УДК 621.39

Аппроксимация нормальным законом вероятностных характеристик модели сети P2P TV

Амину Адаму, Ю. В. Гайдамака

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

В статье в виде однородной экспоненциальной сети массового обслуживания построена модель воспроизведения телевизионных каналов в одноранговой сети (англ. peer-to-peer network). В случае двух типов пользователей с высокой и с низкой скоростями отдачи видеопотока в статье получена точная формула для анализа вероятности всеобщей передачи — такого состояния сети P2P TV, когда скорость загрузки видеопотока всеми пользователями не падает ниже скорости воспроизведения телевизионного канала. Для сети P2P TV большой размерности (не менее 1000 пользователей) с целью упрощения вычислений предложена аппроксимация вероятности всеобщей передачи нормальным законом.

Ключевые слова: сеть P2P, потоковый трафик, вероятность всеобщей передачи, аппроксимация нормальным законом.

1. Введение

В течение последних лет наблюдается стремительный рост популярности мультимедийных услуг, предоставляемых через Интернет с использованием технологии P2P (от англ. *peer-to-peer*) [1, 2]. Преимуществами этой технологии являются эффективное использование скоростей подключения пользователей к сети Интернет, устойчивость, масштабируемость сети P2P и др. Во многих P2P-сетях, например, PPLive, PPLite, PPStream, CoolStreaming, UUSee, QQLive, SopCast [3–9], через Интернет транслируются телевизионные каналы, при этом каждый канал могут просматривать десятки тысяч пользователей одновременно. В таких сетях, известных как сети P2P TV, пользователь может загружать информацию и от сервера-источника трансляции телеканала, и от других пользователей сети, также просматривающих выбранный пользователем телеканал. Одним из параметров оценки качества предоставления услуги телевещания, оказывающих влияние на степень удовлетворенности пользователя качеством услуги (Quality of Experience, QoE), является возможность просмотра пользователем телеканала без пауз в воспроизведении, «застывания» изображения, рассинхронизации звука и изображения и т.п. Причиной приведенных в качестве примера нарушений трансляции телеканала может служить недостаточная скорость загрузки пользователем из сети видеопотока для воспроизведения телеканала. Скорость загрузки пользователя зависит от скорости входящего трафика пользователя, от скорости исходящего трафика сервера-источника телетрансляции и от скоростей исходящего трафика других просматривающих телеканал пользователей. Если пользователю удается найти источники для загрузки видеопотока так, чтобы в течение всего времени просмотра телеканала скорость загрузки видеопотока пользователем не падала ниже скорости воспроизведения телеканала, то снижения качества просмотра телеканала не происходит.

В [10, 11] определена вероятность того, что все пользователи в сети загружают видеопоток выбранного телевизионного канала со скоростью не ниже скорости его воспроизведения, которая названа вероятностью всеобщей передачи (от англ. *universal streaming*). В [12] получены точные формулы расчета этой характеристики для сети P2P TV с пользователями, постоянно находящимися в сети и

Статья поступила в редакцию 23 мая 2011 г.
Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 10-07-00487-а).

переключающимися с канала на канал, а также для сети P2P TV, в которой пользователи могут подключаться и отключаться от сети в любой момент времени. Однако для P2P-сетей с десятками тысяч пользователей, в которых транслируются сотни телеканалов, расчет по этим формулам требует сложных вычислений.

Для упрощения оценки вероятности всеобщей передачи для сетей P2P TV большой размерности в статье получена аппроксимация этого QoE параметра нормальным законом.

2. Построение общей модели

Рассмотрим сеть P2P TV (далее для краткости — сеть), в которой могут находиться пользователи из множества N, $|\mathrm{N}| = N$. В сети транслируются телевизионные каналы из множества M, $|\mathrm{M}| = M$, и пусть $\rho_m(N)$ — популярность m-го телевизионного канала (m-канала) в сети с $N \leqslant \infty$ пользователями. Предположим также, что каналы и пользователи функционируют независимо друг от друга.

Обозначим $x_{nm} \in \{0, 1\}$ состояние n-пользователя на m-канале, т.е. $x_{nm} = 1$, если n-пользователь просматривает m-канал, и $x_{nm} = 0$ в противном случае. Состояние сети описывает матрица $\mathbf{X} = (x_{nm})_{n\in\mathrm{N}\,,\, m\in\mathrm{M}}$, а пространство состояний сети имеет вид

$$X = \left\{ \mathbf{X} : \ x_{nm} \in \{0, 1\}\,, \ \sum_{m\in\mathrm{M}} x_{nm} = 1, \ n \in \mathrm{N} \right\}.$$

Для рассматриваемой сети в [12] получено выражение для стационарного распределения вероятностей состояний в мультипликативном виде:

$$P(\mathbf{X}) = \prod_{n\in N} \prod_{m\in M} \rho_m^{x_{nm}}(N), \ \mathbf{X} \in X.$$

Зная распределение $P(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in X$, можно найти вероятность π_m всеобщей передачи для m-канала. Будем считать, что m-канал находится в состоянии всеобщей передачи, если все просматривающие его пользователи имеют возможность получать видео поток со скоростью не ниже скорости воспроизведения канала сервером. Из этого определения следует определение множества A_m состояний всеобщей передачи для m-канала:

$$A_m = \left\{ \mathbf{X} \in X : \ s_m + \sum_{n\in\mathrm{N}} x_{nm} u_n \geqslant R_m \sum_{n\in\mathrm{N}} x_{nm} \right\},$$

где s_m — скорость отдачи сервером видеопотока m-канала, u_n — скорость отдачи n-пользователя, R_m — скорость воспроизведения m-канала. Тогда вероятность π_m всеобщей передачи для m-канала определяется формулой

$$\pi_m = P(A_m) = \sum_{\mathbf{X}\in A_m} P(\mathbf{X}).$$

3. Модель сети с пользователями с высокой и с низкой скоростями отдачи

Обозначим N^h $\left(\left|\mathrm{N}^h\right| = N^h\right)$ и N^l $\left(\left|\mathrm{N}^l\right| = N^l\right)$ множества пользователей с высокой и с низкой скоростями отдачи соответственно. Тогда $N = N^h + N^l$ — число пользователей в сети. Будем называть сеть замкнутой, если $N < \infty$, и открытой в противном случае. Введем коэффициент $K = \dfrac{N^h}{N^l}$, как отношение числа пользователей с высокой скоростью и с низкой скоростью отдачи в замкнутой сети.

Пусть $0 \leqslant \xi_m^h \leqslant N^h$ $(0 \leqslant \xi_m^l \leqslant N^l)$ — случайная величина (СВ) числа просматривающих m-канал пользователей с высокой (низкой) скоростью отдачи в замкнутой сети. В [12] показано, что маргинальное распределение числа пользователей в замкнутой сети имеет вид

$$P_m\left(x_m^i\right) = P\left\{\xi_m^i = x_m^i\right\} = \binom{N^i}{x_m^i} \rho_m^{x_m^i}\left(N^i\right)\left(1-\rho_m\left(N^i\right)\right)^{N^i - x_m^i}, \\ 0 \leqslant x_m^i \leqslant N^i,\ i \in \{h, l\}, \quad m \in \mathrm{M}. \tag{1}$$

Очевидно, что множество состояний всеобщей передачи для m-канала в замкнутой сети с двумя типами пользователей имеет вид

$$A_m = \left\{\left(\xi_m^h, \xi_m^l\right):\ 0 \leqslant \xi_m^h \leqslant N^h,\, 0 \leqslant \xi_m^l \leqslant N^l,\, s_m + \xi_m^h u^h + \xi_m^l u^l \geqslant \left(\xi_m^h + \xi_m^l\right) R_m\right\},$$

и тогда вероятность всеобщей передачи для m-канала определяется формулой

$$\pi_m = P\left(A_m\right) = P\left\{\left(\xi_m^h, \xi_m^l\right) \in A_m\right\} = \\ = \sum_{x_m^h=0}^{N^h} \sum_{x_m^l=0}^{N^l} I\left(A_m\right) P_m\left(x_m^h\right) P_m\left(x_m^l\right), \quad m \in \mathrm{M}, \tag{2}$$

где $\mathrm{I}\left(A_m\right)$ — функция-индикатор.

Перейдем к анализу открытой сети $(N = \infty)$, где $\hat{\xi}_m^h \geqslant 0$ $(\hat{\xi}_m^l \geqslant 0)$ – СВ числа просматривающих m-канал пользователей с высокой (низкой) скоростью отдачи. Маргинальное распределение числа пользователей в открытой сети получим предельным переходом в формуле (22) от биномиального распределения к распределению Пуассона [13]:

$$\hat{P}_m\left(x_m^i\right) = P\left\{\hat{\xi}_m^i = x_m^i\right\} = e^{-\gamma_m^i} \frac{\left(\gamma_m^i\right)^{x_m^i}}{x_m^i!}, \quad 0 \leqslant x_m^i \leqslant N^i,\ i \in \{h, l\}, \quad m \in \mathrm{M},$$

где $\gamma_m^i = \lim\limits_{N^i \to \infty} N^i \rho_m\left(N^i\right)$ — среднее число просматривающих m-канал пользователей, $i \in \{h, l\}$.

Будем считать, что в открытой сети выполняется соотношение $\dfrac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} = K$, $m \in \mathrm{M}$, и теперь очевидным образом определяется множество $\hat{A}_m$ состояний всеобщей передачи для m-канала в открытой сети с двумя типами пользователей и соответствующая этому множеству вероятность всеобщей передачи:

$$\hat{\pi}_m = P\left(\hat{A}_m\right) = P\left\{\left(\hat{\xi}_m^h, \hat{\xi}_m^l\right) \in \hat{A}_m\right\} = \\ = \sum_{x_m^h=0}^{\infty} \sum_{x_m^l=0}^{\infty} I\left(\hat{A}_m\right) \hat{P}_m\left(x_m^h\right) \hat{P}_m\left(x_m^l\right), \quad m \in \mathrm{M}. \tag{3}$$

В следующем разделе статьи для упрощения расчетов правая часть формулы (3) аппроксимируется нормальным законом.

4. Аппроксимация вероятности всеобщей передачи в открытой сети

Воспользуемся центральной предельной теоремой в условиях Линденберга–Леви [14], центрируя и нормируя распределенные по закону Пуассона случайные величины $\hat{\xi}_m^h$ и $\hat{\xi}_m^l$: $\hat{Z}_m^i = \dfrac{\hat{\xi}_m^i - \gamma_m^i}{\sqrt{\gamma_m^i}}, \quad i \in \{h, l\}$. Очевидно, что СВ $\hat{Z}_m^i$ распределена по стандартному нормальному закону, т.е. $\hat{Z}_m^i \in N(0,1)$, $i \in \{h, l\}$.

Обозначим $\varepsilon_m = \dfrac{R_m - u^l}{u^h - R_m}$ — отношение разницы между скоростью воспроизведения m-канала и скоростью пользователя с низкой скоростью отдачи к разнице между скоростью пользователя с высокой скоростью отдачи и скоростью воспроизведения m-канала; $\delta_m = \dfrac{s_m}{u^h - R_m}$ — отношение скорости отдачи сервера к разнице между скоростью пользователя с высокой скоростью отдачи и скоростью воспроизведения m-канала.

Определим СВ $\hat{Z}_m$ как линейную комбинацию СВ $\hat{Z}_m^h$ и $\hat{Z}_m^l$: $\hat{Z}_m = \varepsilon_m \hat{Z}_m^l - \sqrt{K}\hat{Z}_m^h$, и заметим, что СВ $\hat{Z}_m$ распределена по нормальному закону, т.е. $\hat{Z}_m \in N\left(0,\, K + \varepsilon_m^2\right)$.

Теорема. *Открытая сеть с параметрами* γ_m^h, γ_m^l, ε_m *и* δ_m *находится в состоянии всеобщей передачи для* m*-канала, если* $\hat{Z}_m \leqslant d_m$*, где* $d_m = \dfrac{(K - \varepsilon_m)\gamma_m^l + \delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}$.

Доказательство. Преобразуем формулу для множества $\hat{A}_m$ состояний всеобщей передачи для m-канала в открытой сети следующим образом:

$$\hat{A}_m = \left\{\left(\hat{\xi}_m^h, \hat{\xi}_m^l\right): \ \hat{\xi}_m^h \geqslant 0, \ \hat{\xi}_m^l \geqslant 0, \ s_m + \hat{\xi}_m^h u^h + \hat{\xi}_m^l u^l \geqslant \left(\hat{\xi}_m^h + \hat{\xi}_m^l\right) R_m \right\} =$$
$$= \left\{\hat{\xi}_m^h \geqslant \varepsilon_m \hat{\xi}_m^l - \delta_m\right\} = \left\{\sqrt{\gamma_m^h}\hat{Z}_m^h + \gamma_m^h \geqslant \varepsilon_m\left(\sqrt{\gamma_m^l}\hat{Z}_m^l + \gamma_m^l\right) - \delta_m\right\} =$$
$$= \left\{\sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}}\hat{Z}_m^h + \left(\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m\right)\sqrt{\gamma_m^l} \geqslant \varepsilon_m \hat{Z}_m^l - \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}\right\} =$$
$$= \left\{\sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}}\hat{Z}_m^h + \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}\sqrt{\gamma_m^l} \geqslant \varepsilon_m\left(\hat{Z}_m^l + \sqrt{\gamma_m^l}\right) - \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}\right\} =$$
$$= \left\{\varepsilon_m \hat{Z}_m^l - \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}}\hat{Z}_m^h \leqslant \left(\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m\right)\sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}\right\} =$$
$$= \left\{\hat{Z}_m \leqslant \left(\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m\right)\sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}\right\} =$$
$$= \left\{\hat{Z}_m \leqslant (K - \varepsilon_m)\sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}\right\} = \left\{\hat{Z}_m \leqslant d_m\right\}.$$

Следствие. Вероятность всеобщей передачи в открытой сети аппроксимируется нормальным законом:

$$\hat{\pi}_m = \Phi\left(\frac{d_m}{\sqrt{K + \varepsilon_m^2}}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy. \tag{4}$$

5. Заключение

В заключение приведем пример расчета вероятности π_m всеобщей передачи для замкнутой сети с $M = 20$ каналами и $N = 1800$ пользователями, считая, что $N^h = N^l = 0,5N$. Полагаем, что $\gamma_m^h = \gamma_m^l = \rho_m \cdot 0,5N$, и следовательно $K = 1$. Все каналы имеют одинаковые требования к скорости передачи, т.е. $R_m = R = 500$ кбит/с, $m \in$ M, а скорости отдачи пользователей $u^l = 100$ кбит/с и $u^h = 1500$ кбит/с. Предполагается, что популярность каналов распределена по закону Ципфа с параметром $z = 1$, т.е. $\rho_m = \left(m^z \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{m^z} \right)^{-1}$, $m \in$ M.

На рис. 1 для всех каналов, пронумерованных в порядке уменьшения популярности, показаны значения вероятности π_m всеобщей передачи, рассчитанные по формулам (1)–(2), и вероятности $\hat{\pi}_m$, рассчитанные по формуле (4). Сравнение показывает, что относительная погрешность аппроксимации (4) для каналов с большой популярностью (каналы 1–7) близка к нулю. Самая большая относительная погрешность наблюдается для наименее популярного канала (канал 20) и не превышает 1%. Следовательно, аппроксимацию (4) можно использовать для оценки значения вероятности всеобщей передачи сети P2P TV, причем с ростом популярности канала точность предложенной аппроксимации возрастает.

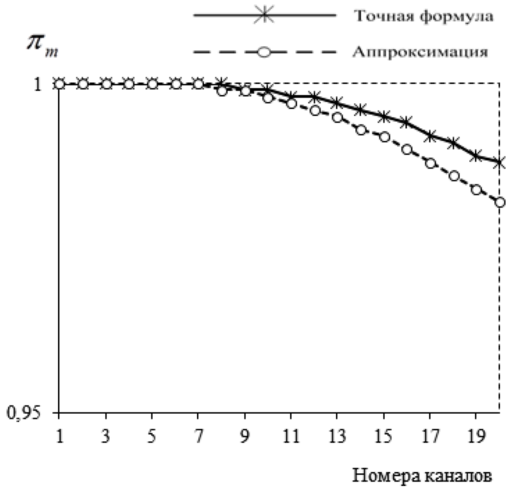

Рис. 1. **Вероятность всеобщей передачи для каналов сети P2P TV**

Литература

1. *Setton E., Girod B.* Peer-to-Peer Video Streaming. — 2007. — 150 p.
2. Handbook of Peer-to-Peer Networking / Ed. by X. Shen, H. Yu, J. Buford, M. Akon. — Springer Science+Business Media, LLC, 2010. — 1421 p.
3. Сайт системы P2P TV PPLive. — `http://www.pplive.com/en/index.html`. [Sayjt sistemih P2P TV PPLive. — `http://www.pplive.com/en/index.html`.]
4. Сайт системы P2P TV PPlite. — `http://www.pplite.com`. [Sayjt sistemih P2P TV PPlite. — `http://www.pplite.com`.]
5. Сайт системы P2P TV PPStream. — `http://www.ppstream.com/`. [Sayjt sistemih P2P TV PPStream. — `http://www.ppstream.com/`.]

6. CoolStreaming/DONet: A Data-Driven Overlay Network for Peer-to-Peer Live Media Streaming / X. Zhang, J. Liu, B. Li, T.-S. P. Yum // Proc. of the 24th Conference of the IEEE Communications Society (INFOCOM 2005). — 2005.
7. Сайт системы P2P TV UUSee. — `http://www.uusee.com/`. [Sayjt sistemih P2P TV UUSee. — `http://www.uusee.com/`.]
8. Сайт системы P2P TV QQLive. — `http://tv.qq.com/`. [Sayjt sistemih P2P TV QQLive. — `http://tv.qq.com/`.]
9. Сайт системы P2P TV SopCast. — `http://www.sopcast.org/`. [Sayjt sistemih P2P TV SopCast. — `http://www.sopcast.org/`.]
10. *Wu D., Liu Y., Ross K. W.* Queuing Network Models for Multi-Channel Live Streaming Systems // Proc. of the 28th Conference on Computer Communications (IEEE Infocom 2009). — Rio de Janeiro, Brazil: 2009. — Pp. 73–81.
11. *Kumar R., Yong L. Y., Ross K.* Stochastic Fluid Theory for P2P Streaming Systems // Proc. of the 26th Annual IEEE Conf. on Computer and Communications (IEEE INFOCOM 2007). — Anchorage, Alaska, USA: 2007. — P. 919 927.
12. *Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A.* Analytical Modeling of P2PTV Network // Proc. of the 2d International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (IEEE ICUMT 2010). — Moscow, Russia: 2010. — Pp. 1115–1120.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. — 832 с. [*Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnihkh rabotnikov i inzhenerov. — M.: Nauka, 1974. — 832 s.]
14. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том I. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. — 2-е, дополненное и исправленное издание. — М.: МЦНМО, 2011. — 486 с. [*Keljbert M. Ya., Sukhov Yu. M.* Veroyatnostj i statistika v primerakh i zadachakh. Tom I. Osnovnihe ponyatiya teorii veroyatnosteyj i matematicheskoyj statistiki. — 2-e, dopolnennoe i ispravlennoe издание. — M.: MCNMO, 2011. — 486 s.]

UDC 621.39

Approximation of a Universal Streaming Probability with the Normal Distribution

Aminu Adamu, Yu. V. Gaidamaka

Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

In this paper the model of P2P live streaming network with peer churn (peers joining and leaving) providing the closed-form expressions was developed. The approximation of a universal streaming probability with the normal (or Gaussian) distribution for large P2P live streaming networks was obtained.

Key words and phrases: P2P network, live streaming, universal streaming probability, normal (Gaussian) distribution approximation.