

## Расчет строительных конструкций

### **ПРЯМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТАЛЬНЫХ ФЕРМ С БОЛЬШИМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ НАПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ И ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ**

А. ХЕЙДАРИ, аспирант,

В.В. ГАЛИШНИКОВА, канд. техн. наук, доцент

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

*В данной работе описывается разработанный авторами прямой метод упругопластического анализа стальных пространственных ферм в условиях больших перемещений. За основу был принят инкрементальный метод геометрически нелинейного анализа пространственных ферм, разработанный ранее одним из авторов, и выполнена его модификация, позволяющая учесть текучесть и пластические деформации в стержнях ферм. Предложенный метод реализован в виде программного приложения на платформе Java. При помощи этого приложения выполнен ряд примеров, описанных в данной работе. Приведенные примеры демонстрируют, что прямой расчет пространственных ферм на пластическое предельное равновесие и приспособляемость при больших перемещениях может быть успешно реализован в программе. Алгоритмы охватывают широкий спектр упругопластического поведения фермы: упругую работу, приспособляемость, прогрессирующие пластические деформации и разрушение при формировании механизма. Программное приложение может быть использовано в качестве тестовой платформы для исследования упругопластического поведения ферм и как инструмент для решения прикладных задач.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стальная ферма, большие перемещения, пластичность.

#### **1. Теоретические основы расчета на пластическое предельное равновесие и приспособляемость**

Деформации и устойчивость стальных конструкций зависят от геометрической и физической нелинейности их поведения. При больших перемещениях конструкции условия равновесия и зависимости «перемещения-деформации» нелинейны. Если материал в отдельных частях конструкции достигает предела текучести, то изменяются соотношения «напряжения-деформации», а также отношения жесткостей элементов конструкции, и в ней могут образовываться механизмы. Данная статья посвящена анализу таких конструкций при помощи компьютерных моделей.

Теоретические основы расчета на предельную пластическую нагрузку и приспособляемость изложены в сопутствующей статье [1]. Показано, что при малых перемещениях такие задачи традиционно решаются при помощи методов оптимизации. При использовании методов оптимизации, рассматривается последовательность статически возможных состояний конструкции и определяется максимальный коэффициент нагружения, называемый коэффициентом надежности приспособляемости. Альтернативно, может быть рассмотрена последовательность кинематически возможных перемещений конструкции и определен минимальный коэффициент нагружения.

В прямом методе расчета, излагаемом в данной работе, удовлетворяются как статические, так и кинематические условия, и оптимизация не требуется. Прямой метод требует расчета последовательности конфигураций конструкции, так как при наступлении пластичности ее жесткость изменяется. Если какой-то из стержней фермы достигает пластического состояния или наоборот, если

стержень восстанавливает упругое состояние при разгрузке, должно быть выполнено переформирование и разложение матрицы жесткости системы. На начальных этапах развития теории предельного пластического равновесия и приспособляемости мощности компьютеров не соответствовали объему вычислений прямого метода. В связи с этим, предпочтение отдавалось методам, основанным на теории оптимизации, для которых был разработан ряд теорем.

Все теоремы оптимизации, рассмотренные в [1] основаны на линейной суперпозиции нагрузок при формировании их сочетаний. Если поведение конструкции геометрически нелинейно, то суперпозиция нагрузок неправомерна. В этом случае теоремы теряют справедливость, и оптимизационный подход не может быть использован для анализа приспособляемости.

При современном уровне развития компьютеров преимущество непрямого оптимизационного подхода становится спорным даже для задач с малыми перемещениями. В представленной работе поставлена задача оценить возможность использования прямого метода упругопластического расчета для практических инженерных задач расчета стальных пространственных ферм.

Инкрементальный метод геометрически нелинейного анализа пространственных ферм, который использован в настоящем исследовании, был описан в ряде публикаций [2-7], и поэтому в данной статье не представлен. Авторами статьи была выполнена модификация этого метода, позволяющая учесть текучесть и пластические деформации в стержнях ферм.

## 2. Упругопластическое поведение стального стержня

Каждый стержень фермы рассматривается как конечный элемент постоянного поперечного сечения, подверженный действию лишь осевого усилия. Стержни соединяются в узлах шарнирно. Упругая потеря устойчивости отдельных стержней не рассматривается. Если стержень достигает пластичности, то полагается, что он может нести осевую нагрузку, соответствующую напряжению текучести. Считается, что каждый стержень фермы на шаге нагружения находится либо в упругом, либо в пластическом состоянии. Величина шага вычисляется в алгоритме решения таким образом, чтобы справедливость этого положения не нарушалась. Вклад каждого стержня в секущую матрицу фермы вычисляется при помощи выражений, выведенных для геометрически нелинейного расчета ферм [4]. Если стержень достиг пластичности, то его вклад в секущую матрицу жесткости фермы равен нулю.

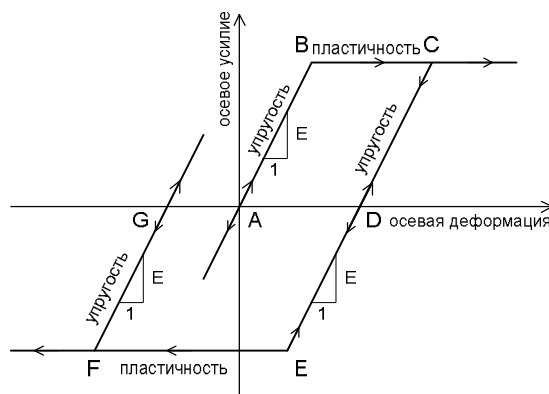


Рис. 1. Зависимость осевого усилия в стержне от осевой деформации

На рис.1 показано изменение состояния стержня как функция инкремента осевой деформации на шаге нагружения. В точках A, D и G стержень остается упругим при положительных и отрицательных инкрементах деформации. В

точках В и С стержень будет упругим при отрицательных инкрементах деформации и пластическим – при положительных инкрементах деформации. В точках Е и F стержень будет упругим при положительных инкрементах деформации и пластическим - при отрицательных.

Пусть  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_e$  и  $\varepsilon_p$  - полные, упругие и пластические деформации в стержне соответственно. Верхним индексом ( $s$ ) будем обозначать значение переменной в начале шага, а индексом ( $t$ ) – ее значение в конце шага нагружения. Обозначим через  $v_k$  компоненты координат перемещения в исходной системе координат, и  $v_{k,1}$ - их производные по осевой координате  $y_1$ . Полная осевая деформация в стержне задана следующим выражением [2]:

$$\varepsilon_t = v_{1,1} + 0,5(v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2)^2. \quad (1)$$

Если стержень на шаге нагружения остается упругим, то его деформация в пробном состоянии равна

$$\varepsilon_e^{(t)} = \varepsilon_t^{(t)} - \varepsilon_p^{(s)}, \quad (2) \quad \varepsilon_p^{(t)} = \varepsilon_p^{(s)}. \quad (3)$$

Пусть  $m$  – переходный коэффициент между координатами второго тензора Пиолы - Кирхгофа и координатами вектора технических напряжений:

$$m = \sqrt{(1 + v_{1,1})^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2}. \quad (4)$$

Тогда напряжение  $\sigma$  и осевое усилие  $f$  в стержне в пробном состоянии определяются из следующих уравнений:

$$\sigma^{(t)} = m^{(t)} E \varepsilon_e^{(t)}, \quad (5) \quad f^{(t)} = A \sigma^{(t)}. \quad (6)$$

Если стержень на шаге нагружения является пластичным, то его деформация в пробном состоянии определяется следующим образом:

$$\varepsilon_e^{(t)} = \varepsilon_e^{(s)}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_p^{(t)} = \varepsilon_p^{(s)} + \Delta \varepsilon_p, \quad \Delta \varepsilon_p = \varepsilon_t^{(t)} - \varepsilon_t^{(s)}. \quad (8)$$

Напряжение  $\sigma$  и осевое усилие  $f$  в стержне, достигшем пластичности, в пробном состоянии равны:

$$\sigma^{(t)} = \sigma^{(s)}, \quad (9) \quad f^{(t)} = f^{(s)}. \quad (10)$$

### 3. Прямой метод расчета по предельному равновесию

В прямом методе расчета на пластическое предельное равновесие задается схема нагружения (модельная нагрузка), которая затем умножается на коэффициент нагружения  $\lambda$ , давая значение нагрузки на шаге нагружения. Определяется максимальное значение коэффициента нагружения, при котором конструкция сохраняет устойчивость. Так как предполагается, что конструкция испытывает большие перемещения, то заранее не известно, какое предельное состояние наступит раньше: потеря устойчивости формы конструкции или образование пластического механизма.

На рис. 2 показана структурная схема алгоритма расчета фермы на предельную нагрузку. Алгоритм учитывает геометрическую и физическую нелинейность и состоит из двух вложенных циклов. Во внешнем цикле выполняется пошаговый расчет до достижения заданного коэффициента нагружения или наступления предельного состояния фермы. Во внутреннем цикле производится итерационное вычисление матрицы секущей матрицы для шага нагружения в соответствии с инкрементами перемещения и изменениями состояний стержней.

Истинное состояние стержней на шаге нагружения определяется итерационно. В начале первого шага нагружения все стержни упруги и свободны от

напряжений. В первом цикле итераций на всех последующих шагах нагружения полагается, что стержень пластичен, если он был пластичен в конце предыдущего шага нагружения. В противном случае, стержень полагается упругим. Эти предположения могут оказаться некорректными, и будут уточняться в конце каждого шага нагружения.



Рис. 2. Структурная схема алгоритма расчета фермы на предельную нагрузку

В первом цикле итераций вычисляется матрица касательной жесткости фермы и выполняется ее разложение. Инкремент коэффициента нагружения на цикле, а также перемещения и реакции в пробном состоянии в конце цикла определяются по алгоритму геометрически нелинейного анализа, описанному в работе [7]. При этом выявляются изменения в состояниях стержней и отмечаются в программе флажками, в которых значение true имеет следующие смыслы:

$e_{start}$  - стержень является упругим в начале шага нагружения;

$e_{end}$  - стержень является упругим в конце шага нагружения;  
 $d_c$  - по крайней мере один из стержней изменил состояние на шаге;  
 $d_e$  - по крайней мере один из стержней стал упругим на шаге;  
 $d_p$  - по крайней мере один из стержней достиг пластичности на шаге.

На рис. 3 показан алгоритм проверки состояния стержней.

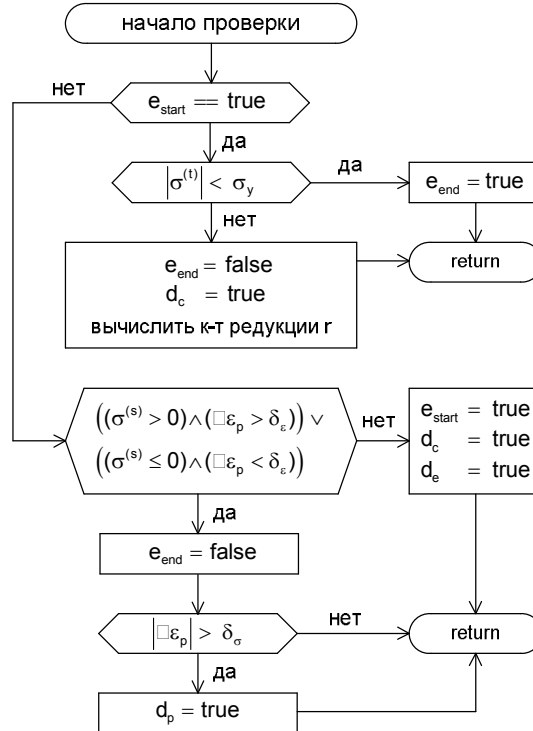


Рис. 3. Проверка состояния стержня в конце цикла итерации

Стержень, упругий в начале шага, остается упругим в конце шага нагружения, если абсолютное значение напряжения в нем меньше предела текучести. В противном случае стержень в конце шага считается достигшим текучести. Коэффициент снижения нагрузки вычисляется следующим образом:

$$\sigma^{(t)} \geq 0: \quad r = \frac{\sigma_y - \sigma^{(s)}}{\sigma^{(t)} - \sigma^{(s)}}, \quad (11)$$

$$\sigma^{(t)} < 0: \quad r = \frac{-\sigma_y - \sigma^{(s)}}{\sigma^{(t)} - \sigma^{(s)}}. \quad (12)$$

Рассмотрим стержень, состояние которого на шаге было принято пластическим состоянием. Для упругой и пластической деформаций задаются пределы погрешностей  $\delta_\epsilon$  и  $\delta_p$ . Типичными значениями пределов погрешностей можно считать  $\delta_\epsilon = 10^{-10}$  и  $\delta_p = 10^{-6}$ . Стержень испытывает на шаге пластическую деформацию, если значение абсолютной величины инкремента пластической деформации  $|\epsilon_p|$  превосходит погрешность  $\delta_p$ . В противном случае стержень во время шага был упругим вопреки допущению, принятому в начале шага, и в программе устанавливаются соответствующие флажки.

Если проверка состояния стержней в конце первого цикла итераций показывает, что ни один из стержней не изменил состояния, то цикл считается завершенным. Если хотя бы один из стержней перешел в упругое состояние, шаг

нагружения повторяется с использованием новых состояний стержней. В противном случае хотя бы один из стержней перешел в пластическое состояние, и вычисляется наименьший коэффициент редуцирования  $r_{\min}$ . Пробное состояние масштабируется при помощи этого коэффициента, и цикл завершается.

В начале второго и всех последующих циклов итераций на шаге нагружения, состояние стержня принимается равным его состоянию в конце предыдущего цикла. Вычисляется матрица секущей жесткости для текущих инкрементов перемещений и состояния стержней. Процедура продолжается так же, как и в предыдущем цикле. Итерации на шаге нагружения завершаются, когда норма погрешности пробного решения становится меньше заданного предельного значения. Пошаговое нагружение завершается, когда достигается предельная нагрузка или когда выполняется заданное число шагов нагружения. Предельная нагрузка считается достигнутой, когда максимальное заданное число делений длины хорды в методе постоянных дуг не приводит к формированию положительно определенной матрицы секущей жесткости или к сходимости метода для пробного состояния фермы на шаге нагружения.

#### 4. Расчет двухпролетной фермы на предельную нагрузку

Данный пример демонстрирует применение прямого метода расчета на предельную пластическую нагрузку, описанного в разделе 3, к анализу двухпролетной фермы, показанной на рисунке 4.

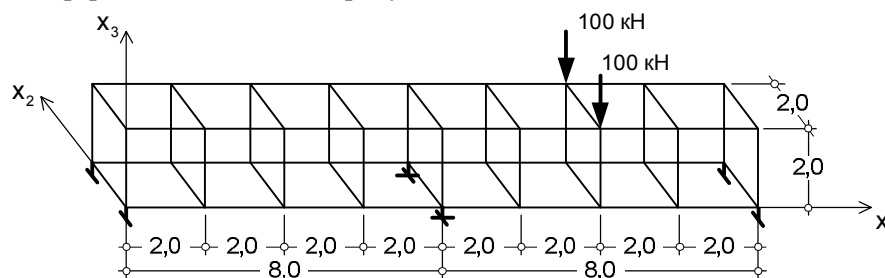


Рис. 4. Аксонометрическая проекция двухпролетной фермы (диагонали на показаны)

Конструкция фермы состоит из четырех поясов, крестовой решетки и вертикальных связей-диафрагм, установленных в каждой панели длиной 2 м. Площади сечения элементов поясов и диагональных элементов равны  $0,0008 \text{ м}^2$ ; площади сечения вертикальных и горизонтальных элементов связей -  $0,0006 \text{ м}^2$ . Опоры в середине длины фермы представляют собой неподвижные шарниры (перемещения по трем направлениям координатных осей равны нулю), крайние опоры – подвижные шарниры (перемещения по направлениям осей  $x_2$  и  $x_3$  равны нулю, перемещение вдоль оси  $x_1$  возможно). Все стержни имеют предел текучести  $2,4 \times 10^5 \text{ кН/м}^2$  и модуль упругости  $2,1 \times 10^8 \text{ кН/м}^2$ . Схема нагружения состоит из двух вертикальных сосредоточенных сил в 100 кН каждая, приложенных в средних узлах верхнего пояса правого пролета фермы (см. рис. 4). Результаты расчета приведены на рис. 5 для грани фермы  $x_2 = 0$  с учетом симметрии задачи. Стержни, находящиеся на шаге нагружения в пластическом состоянии, показаны на рисунке сплошной жирной линией. Стержни, достигающие предела текучести на данном шаге, показаны жирным пунктиром. На рисунке показаны все изменения в состояниях стержней и нагрузки, при которых они происходят. При уровне нагрузки 435,787 кН наступает текучесть в поперечной связи между загруженными узлами, и формируется механизм разрушения конструкции. Предельный коэффициент нагружения равен 4,542.

На рис. 6 показаны графики зависимости вертикальных перемещений от нагрузки для трех свободных узлов нижнего пояса правого пролета фермы  $n_{11}$ ,  $n_{13}$  и  $n_{15}$  (см. рис. 5). Поведение фермы остается почти линейным до уровня нагрузки около 370,0 кН, что составляет 81,5% от предельной. Время, затраченное на выполнение прямого пошагового расчета 36-узловой фермы на предельную пластическую нагрузку, составляет долю секунды.

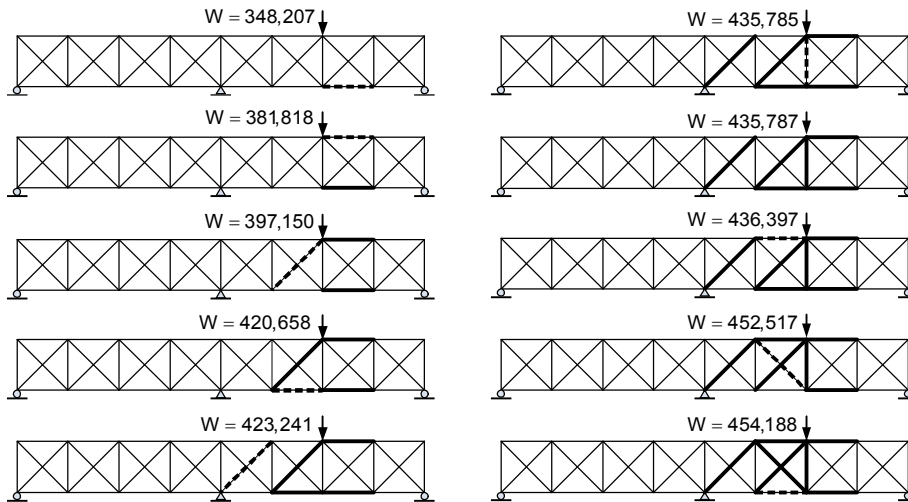


Рис. 5. Последовательный переход стержней фермы в пластическое состояние

### 5. Прямой метод расчета на приспособляемость

Рассмотрим конструкцию с множеством векторов модельных нагрузок  $\bar{p}_k$ . История нагружения  $\mathbf{q}(t)$  конструкции представляет собой линейную комбинацию модельных нагрузок с коэффициентами нагружения  $\alpha_k(t)$ , которые являются циклическими функциями псевдовремени  $t$  с периодом  $T$ :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \bar{p}_k, \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(t + mT). \quad (13)$$

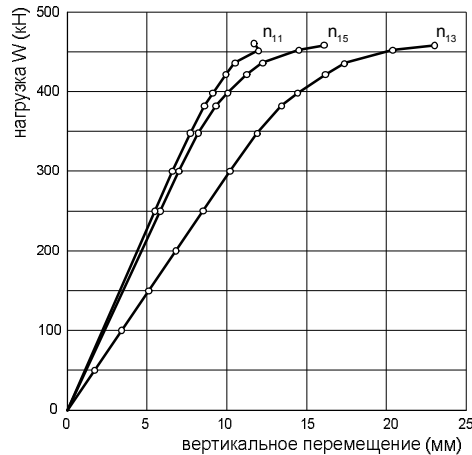


Рис. 6. Вертикальные перемещения узлов правого пролета

Конструкция подвержена нагрузке  $\lambda \mathbf{q}(t)$ , где  $\lambda$  - коэффициент надежности. Целью расчета на приспособляемость является определение наибольшего значения  $\lambda_{\max}$  коэффициента надежности, при котором кон-



струкция испытывает пластические деформации в первых нескольких циклах нагружения, а затем вновь становится упругим и остается упругим в последующих циклах нагружения. Приспособляемость под действием циклической нагрузки анализируется путем вычисления упругопластического поведения фермы для нагрузки  $\lambda \mathbf{q}(t)$  для ряда циклов нагружения. Приспособляемость считается наступившей в цикле нагружения, если в данном цикле ни один из стержней не испытывает пластической деформации. Если конструкция не приспособляется после заданного числа циклов, то полагается, что для принятого коэффициента надежности приспособляемости не наступает.

Максимальный коэффициент надежности приспособляемости определяется при помощи метода бисекции интервала, заключающегося в следующем. Дается начальный коэффициент надежности  $\lambda_0$ , и ферма рассчитывается на нагрузку  $\lambda_0 \mathbf{q}(t)$ . Если ферма для принятой нагрузки не приспособляется, то коэффициент надежности умножается на коэффициент  $2/3$ . Если ферма приспособляется, коэффициент надежности умножается на  $3/2$ . Процедура повторяется до тех пор, пока не отыскивается коэффициент надежности  $\lambda_1$ , для которого приспособляемость наступает, и коэффициент  $\lambda_2$ , для которого приспособляемость не наступает. Максимальный коэффициент надежности приспособляемости лежит в интервале  $[\lambda_1, \lambda_2]$ . Интервал, содержащий максимальный коэффициент надежности приспособляемости, делится пополам и ферма рассчитывается для среднеарифметического коэффициента надежности  $\lambda_m = 0,5(\lambda_1 + \lambda_2)$ . Если ферма приспособляется, то интервал  $[\lambda_1, \lambda_2]$  заменяется на  $[\lambda_m, \lambda_2]$  в противном случае он заменяется на  $[\lambda_1, \lambda_m]$ . После 10 циклов бисекции интервал сокращается до  $1/1024$  от своего первоначального размера, после 20 циклов – приблизительно до  $1/10^6$  начального размера.

Упругопластический расчет для заданного коэффициента надежности выполняется пошагово, как и расчет на предельное пластическое равновесие, однако, для определения инкрементов нагрузки не используется метод постоянных дуг. Вместо этого, период  $T$  разделяется на заданное число  $n_T$  интервалов по времени  $\Delta t = T/n_T$ . Нагрузка в точках на границах интервалов определяется при помощи выражения (13) и коэффициента надежности приспособляемости  $\lambda$ .

Если ферма находится в упругом состоянии, то один шаг по времени совпадает с одним циклом по нагрузке. Если во время шага по времени хотя бы один из стержней фермы изменяет свое состояние, то этот шаг разделяется на несколько шагов нагружения. Конец каждого шага нагружения, за исключением последнего, совпадает с изменением в состоянии одного или нескольких стержней. Последний шаг нагружения в интервале времени задается так, чтобы сумма инкрементов нагрузки по шагам нагружения была равна инкременту нагрузки на шаге по времени. На рис. 7 приведена структурная схема алгоритма определения максимального коэффициента надежности приспособляемости пространственной фермы для заданной истории нагружения  $\mathbf{q}(t)$ . Алгоритм состоит из четырех вложенных циклов. Внешний цикл выполняется по периодам времени до выявления приспособляемости или ее отсутствия. Второй цикл выполняется по временным шагам в одном периоде. Третий цикл выполняется по шагам нагружения в одном временном шаге. Во внутреннем цикле итерационно вычисляется матрица секущей жесткости на шаге нагружения.

Расчет на приспособляемость состоит из последовательности расчетов с изменяющимися коэффициентами надежности. Если для заданного коэффициента надежности ферма остается упругой в первом цикле, то она останется упругой во всех последующих циклах, и, следовательно, приспособляется.



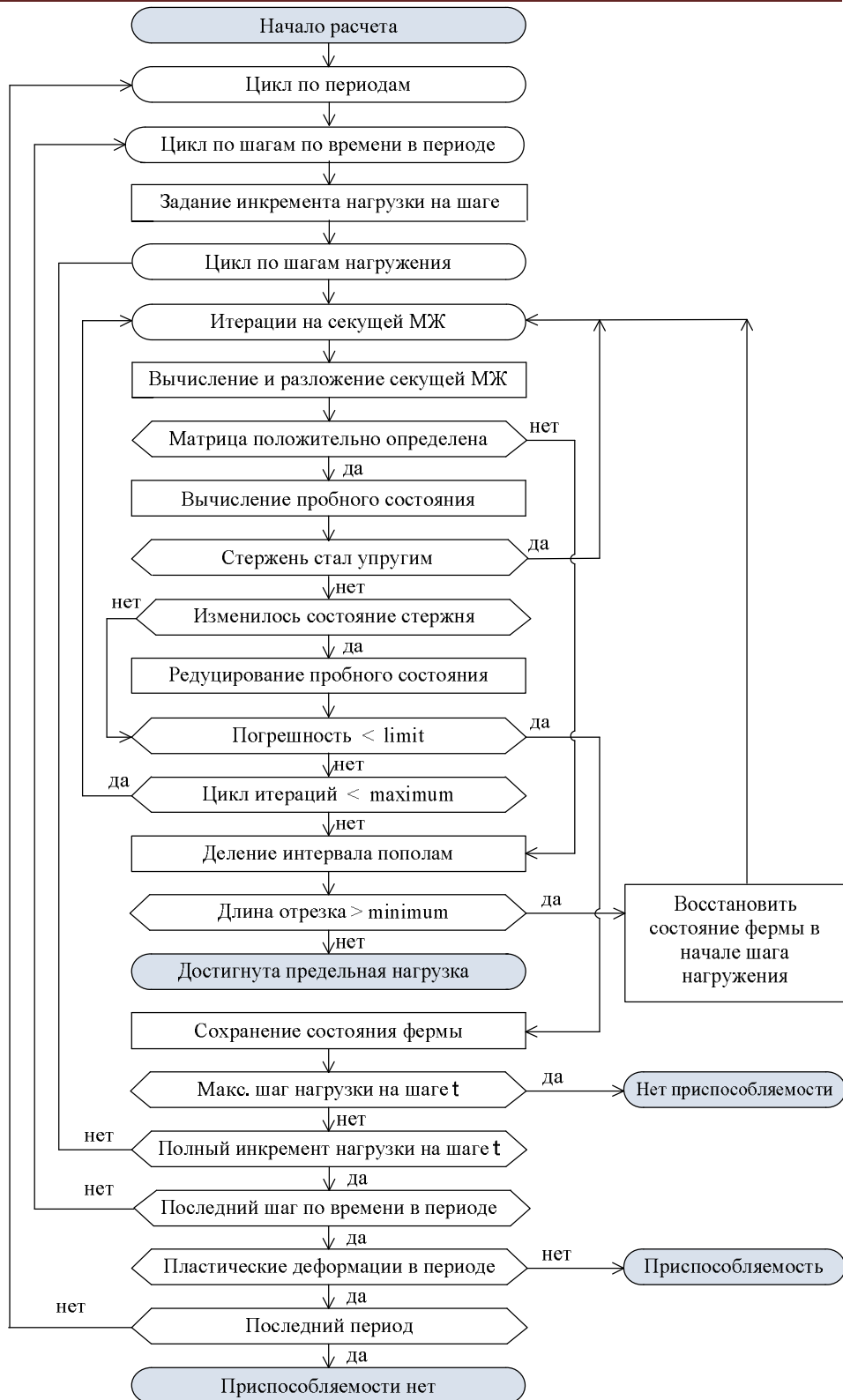


Рис. 7. Структурная схема алгоритма расчета фермы на приспособляемость

Если ферма на шаге нагружения теряет устойчивость, то приспособляемость не наступит. Если ферма испытывает пластические деформации в первом цикле,

но восстанавливает упругость в следующем цикле и сохраняет ее в последующих, то она считается приспособившейся. Если ферма испытывает пластические деформации в последнем цикле расчета, то она не приспособивается. Расчет на приспособляемость прекращается после того, как интервал, содержащий наибольший коэффициент надежности приспособляемости, уменьшен до заданного размера. Это размер может меняться, в зависимости от назначения программы. Для практических задач он может быть задан большим, чем для исследовательских.

Разработанный алгоритм реализован в программном приложении на платформе Java 2, при помощи которого авторами выполнен ряд примеров.

### 6. Расчет двухпролетной фермы на приспособляемость

Данный пример иллюстрирует положения расчета на приспособляемость, изложенные в разд. 5. Здесь использована конструктивная схема фермы, описанная в разд. 4 (см. рис. 4). На ферму действуют периодические вертикальные сосредоточенные силы: силы  $W_1$ , приложенные в двух верхних узлах в середине левого пролета и силы  $W_2$ , приложенные в двух верхних узлах в середине правого пролета фермы. Графики изменения нагрузок по времени показаны на рис. 8. В задаче определяется максимальный коэффициент приспособляемости.

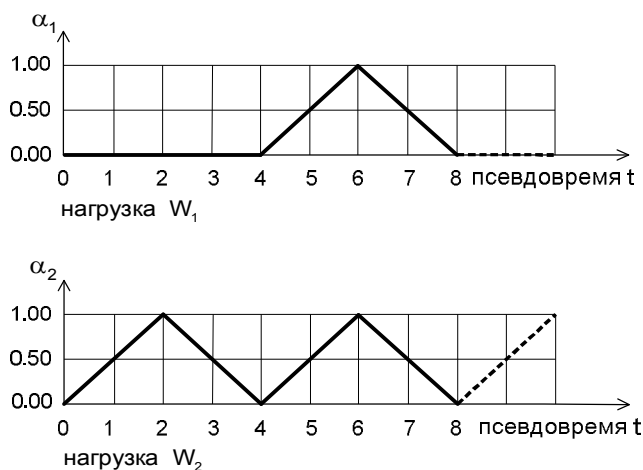


Рис. 8. Периодичность изменения нагрузок, действующих на двухпролетную ферму

Результаты расчета фермы на приспособляемость приведены в таблице 1. Вычисленный интервал максимального коэффициента приспособляемости равен  $[4,206045; 4,206046]$ . Уругопластическое поведение фермы характеризуется следующими параметрами:

максимальный коэффициент упругой работы  $\lambda_e = 3,281;$   
 максимальный коэффициент приспособляемости  $\lambda_s = 4,206;$   
 коэффициент предельной пластической нагрузки  $\lambda_u = 4,542.$

Таблица 1. Результаты расчета фермы на приспособляемость

$\lambda_s$	Приспособляемость	$\lambda_s$	Приспособляемость	$\lambda_s$	Приспособляемость
1,000000	да	4,144531	да	4,205894	да
1,500000	да	4,185547	да	4,205975	да
2,750000	да	4,206055	нет	4,206015	да
5,375000	нет	4,200928	да	4,206035	да
4,062500	да	4,203491	да	4,206045	да
4,718750	нет	4,204773	да	4,206050	нет
4,390635	нет	4,205414	да	4,206047	нет
4,226562	нет	4,205734	да	4,206046	нет

Интервал  $[4,206045; 4,206046]$  коэффициента надежности приспособляемости определен при 25-ти бисекциях. После 14 бисекций был получен интервал  $[4,2054; 4,2061]$ , который является достаточно точным для инженерных целей. На точность определения интервала оказывает влияние максимальное количество циклов приложения нагрузки. Коэффициент возрастает на 1,8% при увеличении количества циклов от 8 ( $\lambda = 4,130330$ ) до 24 ( $\lambda = 4,206045$ ), а затем остается постоянным до 40 циклов. Заданное максимальное количество в 20 шагов нагружения во временном шаге не было достигнуто.

Для коэффициентов надежности 1,00, 1,50 и 2,75 все стержни фермы оставались упругими. При коэффициенте надежности 5,375 была достигнута нагрузка предельного равновесия 454,2 кН между временными точками 1 и 2 в цикле 0. Стержни достигали пластического состояния в последовательности, описанной в предыдущем примере (см. рис. 5). Приспособляемость не наступила.

Коэффициент надежности был уменьшен до 4,0625. Временная точка 2 в цикле 0 была достигнута за 4 шага нагружения, как и для коэффициента надежности 5,375, однако максимальное значение нагрузки в 406,25 кН меньше предельной нагрузки 454,2 кН. В процессе разгрузки до временных точек 3 и 4, а также дальнейшего нагружения до временной точки 5 ферма оставалась упругой. Точка 6 цикла 0 была достигнута за 6 шагов нагружения. На рисунке 9 показана последовательность наступления текучести в стержнях. Разгрузка до точки 8 была полностью упругой.

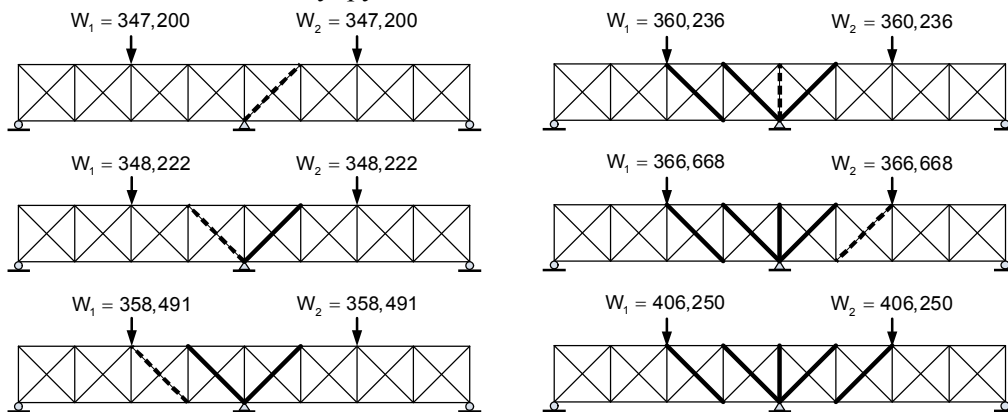


Рис. 9. Текучесть в стержнях на шаге по времени 5 - 6

Так как ферма испытала пластические деформации в цикле 0, выполнялись следующие циклы нагружения. Пластические деформации продолжались до цикла 4, но ферма оставалась упругой в течение всего цикла 5, следовательно, при коэффициенте надежности 4,0625 ферму можно считать приспособившейся.

Следовательно, максимальный коэффициент надежности приспособляемости лежит в интервале  $[4,6025; 5,3750]$ . В таблице 1 приведены результаты для значений коэффициентов надежности, исследовавшихся в дальнейшей процедуре бисекции. На рис. 10 показано изменение абсолютных значений пластических деформаций в наиболее нагруженном поясе и диагональном стержне в зависимости от псевдовремени для коэффициентов  $\lambda = 4,60250$  и  $4,22656$ . Увеличение коэффициента надежности всего лишь на 3,8% весьма существенно изменяет историю пластических деформаций. Для коэффициента надежности 4,22656 пластическая деформация продолжает нарастать во всех циклах. Для этого коэффициента приспособляемость не наступает, а происходит прогрессирующая деформация.

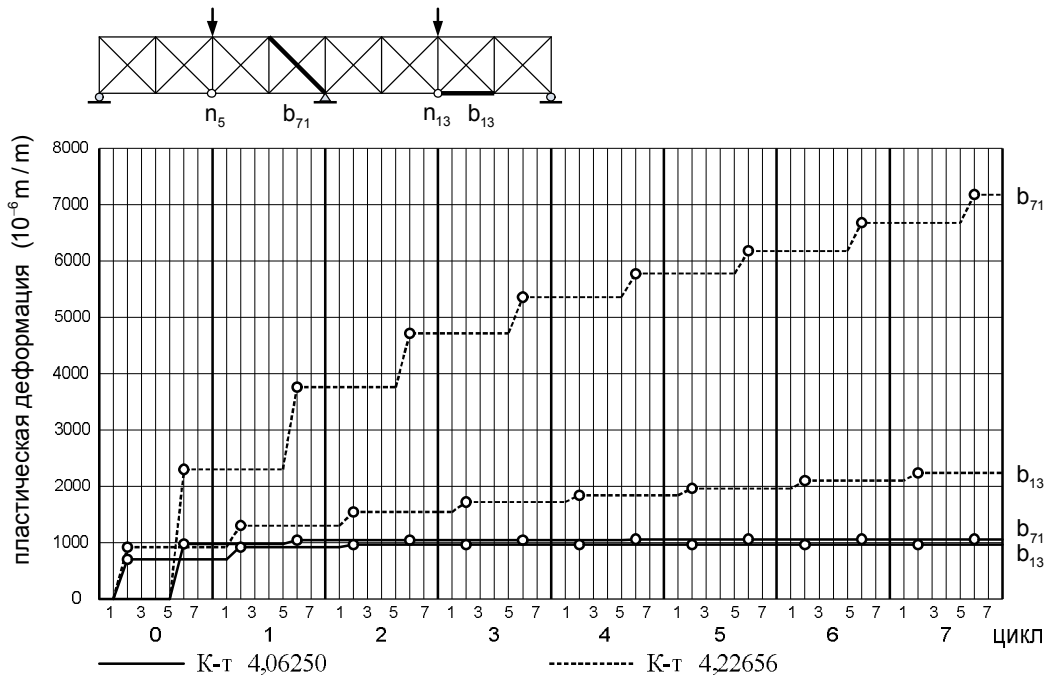


Рис. 10. История пластических деформаций в стержнях  $b_{13}$  и  $b_{71}$

В табл. 2 приведены остаточные напряжения в стержнях для коэффициента надежности 4,22656. Значения определялись в конце цикла. Также, как и пластические деформации, остаточные напряжения продолжают изменяться во всех восьми циклах.

Таблица 2. Остаточные напряжения ( $\text{кН/м}^2$ ) для коэффициента  $\lambda = 4,22656$

Цикл	0	1	2	3	4	5	6	7
$b_{13}$	-30861	-40595	-44077	-4626	-48064	-48614	-48856	-48989
$b_{71}$	48517	48315	48113	47984	47897	47837	47776	47709

На рис. 11 показана история перемещений узлов  $n_5$  и  $n_{13}$  в середине пролета нижнего пояса фермы (см. рис. 10) для коэффициента надежности 4,22656. В первой половине каждого цикла узел  $n_{13}$  загруженного пролета перемещается вниз, а узел  $n_5$  в незагруженном пролете перемещается вверх. Во второй половине цикла оба узла перемещаются вверх. Перемещение вниз обоих узлов последовательно нарастает в течение рассматриваемых восьми периодов.

### 7. Заключение

Примеры, приведенные в данной статье, демонстрируют, что прямой расчет пространственных ферм на пластическое предельное равновесие и приспособляемость при больших перемещениях может быть успешно реализован в программе. Алгоритмы охватывают широкий спектр упругопластического поведения фермы: упругую работу, приспособляемость, прогрессирующие пластические деформации и разрушение при формировании механизма.

Полный набор результатов расчета включает переменные состояния узлов и стержней на всех шагах нагружения всех шагов во времени во всех циклах для всех коэффициентов надежности и является чрезвычайно объемным. Так как состояние стержня не изменяется на шаге нагружения, на печать выводятся лишь каждое изменение состояния каждого стержня фермы. Эта детальная информация позволяет выполнить тщательный анализ поведения конструкции.

Разработанное программное приложение позволяет определять последовательность, в которой стержни достигают текучести, величину нагрузки, при которой это происходит, накопление пластических деформаций в стержнях, остаточные напряжения в стержнях, а также перемещения узлов при знакопеременной пластичности. Оно может быть использовано в качестве тестовой платформы для исследования упругопластического поведения ферм и как инструмент для решения многих прикладных задач.

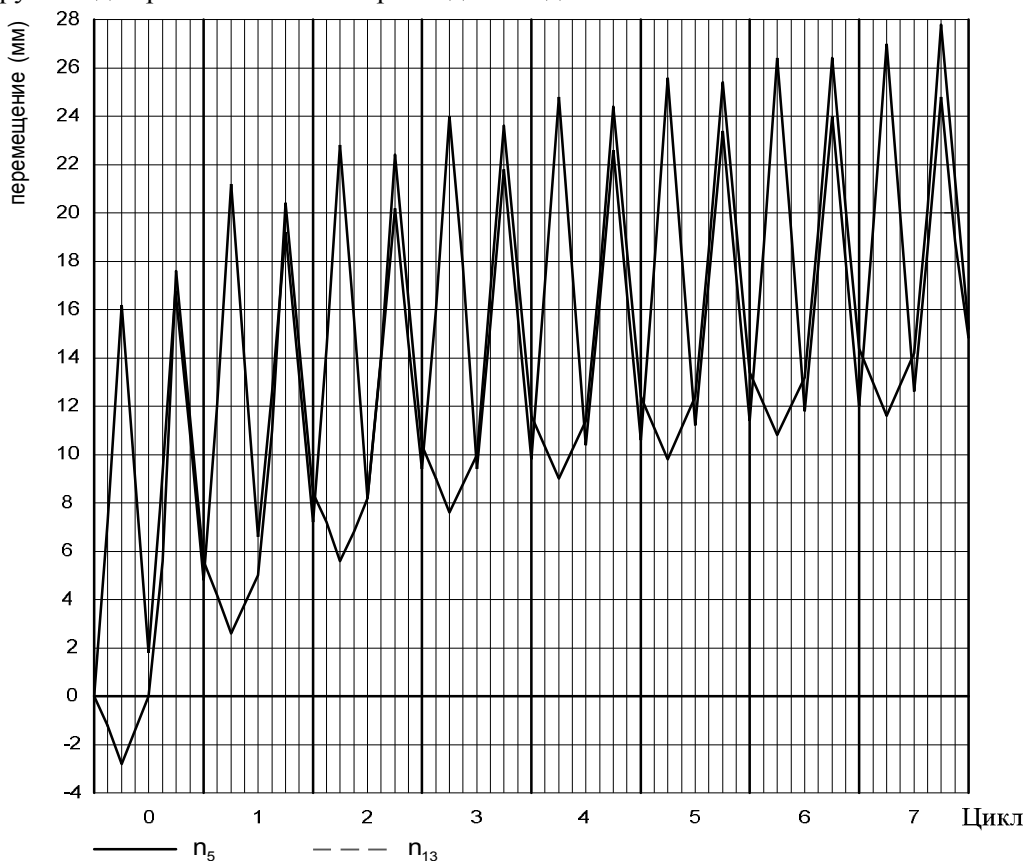


Рис. 11. История перемещений узлов  $n_5$  и  $n_{13}$  при коэффициенте  $\lambda=4,22656$

Время, требуемое для расчета описанной выше двухпролетной фермы при 25 бисекциях и максимальном количестве циклов для каждой бисекции равно 24, составляет 5 секунд для стандартного портативного компьютера. Требуемое время зависит в основном от времени, затрачиваемого на составление и решение систем уравнений. Ожидаемое время расчета аналогичной фермы с 300 узлами – менее 1 часа. Задачи большей размерности могут решаться на компьютерах большей производительности, в том числе вычислительных кластерах.

#### Л и т е р а т у р а

1. Хейдаров А., Галишикова В.В. Аналитический обзор теорем о предельной нагрузке и приспособляемости в упругопластическом расчете стальных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.– 2014.– № 3. – С. 3-18.
2. Галишикова В.В. Вывод разрешающих уравнений задачи геометрически нелинейного деформирования пространственных ферм на основе унифицированного подхода // Вестник ВолГАСУ, серия: Строительство и архитектура. – Волгоград, 2009.–Вып. 14(33). – С. 39-49.

3. Галишникова В.В. Постановка задачи геометрически нелинейного деформирования пространственных ферм на основе метода конечных элементов // Вестник ВолгГАСУ, серия: Строительство и архитектура. – Волгоград, 2009. – Вып.14(33). – С. 50-58.
4. Галишникова В.В. Модификация метода постоянных дуг, основанная на использовании матрицы секущей жесткости // Вестник МГСУ. – Москва, 2009. №2. - С. 63-69.
5. Галишникова В.В. Конечно-элементное моделирование геометрически нелинейного поведения пространственных шарнирно-стержневых систем // Вестник гражданских инженеров (СПбГАСУ). – СПб, 2007. – № 2(11). – С. 101—106.
6. Галишникова В.В. Алгоритм геометрически нелинейного расчета пространственных шарнирно-стержневых конструкций на устойчивость // МСНТ «Наука и технологии»: Труды XXVII Российской школы. – М.: РАН, 2007. – С. 235—244.
7. Галишникова В.В. Обобщенная геометрически нелинейная теория и численный анализ деформирования и устойчивости пространственных стержневых систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. –М.: МГСУ, 2011.

#### References

1. Heidari, A, Galishnikova, VV. (2014). A Review of Limit Load and Shakedown Theorems for the Elastic-Plastic Analysis of Steel Structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 3, 3-18.
2. Galishnikova, VV. (2009). Derivation of the governing equations for the problem of geometrically nonlinear deformation of space trusses on the basis of unified approach. *J. of Volgograd State University for Architecture and Civil Engineering*. Civil Eng. & Architecture, 14(33), 39-49 (in Russian).
3. Galishnikova, VV. (2009). Finite element formulation of the problem of geometrically nonlinear deformations of space trusses. *Journal of Volgograd State University for Architecture and Civil Engineering*. Civil Eng. & Architecture, 14(33), 50-58 (in Russian).
4. Galishnikova, VV. (2009). Modification of the constant arc length method based on the secant matrix formulation. *Journal of Moscow State University of Civil Engineering*, №2, 63-69 (in Russian).
5. Galishnikova, VV. (2007). Finite element modeling of geometrically nonlinear behavior of space trusses. *Journal of Civil Engineers*. Saint-Petersburg University of Architecture and Civil Engineering, 2(11), 101—106 (in Russian).
6. Galishnikova, VV. (2007). Algorithm for geometrically nonlinear stability analysis of space trussed systems. *Proceedings of the XXVII Russian School "Science and Technology"*. Moscow: Russian Academy of Science, 235-244 (in Russian).
7. Galishnikova VV. (2011). Generalized geometrically nonlinear theory and numerical deformation and stability analysis of space trusses. *Dissertation* submitted for the degree of Dr. of Tech. Science. Moscow State University of Civil Engineering, 2011.

### DIRECT ELASTIC-PLASTIC LIMIT LOAD AND SHAKEDOWN ANALYSIS OF STEEL SPACE TRUSSES WITH LARGE DISPLACEMENTS

A. Heidari, V.V. Galishnikova  
*Peoples Friendship University of Russia, Moscow*

A direct method for elastic-plastic limit load and shakedown analysis of steel space trusses with large displacements is treated in this paper. The incremental method for the geometrically nonlinear analysis of space trusses, developed by one of the authors was modified to account for yielding and plastic strains in the bars of the truss. The new method has been implemented in computer software. The examples in this paper show that the direct analysis of space trusses with large displacements can be implemented successfully for both the limit and the shakedown analysis of space trusses on the Java platform. The algorithms cover a wide range of elastic-plastic truss behavior: purely elastic behavior, shakedown, ratcheting and collapse due to the formation of a mechanism. The sequence in which the bars yield, the load levels at which this occurs, the accumulation of the plastic strains in the bars, the residual stresses in the bars and the node displacements during ratcheting can all be evaluated. The computer application is therefore suitable as a test platform for elastic-plastic truss behavior. It can be applied to many other problems of elastic-plastic space truss analysis.

KEY WORDS: steel space trusses, large displacements, plasticity, limit analysis, shakedown.