr}(i_0^*\partial_xC). \tag{3.8}$$

Из (3.2) имеем

$$Rf(x)=\frac{1}{p}\int\limits_0^x \operatorname{sh}p(x-y)f(y)dy-\frac{\operatorname{ch}px}{p\operatorname{ch}p}\int\limits_0^1 \operatorname{sh}p(1-y)f(y)dy. \tag{3.9}$$

Из определения оператора C имеем

$$i_0^*\partial_xCh=\frac{h_0}{p+i}. \tag{3.10}$$

Наконец, подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8), имеем

$$\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})=\frac{2}{\operatorname{ch}p}\int\limits_0^1 \operatorname{ch}px\operatorname{sh}p(1-x)dx+\frac{1}{p+i}=\operatorname{th}p+\frac{1}{p+i}.$$

Поскольку $\operatorname{th}p$ — нечетная функция, то аналогично (3.6) получаем

$$\eta(\mathcal{A})=\frac{1}{2\pi i}\fint\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})dp=-\frac{1}{2}.$$

4. Определение операторов Буте де Монвеля с параметром

В этом разделе определяется класс операторов Буте де Монвеля (см. [6, 13, 31]), зависящих от параметра $p\in\mathbb{R}$. Рассматриваемый класс является более узким, чем классы из [19]. Мы используем схему определения псевдодифференциальных краевых задач из монографии [6].

Сглаживающие операторы с параметром. Рассмотрим следующие операторы с параметром на многообразии M:

- сглаживающий кограничный оператор $C\colon C^\infty(\partial M)\to C^\infty(M)$:

$$(Cu)(x)=\int\limits_{\partial M}c(x,y',p)u(y')dy', \quad \text{где} \quad u\in C^\infty(\partial M),\ c\in C^\infty\big(M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big); \tag{4.1}$$

- сглаживающий граничный оператор типа d, $B\colon C^\infty(M)\to C^\infty(\partial M)$:

$$(Bu)(x')=\sum_{k=0}^{d-1}\int\limits_{\partial M}b_k(x',y',p)\partial_{x_n}^k u(y',0)dy'+\int\limits_M b(x',y,p)u(y)dy, \tag{4.2}$$

где $b_k\in C^\infty\big(\partial M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)$, $b\in C^\infty\big(\partial M\times M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)$;

- сглаживающий оператор Грина типа d, $G\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$:
$$(Gu)(x',x_n)=\sum_{k=0}^{d-1}C_k\partial_{x_n}^k u(x',0)+\int\limits_M g(x,y,p)u(y)dy, \tag{4.3}$$
где C_k — сглаживающие кограничные операторы (см. (4.1)), а $g\in C^\infty\big(M\times M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)$;
- сглаживающий оператор на границе, $D_X\colon C^\infty(\partial M)\to C^\infty(\partial M)$:
$$(D_Xu)(x')=\int\limits_{\partial M}d_X(x',y',p)u(y')dy',\quad \text{где}\quad d_X\in C^\infty\big(\partial M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big). \tag{4.4}$$

В этих формулах dy' и dy — гладкие меры на ∂M и M, соответственно. Тогда пространство $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ сглаживающих операторов с параметром по определению состоит из семейств операторов вида
$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}G & C\\ B & D_X\end{pmatrix}\colon \begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M)\end{matrix}\longrightarrow \begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M),\end{matrix}$$
где компоненты матрицы определяются формулами (4.1)–(4.4).

Непосредственно проверяется, что композиция сглаживающих операторов является сглаживающим оператором и имеет место соотношение
$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\in\Psi_p^{-\infty,d_2}(M),\quad \text{где}\quad \mathcal{D}_j\in\Psi_p^{-\infty,d_j}(M),\ j=1,2.$$

Внутренний символ с параметром. Рассмотрим пространство $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}=\mathbb{R}_{x'}^{n-1}\times\overline{\mathbb{R}}_{+,x_n}\times\mathbb{R}_t$. Его кокасательное расслоение равно $T^*\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}=\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}_{\xi',\xi_n,p}$. *Внутренним символом с параметром* будем называть функцию
$$a_{\rm int}=a_{\rm int}(x,\xi,p)\in C^\infty(T^*\overline{\mathbb{R}}_+^n\times\mathbb{R})$$
— классический символ, удовлетворяющий свойству трансмиссии, т. е. для него выполняются условия:

1) его порядок m является целым числом;
2) он имеет асимптотическое разложение
$$a_{\rm int}\sim a_{{\rm int},m}+a_{{\rm int},m-1}+\dots, \tag{4.5}$$
где компоненты $a_{{\rm int},j}$ являются однородными степени j по переменным (ξ,p) и удовлетворяют соотношениям (условия симметрии)
$$\partial_{x_n}^\alpha\partial_{\xi',p}^\beta a_{{\rm int},j}(x',0,0,1,0)=(-1)^{j+|\beta|}\partial_{x_n}^\alpha\partial_{\xi',p}^\beta a_{{\rm int},j}(x',0,0,-1,0).$$

Компоненту старшей степени в разложении (4.5) будем называть *внутренним главным символом с параметром.*

Граничный символ с параметром. Введем линейные пространства $H_+\overset{\rm def}{=}\mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ и $H_-\overset{\rm def}{=}\mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-))$ Фурье-образов пространств Шварца на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\overline{\mathbb{R}}_-$, соответственно. Эти пространства являются пространствами Фреше (топология переносится с пространств Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_\pm)$). Определим проектор $\Pi_+\colon H_+\oplus H_-\to H_+$ на первое слагаемое и непрерывный функционал
$$\begin{array}{rccc}\Pi'_{\xi_n}\colon & H_+\oplus H_- & \longrightarrow & \mathbb{C},\\ & u(\xi_n) & \longmapsto & \lim\limits_{x_n\to0+}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n}u(\xi_n).\end{array}$$

Наконец, определим пространства $H'=\mathbb{C}[\xi_n]$ — пространство многочленов, $H=H_+\oplus H_-\oplus H'$, $H_m=H_+\oplus H_-\oplus\left\{\sum\limits_{j=0}^{m-1}c_j\xi_n^j\right\}$, а сумму пространства H_- и пространства многочленов степени $\leqslant d-1$ обозначим через H_-^d.

Граничным символом a_∂ с параметром в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_n\geqslant0\}$ будем называть граничный символ (т. е. граничный символ без параметра в смысле [2, § 2.2.5.2]) в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n \geqslant 0\}$, который не зависит от переменной t. А именно, граничный символ a_∂ является оператор-функцией $a_\partial = a_\partial(x',\xi',p)$, $(x',\xi',p) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$,

$$a_\partial(x',\xi',p)\colon \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}\end{matrix}, \quad a_\partial(x',\xi',p) = \begin{pmatrix} \Pi_+ a(\xi_n) + \Pi'_{\eta_n} g(\xi_n,\eta_n) & c(\xi_n) \\ \Pi'_{\xi_n} b(\xi_n) & d_X \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

и действует по формуле

$$a_\partial(x',\xi',p)\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_+\bigl(a(x',\xi',\xi_n,p)u(\xi_n)\bigr) + \Pi'_{\eta_n}\bigl(g(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p)u(\eta_n)\bigr) + c(x',\xi',\xi_n,p)v \\ \Pi'_{\xi_n}\bigl(b(x',\xi',\xi_n,p)u(\xi_n)\bigr) + d_X(x',\xi',p)v \end{pmatrix}.$$

В этих формулах функции a,b,c,d_X и g принадлежат пространствам

$$\begin{gathered} a \in C^\infty\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_{m+1}\bigr), \quad c \in C^\infty\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+\bigr), \quad d_X \in C^\infty\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\bigr), \\ b \in C^\infty\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H^d_-\bigr), \quad g \in C^\infty\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+\otimes H^d_-\bigr) \end{gathered} \tag{4.7}$$

и являются классическими символами целых порядков m, $m-1$, m, m и $m-1$, соответственно. Будем предполагать, что функции a,b,c,g и d_X обращаются в нуль при $|x'|>R$ для некоторого R.

Напомним, что функции b,c и g в (4.7) называются *классическими* порядка m, если выполнены следующие условия:

1) для $\langle\xi',p\rangle = \bigl(1+\xi'^2+p^2\bigr)^{1/2}$ функции
$$\begin{aligned} b_{[0]} &= b(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,p) \in S^m(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H^d_-), \\ c_{[0]} &= c(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,p) \in S^{m-1}(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+), \\ g_{[0]} &= g(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,\langle\xi',p\rangle\eta_n,p) \in S^{m-1}(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+\otimes H^d_-) \end{aligned} \tag{4.8}$$
суть символы со значениями в пространствах Фреше H^d_-, H_+ и $H_+\otimes H^d_-$, соответственно;
2) имеют место асимптотические разложения
$$b \sim \sum_{j\leqslant m}\widehat{b}_j, \quad c \sim \sum_{j\leqslant m-1}\widehat{c}_j, \quad g \sim \sum_{j\leqslant m-1}\widehat{g}_j, \tag{4.9}$$
где компоненты $\widehat{b}_j$, $\widehat{c}_j$ и $\widehat{g}_j$ разложений являются произведениями однородных функций степени j:
$$\begin{aligned} b_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda p) &= \lambda^j b_j(x',\xi',\xi_n,p), \\ c_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda p) &= \lambda^j c_j(x',\xi',\xi_n,p), \qquad \forall\,\lambda>0,\ |\xi'|^2+p^2>0, \\ g_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda\eta_n,\lambda p) &= \lambda^j b_j(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p), \end{aligned}$$
на срезающую функцию $\chi\bigl(|\xi'|^2+p^2\bigr)$, где $\chi(\tau)=0$ при $\tau<\varepsilon$ и $\chi(\tau)=1$ при $\tau>2\varepsilon$;
3) разложения (4.9) являются асимптотическими в следующем смысле: для любого N разности
$$\widetilde{b}_N = b - \sum_{j>-N}^{m}\widehat{b}_j, \quad \widetilde{c}_N = c - \sum_{j>-N}^{m-1}\widehat{c}_j, \quad \widetilde{g}_N = g - \sum_{j>-N}^{m-1}\widehat{g}_j$$
удовлетворяют соотношениям
$$\begin{aligned} &\widetilde{b}_{N[0]} \in S^{-N}\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H^d_-\bigr), \\ &\widetilde{c}_{N[0]} \in S^{-N}\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+\bigr), \\ &\widetilde{g}_{N[0]} \in S^{-N}\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, H_+\otimes H^d_-\bigr) \end{aligned}$$
(здесь используются обозначения из формулы (4.8)).

Граничный символ (4.6), в котором функции a,g,c,b и d_X совпадают со старшими компонентами своих асимптотических разложений (см. (4.9), символ ПДО d_X имеет аналогичное разложение), называется *граничным главным символом с параметром*.

Операторы с параметром. Символу с параметром

$$a = (a_{\text{int}}, a_\partial)$$

сопоставим семейство операторов

$$\operatorname{Op}(a)\colon \begin{matrix} C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \oplus \\ C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \oplus \\ C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \end{matrix}$$

$$\operatorname{Op}(a)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\pi)^{-n} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}^n_+} e^{i(x-y)\xi} a_{\text{int}}(x,\xi,p)u(y)dyd\xi \\ 0 \end{pmatrix} + \tag{4.10}$$

$$+ (2\pi)^{-(n-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x'-y')\xi'} \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a_\partial(x',\xi') \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{x_n\to\eta_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_n) \\ v(y') \end{pmatrix} dy'd\xi'.$$

При помощи разбиения единицы, подчинённого покрытию многообразия M с краем ∂M координатными картами, стандартным образом строится пространство $\Psi_p^{m,d}(M)$ псевдодифференциальных операторов с параметром на M. При этом бесконечно сглаживающие семейства из $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ образуют подпространство в $\Psi_p^{m,d}(M)$.

Теорема 4.1.

1) *Композиция операторов определяет отображение*

$$\begin{matrix} \Psi_p^{m_1,d_1}(M) & \times & \Psi_p^{m_2,d_2}(M) & \longrightarrow & \Psi_p^{m,d}(M) \\ \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 & \longmapsto & \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2, \end{matrix}$$

где $m = m_1 + m_2$, $d = \max(d_2, d_1 + m_2)$. При этом главный символ композиции операторов равен композиции главных символов.

2) *Пусть оператор $\mathcal{D}(p) \in \Psi_p^{m,d}(M)$ является эллиптическим, т. е. его внутренний главный символ обратим при $|\xi|^2 + p^2 > 0$, и граничный главный символ обратим при $|\xi'|^2 + p^2 > 0$. Тогда $\mathcal{D}(p)$ фредгольмов при всех p и обратим при достаточно больших значениях $|p|$. При этом имеем*

$$\mathcal{D}(p)^{-1} \in \Psi_p^{-m,0}(M). \tag{4.11}$$

Доказательство теоремы 4.1 основано на сведении операторов с параметром на многообразии M к операторам (без параметра) на произведении $M \times \mathbb{S}^1$. Это сведение отвечает специальному изоморфизму пространств Соболева на этих многообразиях, который мы сейчас опишем.

5. Изоморфизм пространств Соболева на $M \times \mathbb{R}$ и на $M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Напомним [32, с. 375], что преобразование Фурье—Лапласа[1] задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z\colon\quad L^2(\mathbb{R}_t) &\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_t \times [0,2\pi]), \\ u(t) &\longmapsto (\mathcal{F}_z u)(t,\theta) = e^{i\theta t/2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta n} u(t + 2\pi n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\theta = -i\ln z \in [0, 2\pi]$, $|z| = 1$. Обратное преобразование Фурье—Лапласа задается формулой

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-it\theta/2\pi} (\mathcal{F}_z u)(t,\theta) d\theta.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{F}_z \circ \mathcal{F}^{-1}_{p\to t}\colon\quad L^2(\mathbb{R}_p) &\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_t \times [0,2\pi]), \\ u(p) &\longmapsto (\mathcal{L}u)(t,\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{it\theta/2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t+2\pi n)p} u(p) dp \end{aligned} \tag{5.2}$$

[1] В литературе встречаются различные названия этого преобразования, см. историческую справку в [20, с. 359]

композицию обратного преобразования Фурье

$$[\mathcal{F}^{-1}_{p\to t}u](t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{itp}u(p)dp$$

и преобразования Фурье—Лапласа (5.1). Пользуясь равенством

$$\sum_n e^{in(\theta+2\pi p)}=2\pi\sum_n\delta(\theta+2\pi(p-n)),$$

из (5.2) получаем явную формулу для преобразования $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}u)(t,\theta)=\sum_n e^{itn}u(-\theta/2\pi+n). \tag{5.3}$$

Обратное к преобразованию $\mathcal{L}$ задается формулой

$$u(p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^{2\pi}e^{-it(p+\theta/2\pi)}(\mathcal{L}u)(t,\theta)d\theta dt.$$

Через $\widetilde{H}^s(\mathbb{R})$ обозначим весовое L^2-пространство функций на прямой с нормой

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}|u(p)|^2(1+|p|)^{2s}dp.$$

Лемма 5.1. *Преобразование* (5.3) *осуществляет изоморфизм пространств*

$$\mathcal{L}\colon \widetilde{H}^s(\mathbb{R}_p)\longrightarrow H^s(\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi].$$

Доказательство. Для $u\in\widetilde{H}^s(\mathbb{R}_p)$ имеем

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}|u(p)|^2(1+|p|)^{2s}dp,\quad \|\mathcal{L}u\|^2_s=\int\limits_0^{2\pi}\sum_n\left|u\left(-\frac{\theta}{2\pi}+n\right)\right|^2(1+|n|)^{2s}d\theta,$$

где $\|\mathcal{L}u\|_s$ — норма в пространстве $H^s(\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi]$. Поскольку $1+|n|\sim 1+|-\theta/2\pi+n|$ равномерно по $n\in\mathbb{Z}$ и $\theta\in[0,2\pi]$, то получаем двустороннюю оценку

$$\|\mathcal{L}u\|_s\leqslant C\|u\|_{\widetilde{H}^s}\leqslant C'\|\mathcal{L}u\|_s,$$

где C и C' — некоторые константы. Из последней оценки следует, что отображение (5.3) — изоморфизм. □

Результаты этого раздела непосредственно переносятся на случай, когда функция u зависит от дополнительной переменной, пробегающей гладкое компактное многообразие M (возможно, с краем). В этом случае оператор $\mathcal{L}$ осуществляет изоморфизм пространств

$$\mathcal{L}\colon \widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)\longrightarrow H^s(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2(\mathbb{S}^1),$$

где $\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)=\mathcal{F}_{t\to p}H^s(M\times\mathbb{R}_t)$ — Фурье-образ пространства Соболева на бесконечном цилиндре, и норма в $\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)$ равна $\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}\||u(p)\||^2_s dp$.

6. Сведение операторов с параметром к операторам на цилиндре

Оператору с параметром $\mathcal{D}(p)\in\Psi^{m,d}_p(M)$ сопоставим ограниченный оператор, действующий в пространствах

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(p)\colon\begin{matrix}\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)\\ \oplus\\ \widetilde{H}^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{R}_p)\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\widetilde{H}^{s-m}(M\times\mathbb{R}_p)\\ \oplus\\ \widetilde{H}^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{R}_p).\end{matrix} \tag{6.1}$$

Используем преобразование $\mathcal{L}$ (см. (5.2)) и перейдём к изоморфному оператору

$$\widetilde{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{L}^{-1} \colon \begin{matrix} H^s(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \\ \oplus \\ H^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \\ \oplus \\ H^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi]. \end{matrix}$$

Из определения (5.2) преобразования $\mathcal{L}$ следует, что последний оператор представляет собой семейство операторов, обозначаемых $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$, действующих на произведении $M\times\mathbb{S}^1_t$:

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\theta) \colon \begin{matrix} H^s(M\times\mathbb{S}^1_t) \\ \oplus \\ H^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M\times\mathbb{S}^1_t) \\ \oplus \\ H^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t). \end{matrix} \tag{6.2}$$

Поскольку преобразование $\mathcal{L}$ является изоморфизмом (см. лемму 5.1), то оператор (6.1) обратим тогда и только тогда, когда семейство (6.2) обратимо при всех $\theta\in[0,2\pi]$. Ниже мы покажем, что операторы $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ являются операторами Буте де Монвеля на произведении $M\times\mathbb{S}^1$ при всех $\theta\in[0,2\pi]$ и опишем, какие операторы Буте де Монвеля при этом получаются.

Предложение 6.1. *Отображение*

$$\begin{aligned} \Psi^{m,d}_p(M) \quad &\longrightarrow \qquad C^\infty\big(\mathbb{R}_\theta,\Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\big), \\ \mathcal{D}(p) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{D}(\theta)=\mathcal{L}\mathcal{D}(p)\mathcal{L}^{-1}=\mathcal{D}\left(-i\partial_t-\frac{\theta}{2\pi}\right), \end{aligned} \tag{6.3}$$

(*сопоставляющее семейству $\mathcal{D}(p)$ ПДО с параметром $p\in\mathbb{R}$ на M ПДО на $M\times\mathbb{S}^1_t$, который гладко зависит от θ*) *корректно определено. При этом образ отображения* (6.3) *состоит из гладких семейств $\mathcal{A}(\theta)\in C^\infty\big(\mathbb{R}_\theta,\Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\big)$ ПДО на $M\times\mathbb{S}^1_t$, удовлетворяющих условиям:*

1) *оператор $\mathcal{A}(\theta)$ инвариантен относительно вращений*

$$(x,t)\mapsto(x,t+t') \qquad \forall\, t'\in\mathbb{R},\ (x,t)\in M\times\mathbb{S}^1;$$

2) *выполнено условие скрученной периодичности*

$$\mathcal{A}(\theta+2\pi)=e^{-it}A(\theta)e^{it};$$

3) *полный символ $\sigma\big(\mathcal{A}(\theta)\big)$ семейства $\mathcal{A}(\theta)$ удовлетворяет соотношению*

$$\sigma\big(\mathcal{A}(\theta)\big)(x,\xi,\tau)=\sigma\big(\mathcal{A}(0)\big)\left(x,\xi,\tau-\frac{\theta}{2\pi}\right)\sim\sum_{j\geqslant0}\frac{1}{j!}\left(\frac{-\theta}{2\pi}\right)^j\partial^j_\theta\sigma\big(\mathcal{A}(0)\big)(x,\xi,\tau). \tag{6.4}$$

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим сглаживающие операторы, т. е. случай, когда $m=-\infty$. Из определения отображения $\mathcal{L}$ следует равенство

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)=\mathcal{D}\left(-i\partial_t-\frac{\theta}{2\pi}\right)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{F}^{-1}_{k\to t}\mathcal{D}\left(k-\frac{\theta}{2\pi}\right)\mathcal{F}_{t\to k}, \tag{6.5}$$

где $\mathcal{F}_{t\to k}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{S}^1_t$ (т. е. переход от функции переменной t к её коэффициентам Фурье). Поскольку семейство $\mathcal{D}(p)$ быстро убывает при $p\to\infty$, то каждый оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ является сглаживающим, и эти операторы гладко зависят от θ. При этом из формулы (6.5) очевидно, что полученное семейство будет инвариантно относительно вращений и будет скрученно периодическим. Обратно, если семейство $A(\theta)\in C^\infty\big(\mathbb{R}_\theta,\Psi^{-\infty,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\big)$ состоит из сглаживающих операторов Буте де Монвеля на $M\times\mathbb{S}^1_t$, инвариантно относительно вращений и является скрученно-периодическим, то оно имеет вид (6.5) для некоторого сглаживающего семейства с параметром $\mathcal{D}(p)\in\Psi^{-\infty,d}_p(M)$. В самом деле, поскольку семейство $A(\theta)$ инвариантно относительно вращений, то оно имеет вид

$$A(\theta)u(t)=\mathcal{F}^{-1}_{k\to t}A(\theta,k)\mathcal{F}_{t\to k}u,$$

где семейство $A(\theta,k)\in\Psi^{-\infty,d}(M)$ гладко зависит от $\theta\in\mathbb{R}$ и быстро убывает при $k\to\infty$. При этом условие скрученной периодичности для всех θ и k имеет вид

$$A(\theta+2\pi,k)=A(\theta,k-1). \tag{6.6}$$

Теперь определим функцию $p \mapsto A(-2\pi p, 0) \in \Psi^{-\infty,d}(M)$. Из (6.6) следует равенство

$$A(-2\pi p, 0) = A\big((-2\pi\{p\}, [p]\big),$$

где $p = [p] + \{p\}$ — разложение на целую и дробную части числа p. Поэтому рассматриваемая функция быстро убывает при $p \to \infty$. Функции $A(-2\pi p, 0)$ отвечает оператор

$$\widetilde{A} = \mathcal{F}^{-1}_{k\to t} A\left(-2\pi(k - \theta/2\pi), 0\right) \mathcal{F}_{t\to k} = \mathcal{F}^{-1}_{k\to t} A(\theta, k)\mathcal{F}_{t\to k} = A(\theta).$$

Здесь второе равенство выполнено в силу скрученной периодичности.

Итак, мы показали, что семейство $A(\theta)$ лежит в образе отображения (6.3).

2. Докажем, что отображение (6.3) корректно определено, т. е. оператор $\widetilde{D}(\theta)$ является ПДО на произведении $M \times \mathbb{S}^1_t$, гладко зависящим от параметра θ. Это утверждение является обобщением известного результата о псевдодифференциальности операторов на окружности, определяемых при помощи рядов Фурье (см., напр., [1,29]). В силу доказанного п. 1 достаточно рассмотреть случай полупространства $M = \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы приведём доказательство для ПДО $\mathcal{D}(p) = A(p)$ со свойством трансмиссии

$$\big(A(p)u\big)(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-x')\xi} a(x,\xi,p) u(x') dx' d\xi.$$

Для остальных компонент оператора Буте де Монвеля доказательство аналогично, поэтому мы его опускаем.

С одной стороны, соответствующий оператор $\widetilde{A}(\theta)\colon C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t) \to C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t)$ равен

$$\big(\widetilde{A}(\theta)u\big)(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x,\xi,p - \frac{\theta}{2\pi}\right) u(x',t') dx' dt' d\xi dp.$$

Здесь мы рассматриваем функции на произведении $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t$ как функции на произведении $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}_t$, которые являются периодическими по переменной t с периодом 2π. Это определение даёт тот же оператор, что и применение формулы (6.5).

С другой стороны, по символу $a(x,\xi,p-\theta/2\pi)$ можно построить ПДО на цилиндре $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{S}^1_t$, пользуясь разбиением единицы на $\mathbb{S}^1_t$. А именно, рассмотрим

- покрытие $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{t = 0\}$ и $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{t = \pi\}$;
- функции $\rho_k \in C^\infty_c(U_k)$, $k = 1, 2,$ — разбиение единицы, подчинённое покрытию;
- функции $\chi_k \in C^\infty_c(U_k)$ со свойством $\chi_k(t) \equiv 1$ для всех t из малой окрестности носителя функции ρ_k;
- функции $\rho_{kj}, \chi_{kj} \in C^\infty_c(\mathbb{R}_t)$, где $\rho_{1j} = \rho_1(t)$ при $|t - (\pi + 2\pi j)| < \pi$, $\rho_{2j}(t) = \rho_2(t)$ при $|t - 2\pi j| < \pi$ и нулю иначе.

Определим оператор $\overline{A}(\theta)\colon C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t) \to C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t)$ по формуле

$$\big(\overline{A}(\theta)u\big)(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x,\xi,p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \chi_{kj}(t)\rho_{kj}(t') u(x',t') dx' dt' d\xi dp.$$

Покажем, что разность $\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)$ является гладким семейством сглаживающих операторов. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)\big)u = \\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x,\xi,p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t') u(x',t') dx' dt' d\xi dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} L^N\big(e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]}\big) a\left(x,\xi,p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t') u(x',t') dx' dt' d\xi dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} \left(L^N a\left(x,\xi,p - \frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t') u(x',t') dx' dt' d\xi dp.
\end{aligned}$$

Здесь число N достаточно велико, а $L = L^* = -i(t-t')^{-1}\partial_p$ — симметрический дифференциальный оператор первого порядка.

Поскольку оператор рассматривается в пространстве периодических функций, то его ядро Шварца равно

$$K(x,t,x',t') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j,\ell} \bigl(1-\chi_{kj}(t)\bigr)\rho_{kj}(t'+2\pi\ell) \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i[(x-y)\xi+(t-t'-2\pi\ell)p]} \left(L^N a\left(x,\xi,p-\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) d\xi dp.$$

Пусть $t,t' \in [0,2\pi]$. Тогда в последней сумме мы можем учитывать только слагаемые, для которых $|\ell - j| \leqslant 1$, поскольку остальные слагаемые равны нулю в силу свойств носителя функций ρ_{kj}. Ядро Шварца оценивается равномерно следующим образом:

$$|K(x,t,x',t')| \leqslant C \sum_{k,|\ell-j|\leqslant 1} \bigl(1-\chi_{kj}(t)\bigr)\rho_{kj}(t'+2\pi\ell)|t-t'-2\pi\ell|^{m-N} \leqslant C + C\sum_{|\ell|\geqslant 2} |\ell|^{m-N} < C,$$

где через C обозначаем произвольные константы. Здесь мы сначала воспользовались символьными оценками для символа $a(x,\xi,p)$, а затем воспользовались свойствами функций χ_{kj}. Аналогичным образом оцениваются производные ядра Шварца. Поскольку число N можно выбрать произвольно большим, отсюда следует искомая гладкость ядра Шварца оператора $\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)$.

Итак, мы установили, что оператор $\widetilde{A}(\theta)$ — ПДО на цилиндре с полным символом

$$\sigma_{\rm int}\bigl(\widetilde{A}(\theta)\bigr) = a\left(x,\xi,p-\frac{\theta}{2\pi}\right) \sim \sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!}\left(-\frac{\theta}{2\pi}\right)^j \partial_p^j a(x,\xi,p).$$

В частности, отсюда следует искомое равенство (6.4). Таким образом, мы доказали корректность определения отображения (6.3) и свойств 1)–3) в случае ПДО $A(p)$ в операторе Буте де Монвеля. Доказательство для остальных компонент проводится аналогично.

3. Осталось доказать, что образ отображения (6.3) состоит в точности из семейств, которые удовлетворяют условиям 1)–3). Пусть $A(\theta) \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\bigr)$ — гладкое семейство операторов на торе, удовлетворяющее свойствам 1)–3). Через $\sigma(A(\theta))$ обозначим полный символ этого семейства. В силу условий 1) и 3) этот полный символ равен $a(x,\xi,p-\theta/2\pi)$ для некоторого полного символа с параметром $a(x,\xi,p)$. Через $A_0(p) \in \Psi^{m,d}_p(M)$ обозначим какое-нибудь семейство с параметром с полным символом $a(x,\xi,p)$. Тогда разность операторов на торе $A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta)$ будет иметь нулевой полный символ, т. е. мы будем иметь $A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta) \in \Psi^{-\infty,d}(M\times\mathbb{S}^1)$. Поэтому последняя разность лежит в образе отображения (6.3) в силу доказанного выше п. 1. Следовательно, семейство $A(\theta) = (A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta)) + \widetilde{A}_0(\theta)$ также лежит в образе этого отображения (как сумма элементов из образа).

Предложение доказано. □

Вернёмся к доказательству теоремы 4.1.

Доказательство.

1. Рассмотрим операторы $\mathcal{D}_j \in \Psi^{m_j,d_j}_p(M)$, $j=1,2$, и их композицию $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$. Тогда имеем

$$\widetilde{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2} = \widetilde{\mathcal{D}}_1\widetilde{\mathcal{D}}_2.$$

Теперь $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ — гладкие семейства задач Буте де Монвеля на $M\times\mathbb{S}^1$, $\widetilde{\mathcal{D}}_j \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m_j,d_j}(M\times\mathbb{S}^1)\bigr)$. Поэтому в силу теоремы о композиции операторов Буте де Монвеля (см. [6,13]) имеем

$$\widetilde{\mathcal{D}}_1\widetilde{\mathcal{D}}_2 \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1)\bigr),$$

где показатели m и d такие же, как в теореме 4.1. При этом последняя композиция состоит из операторов, инвариантных относительно вращений и скрученно периодических, а их полные символы удовлетворяют соотношению (6.4). Следовательно, семейство $\widetilde{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2}$ является образом семейства операторов с параметром, т. е. мы получаем искомое соотношение $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p) \in \Psi^{m,d}_p(M)$. Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

2. Пусть $\mathcal{D}(p) \in \Psi^{m,d}_p(M)$ — эллиптическое семейство с параметром. Из доказанного п. 1 следует, что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ является эллиптическим. Отсюда и из результатов работы [6] следует,

что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ обратим с точностью до сглаживающих операторов. Следовательно, семейство $\mathcal{D}(p)$ обратимо с точностью до сглаживающего семейства, т. е. существует такое семейство $\mathcal{D}'(p) \in \Psi^{-m,0}(M)$, что выполнены равенства

$$\mathcal{D}(p)\mathcal{D}'(p) - 1 \in \Psi_p^{-\infty,0}(M) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(p)\mathcal{D}(p) - 1 \in \Psi_p^{-\infty,d}(M). \tag{6.7}$$

Поскольку семейства из $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ определяют операторы в пространствах Соболева с нормой, быстро стремящейся к нулю при $p \to \infty$, то из (6.7) следует обратимость семейства $\mathcal{D}(p)$ при больших значениях $|p|$ и соотношение (4.11). Второе утверждение теоремы 4.1 доказано. $\square$

7. Доказательства основных результатов

Докажем теорему 2.1. Заметим сначала, что композиция (2.4) является оператором Буте де Монвеля с параметром. В следующей лемме даются оценки порядков и типов его компонент.

Лемма 7.1. *Рассмотрим произведение вида* (2.2), *в котором множители* $\mathcal{D}_j$ *и* $\mathcal{D}_{0j}$ *являются псевдодифференциальными операторами-столбцами вида* (2.1), *порядки и типы которых связаны неравенствами* (2.3). *Тогда произведение* (2.2) *является оператором типа Буте де Монвеля*

$$\begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

где операторы B и G имеют тип, равный нулю, а порядки компонент оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord} A, \operatorname{ord} G &\leqslant m_1 - m_0 + k, & \operatorname{ord} D &\leqslant b_1 - b_0 + k, \\ \operatorname{ord} B &\leqslant b_1 - m_0 + k, & \operatorname{ord} C &\leqslant m_1 - b_0 + k, \end{aligned} \quad \text{где} \quad k = \sum_{j=2}^{N} \max(m_j - m_0, b_j - b_0). \tag{7.1}$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по числу множителей.

1. При $N = 1$ имеем

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 + G_1 & C_1 \\ B_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ord} A_1$, $\operatorname{ord} G_1 \leqslant m_1 - m_0$, $\operatorname{ord} C_1 \leqslant m_1 - b_0$, $\operatorname{ord} B_1 \leqslant b_1 - m_0$, $\operatorname{ord} D_1 \leqslant b_1 - b_0$ и тип равен нулю. Получаем, что оценки (7.1) верны.

2. Пусть для произведения $\prod\limits_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}$ справедливы оценки (7.1), т. е.

$$\prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1} = \begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

причём выполнены оценки порядков операторов

$$\begin{gathered} \operatorname{ord} A,\ \operatorname{ord} G \leqslant m_1 - m_0 + k_{N-1}, \quad \operatorname{ord} C \leqslant m_1 - b_0 + k_{N-1}, \\ \operatorname{ord} B \leqslant b_1 - m_0 + k_{N-1}, \quad \operatorname{ord} D \leqslant b_1 - b_0 + k_{N-1}, \\ k = k_{N-1} = \sum_{j=2}^{N-1} \max(m_j - m_0, b_j - b_0) \end{gathered}$$

и тип равен нулю. Получим аналогичные оценки для композиции

$$\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1} = \left(\prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}\right)\left(\mathcal{D}_N \mathcal{D}_{0N}^{-1}\right) = \begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N + G_N & C_N \\ B_N & D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' + G' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

где $\mathrm{ord} A_N$, $\mathrm{ord} G_N \leqslant m_N - m_0$, $\mathrm{ord} C_N \leqslant m_N - b_0$, $\mathrm{ord} B_N \leqslant b_N - m_0$, $\mathrm{ord} D_N \leqslant b_N - b_0$ и тип равен нулю. Тогда из (7.2) и (7.3) получаем оценки для порядков компонент A', G', B', C' и D':

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord} A', \operatorname{ord} G' &\leqslant \max(\operatorname{ord} A + \operatorname{ord} A_N, \operatorname{ord} C + \operatorname{ord} B_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(m_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - m_0, m_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - m_0) = \\
&= m_1 - m_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - m_0 + k_N; \\
\operatorname{ord} C' &\leqslant \max(\operatorname{ord} A + \operatorname{ord} C_N, \operatorname{ord} C + \operatorname{ord} D_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(m_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - b_0, m_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - b_0) = \\
&= m_1 - b_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - b_0 + k_N; \\
\operatorname{ord} B' &\leqslant \max(\operatorname{ord} B + \operatorname{ord} A_N, \operatorname{ord} D + \operatorname{ord} B_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(b_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - m_0, b_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - m_0) = \\
&= b_1 - m_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - b_0 + k_N; \\
\operatorname{ord} D' &\leqslant \max(\operatorname{ord} B + \operatorname{ord} C_N, \operatorname{ord} D + \operatorname{ord} D_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(b_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - b_0, b_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - b_0) = \\
&= b_1 - b_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = b_1 - b_0 + k_N.
\end{aligned}$$

При этом для типов получаем

$$\begin{aligned}
&\text{тип}\, G' \leqslant \max(\text{тип}\, G_N, \text{тип}\, G + \operatorname{ord} A_N, \text{тип}\, B_N) = \max(0, \operatorname{ord} A_N, 0) = 0, \quad \text{поскольку} \quad \operatorname{ord} A_N \leqslant 0; \\
&\text{тип}\, B' \leqslant \max(\text{тип}\, G_N, \text{тип}\, B + \operatorname{ord} A_N, \text{тип}\, B_N) = \max(0, \operatorname{ord} A_N, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Из леммы 7.1 следует, что композиция (2.4) является оператором Буте де Монвеля вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} A(p) + G(p) & C(p) \\ B(p) & D(p) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} A \in \Psi_p^{m_1 - m_0 + k}(M), G \in \Psi_p^{m_1 - m_0 + k, 0}(M), C \in \Psi_p^{m_1 - b_0 + k}(M), \\ B \in \Psi_p^{b_1 - m_0 + k, 0}(M), D \in \Psi_p^{b_1 - b_0 + k}(\partial M). \end{matrix} \tag{7.4}$$

Покажем, что из условий (2.5) и формулы (4.10) следует, что оператор $\mathcal{D}(p)$ имеет непрерывное ядро Шварца и, следовательно, имеет след. В самом деле, порядки псевдодифференциальных операторов A и D удовлетворяют неравенствам (в силу (2.5))

$$\operatorname{ord} A \leqslant m_1 - m_0 + k < -\dim M, \quad \operatorname{ord} D \leqslant b_1 - b_0 + k < -\dim \partial M.$$

Следовательно, эти операторы имеют непрерывные ядра Шварца и являются ядерными. Аналогично проверяется, что операторы B, C и G в (7.4) также имеют непрерывные ядра Шварца.

Для получения асимптотического разложения (2.6) представим оператор $\mathcal{D}(p)$ с точностью до сглаживающих операторов в виде (4.10) в локальной карте в окрестности края ∂M. Имеем выражение для следа

$$\operatorname{tr} \operatorname{Op}(a) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^*\overline{\mathbb{R}}^n_+} a_{\mathrm{int}}(x, \xi, p) dx d\xi + \\ + (2\pi)^{-(n-1)} \int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}} \big(\Pi'_{\xi_n} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) + d_X(x', \xi', p)\big) dx' d\xi'. \tag{7.5}$$

Символы a_{int} и d_X являются классическими и имеют порядки $\leqslant m_1 - m_0 + k$ и $b_1 - b_0 + k$, соответственно. Поэтому их интегралы имеют асимптотику вида (2.6) с показателями ℓ, равными $m_1 - m_0 + k + \dim M$ и $b_1 - b_0 + k + \dim M - 1$, соответственно, и при $p \to \pm\infty$ имеют искомый вид (2.6) (ср. [24], см. также [3]).

Наконец, поскольку порядок символа g удовлетворяет оценке $\leqslant m_1 - m_0 + k < -1$, то в (7.5) мы можем заменить функционал Π'_{ξ_n} на интегрирование $(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} \cdot\, d\xi_n$ и получить интеграл

$$\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x',\xi',\xi_n,\xi_n,p)dx'd\xi'd\xi_n. \tag{7.6}$$

Утверждается, что интеграл (7.6) имеет асимптотическое разложение вида (2.6) при $p\to\infty$. В самом деле, так как функция g является классической, то достаточно рассмотреть два случая.

1. Пусть $g = \chi(\xi',p)g_j(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p)$, где $\chi\equiv 0$ в окрестности нуля $\xi'=0$, $p=0$, и $\chi\equiv 1$ в окрестности бесконечности, а функция g_j — однородная степени j по переменным (ξ',ξ_n,η_n,p). В этом случае при больших p получаем $g=g_j$. Поэтому интеграл в (7.6) равен

$$\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g_j(x',\xi',\xi_n,\xi_n,p)dx'd\xi'd\xi_n = |p|^{j+n}\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g_j\left(x',\eta',\eta_n,\eta_n,\frac{p}{|p|}\right)dx'd\eta'd\eta_n$$

(здесь мы воспользовались однородностью функции g_j) и является однородной функцией степени $j+n$ при больших p, т. е. имеет асимптотику вида (2.6).

2. Пусть функция $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p)$ такова, что выполнено условие

$$g_{[0]} = g(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,\langle\xi',p\rangle\eta_n,p)\in S^j\bigl(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\otimes H_-^0\bigr), \tag{7.7}$$

где j — достаточное большое по модулю отрицательное число, а $\langle\xi',p\rangle = \sqrt{1+|\xi'|^2+p^2}$. Из соотношения (7.7) получаем оценку

$$|g_{[0]}|\leqslant C\langle\xi',p\rangle^j\langle\xi_n\rangle^{-1}\langle\eta_n\rangle^{-1}.$$

Это даёт оценку для функции g:

$$|g(x',\xi',\xi_n,\xi_n,p)|\leqslant C\langle\xi',p\rangle^j\langle\xi_n\langle\xi',p\rangle^{-1}\rangle^{-2}.$$

Это позволяет оценить интеграл от этой функции:

$$\left|\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x',\xi'\xi_n,\xi_n,p)dx'd\xi'd\xi_n\right|\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\langle\xi',p\rangle^j\langle\xi_n\langle\xi',p\rangle^{-1}\rangle^{-2}dx'd\xi'd\xi_n =$$

$$= C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\langle\xi',p\rangle^j\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\langle\xi_n\langle\xi',p\rangle^{-1}\rangle^{-2}d\xi_n\right)dx'd\xi' = C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\langle\xi',p\rangle^{j+1}\pi\leqslant$$

$$\leqslant C'\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\bigl(|\xi'|^2+p^2\bigr)^2d\xi' = C''|p|^{j+1+n-1} = C''|p|^{j+n}.$$

Из выражения в п. 1 и оценки в п. 2 следует, что интеграл (7.6) имеет искомое асимптотическое разложение (2.6).

Наконец, асимптотическое разложение можно дифференцировать по параметру p, поскольку коэффициенты в асимптотическом разложении (2.6) являются суммами интегралов от однородных компонент полного символа. Доказательство теоремы 2.1 завершено.

Дадим явную формулу для формального следа (см. теорему 2.2).

Теорема 7.1. *Для оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}(p)$ вида* (7.4) *имеет место равенство*

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,\mathcal{D}(p) = \widetilde{\operatorname{Tr}}\,A(p) + \widetilde{\operatorname{Tr}}\,G(p) + \widetilde{\operatorname{Tr}}\,D(p),$$

где

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,A(p) = \int\limits_{T^*M}\sigma(A)_{-\dim M}(x,\xi,p)\Big|_{p=-1}^{p=1}dxd\xi, \tag{7.8}$$

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,G(p) = \int\limits_{T^*\partial M\times\mathbb{R}}\sigma(G)_{-\dim M}(x',\xi',\xi_n,\xi_n,p)\Big|_{p=-1}^{p=1}dx'd\xi'd\xi_n, \tag{7.9}$$

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, D(p) = \int\limits_{T^*\partial M} \sigma(D)_{-\dim \partial M}(x', \xi', p)\Big|_{p=-1}^{p=1} dx' d\xi'. \tag{7.10}$$

Здесь $\sigma(\cdot)_j$ — однородная компонента степени j полного символа соответствующего оператора.

Доказательство. Равенства (7.8) и (7.10) установлены в [24, Proposition 6]. Докажем равенство (7.9). Для оператора $G(p)$, отвечающего функции $g = \chi g_j$, где g_j — однородная функция степени j (см. п. 1 доказательства теоремы 2.1), имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, G(p) = \operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \operatorname{TR} \partial_p G(p) dp =$$

$$= \operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^n} \left(\partial_p g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} \partial_p^{\ell+1} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, 0) p^\ell \right) dx' d\xi' d\xi_n =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p)\Big|_{p=-1}^{p=1} \frac{\omega^n}{n!} & \text{при} \quad j = n = \dim M, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq \dim M. \end{cases} \tag{7.11}$$

Здесь ω — стандартная симплектическая форма на $T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$. Второе равенство в (7.11) получено прямым вычислением, а третье — следует из [24, Proposition 6]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Об эллиптических псевдодифференциальных операторах на замкнутой кривой// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1984. — *47*. — С. 22–67.
2. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
3. *Жуйков К. Н. Савин А. Ю.* Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами// Уфимск. мат. ж. — 2022. — *14*, № 2. — С. 37–57.
4. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инварианты для операторов с параметром, ассоциированных с действием дискретной группы// Мат. заметки. — 2022. — *112*, № 5. — С. 705–717.
5. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.
6. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Москва, 1986.
7. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 801–906.
8. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М: Наука, 1978.
9. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
10. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77*. — С. 43–69.
11. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *78*. — С. 405–432.
12. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79*. — С. 71–99.
13. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126*. — С. 11–51.
14. *Bunke U.* On the gluing problem for the η-invariant// J. Differ. Geom. — 1995. — *41*. — С. 397–488.
15. *Dai X.* Adiabatic limits, non-multiplicativity of signature and the Leray spectral sequence// J. Am. Math. Soc. — 1991. — *4*. — С. 265–321.
16. *Donnelly H.* Eta-invariants for G-spaces// Indiana Univ. Math. J. — 1978. — *27*. — С. 889–918.
17. *Fedosov B. V., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* The index of higher order operators on singular surfaces// Pacific J. Math. — 1999. — *191*, № 1. — С. 25–48.
18. *Gilkey P. B., Smith L.* The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1983. — *36*. — С. 85–132.
19. *Grubb G.* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems. — Boston: Birkhäuser, 1996.

20. *Kuchment P.* An overview of periodic elliptic operators// Bull. Am. Math. Soc. — 2016. — *53*, № 3. — С. 343–414.
21. *Lesch M.* Differential operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods. — Stuttgart—Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1997.
22. *Lesch M., Moscovici H., Pflaum M. J.* Connes—Chern character for manifolds with boundary and eta cochains// Mem. Am. Math. Soc. — 2012. — *220*, № 1036. — С. viii+92.
23. *Lesch M., Pflaum M.* Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant// Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — *352*, № 11. — С. 4911–4936.
24. *Melrose R.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators// Math. Res. Lett. — 1995. — *2*, № 5. — С. 541–561.
25. *Melrose R., Rochon F.* Eta forms and the odd pseudodifferential families index// В сб.: «Perspectives in mathematics and physics: Essays dedicated to Isadore Singer's 85th birthday». — Somerville: Int. Press, 2011. — С. 279–322.
26. *Mrowka T., Ruberman D., Saveliev N.* An index theorem for end-periodic operators// Composю Math. — 2016. — *152*, № 2. — С. 399–444.
27. *Müller W.* Eta-invariants and manifolds with boundary// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*. — С. 311–377.
28. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
29. *Ruzhansky M., Turunen V.* Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2), 3-sphere, and homogeneous spaces// Int. Math. Res. Not. — 2013. — *2013*, № 11. — С. 2439–2496.
30. *Savin A. Yu., Zhuikov K. N.* η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity// Eurasian Math. J. — 2021. — *12*, № 3. — С. 57–77.
31. *Schrohe E.* A short introduction to Boutet de Monvel's calculus// В сб.: «Approaches to singular analysis. Based on the workshop, Berlin, Germany, April 8–10, 1999». — Basel: Birkhäuser, 2001. — С. 85–116.
32. *Taubes C. H.* Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*, № 3. — С. 363–430.
33. *Zhuikov K. N.* Index of differential-difference operators on an infinite cylinder// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — *29*, № 2. — С. 280–290.

К. Н. Жуйков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620
EDN: YQAARE

Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems

K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we study the eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary value problems and its main properties. Using Melrose's approach, we define the eta-invariant as a regularization of the winding number of the family. In this case, the regularization of the trace requires obtaining the asymptotics of the trace of compositions of invertible parameter-dependent boundary value problems for large values of the parameter. Obtaining the asymptotics uses the apparatus of pseudodifferential boundary value problems and is based on the reduction of parameter-dependent boundary value problems to boundary value problems with no parameter.

Keywords: eta-invariant, elliptic parameter-dependent boundary value problem, pseudodifferential boundary value problem, Boutet de Monvel operator, regularized trace

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to V. E. Nazaikinskii for useful comments. This work was supported in part by the Young Russian Mathematics award and by RFBR and DFG, project No. 21-51-12006.

For citation: K. N. Zhuikov, A. Yu. Savin, "Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 599–620. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620`

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Ob ellipticheskih psevdodifferencial'nyh operatorah na zamknutoy krivoy" [Elliptic pseudodifferential operators on a closed curve], *Tr. Mosk. Mat. Obs.* [Trans. Moscow Math. Soc.], 1984, **47**, 22–67 (in Russian).
2. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic problems with parameter and parabolic problems of general type], *Usp. Mat. Nauk* [Russ. Math. Surv.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
3. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, "Eta-invariant dlya semeystv s parametrom i periodicheskimi koefficientami" [Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 2, 35–55 (in Russian).
4. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, "Eta-invarianty dlya operatorov s parametrom, associirovannyh s deystviem diskretnoy gruppy" [Eta-invariants for parameter-dependent operators associated with an action of a discrete group], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **112**, No. 5, 685–696 (in Russian).
5. V. A. Kondratiev, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskih uravneniy v oblastyah s konicheskimi i uglovymi tochkami" [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Trans. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
6. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Teoriya indeksa ellipticheskih kraevyh zadach* [Index Theory of Elliptic Boundary Problems], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskih funkcional'no-differencial'nyh uravneniy i ih prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Russ. Math. Surv.], 2016, **71**, No. 5, 801–906 (in Russian).

8. M. A. Shubin, *Psevdodifferencial'nye operatory i spektral'naya teoriya* [Pseudodifferential operators and spectral theory], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
9. G. I. Eskin, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskih psevdodifferencial'nyh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
10. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 43–69.
11. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **78**, 405–432.
12. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
13. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudodifferential operators," *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
14. U. Bunke, "On the gluing problem for the η-invariant," *J. Differ. Geom.*, 1995, **41**, 397–488.
15. X. Dai, "Adiabatic limits, non-multiplicativity of signature and the Leray spectral sequence," *J. Am. Math. Soc.*, 1991, **4**, 265–321.
16. H. Donnelly, "Eta-invariants for G-spaces," *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, **27**, 889–918.
17. B. V. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "The index of higher order operators on singular surfaces," *Pacific J. Math.*, 1999, **191**, No. 1, 25–48.
18. P. B. Gilkey and L. Smith, "The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1983, **36**, 85–132.
19. G. Grubb, *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems*, Birkhäuser, Boston, 1996.
20. P. Kuchment, "An overview of periodic elliptic operators," *Bull. Am. Math. Soc.*, 2016, **53**, No. 3, 343–414.
21. M. Lesch, *Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods*, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart–Leipzig, 1997.
22. M. Lesch, H. Moscovici, and M. J. Pflaum, "Connes–Chern character for manifolds with boundary and eta cochains," *Mem. Am. Math. Soc.*, 2012, **220**, No. 1036, viii+92.
23. M. Lesch and M. Pflaum, "Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2000, **352**, No. 11, 4911–4936.
24. R. Melrose, "The eta invariant and families of pseudodifferential operators," *Math. Research Letters*, 1995, **2**, No. 5, 541–561.
25. R. Melrose and F. Rochon, "Eta forms and the odd pseudodifferential families index," In: *Perspectives in Mathematics and Physics: Essays Dedicated to Isadore Singer's 85th Birthday*, Int. Press, Somerville, 2011, pp. 279–322.
26. T. Mrowka, D. Ruberman, and N. Saveliev, "An index theorem for end-periodic operators," *Compositio Math.*, 2016, **152**, No. 2, 399–444.
27. W. Müller, "Eta-invariants and manifolds with boundary," *J. Differ. Geom.*, 1994, **40**, 311–377.
28. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
29. M. Ruzhansky and V. Turunen, "Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2), 3-sphere, and homogeneous spaces," *Int. Math. Res. Not.*, 2013, **2013**, No. 11, 2439–2496.
30. A. Yu. Savin and K. N. Zhuikov, "η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity," *Eurasian Math. J.*, 2021, **12**, No. 3, 57–77.
31. E. Schrohe, "A short introduction to Boutet de Monvel's calculus," In: *Approaches to Singular Analysis. Based on the Workshop, Berlin, Germany, April 8–10, 1999*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 85–116.
32. C. H. Taubes, "Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds," *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, No. 3, 363–430.
33. K. N. Zhuikov, "Index of differential-difference operators on an infinite cylinder," *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 2, 280–290.

K. N. Zhuikov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`