Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3 (1). 2010. С. 98–103

УДК 530.145; 51-7

Модель квантовых измерений Курышкина–Вудкевича

А. В. Зорин*, **Л. А. Севастьянов**†

* *Лаборатория вычислительной физики и математического моделирования*

† *Кафедра систем телекоммуникаций*

Российский университет дружбы народов

ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе показано совпадение операциональной функции распределения вероятностей К. Вудкевича с квантовой функцией распределения В. Курышкина. Показано их соответствие частотно-временной спектрограмме Л. Коэна. Дано короткое обсуждение связи изучаемых функций распределения со статистической моделью квантовой теории измерений.

Ключевые слова: частотно-временная спектрограмма, квантовая функция распределения, операциональный подход к теории квантовых измерений.

1. Введение

Проблема квантовых измерений привлекала к себе внимание исследователей с самого начала квантовых исследований. Первую модель квантовых измерений предложил Дж. Нейман [1], развитием его идей стала статистическая модель квантовых измерений (см., например [2, 3]). Имеется большое число публикаций с альтернативными подходами

Особое место занимают публикации, посвящённые статистической интерпретации результатов квантовых измерений, начиная с работ [4–6]. В реализацию строящейся модели внесли свой вклад авторы работ [7–12].

В своей оценке работ В. Курышкина Л. Коэн писал [13] о родстве квантовой механики с неотрицательной квантовой функцией распределения и своего частотно-временного распределения, так называемой спектрограммы, в теории обработки сигналов. Там же он указал на родственную им обоим работу [14].

В своей работе К. Вудкевич посчитал распределение вероятностей электромагнитной волны, рассеянной движущимся заряженной частицей, при условии, что до рассеяния волна имела заданное распределение. В терминах функции Вигнера [15] этот результат выглядел следующим образом. До взаимодействия функция Вигнера заряженной частицы равна W_ψ, где ψ — состояние частицы, функция Вигнера исходной волны равна W_φ, где φ — состояние волны до рассеяния, после взаимодействия рассеяния функция распределения вероятностей рассеянной волны имеет вид $P = W_\psi * W_\varphi$. Этот пример позволил К. Вудкевичу на основании результатов [16] и [17] сформулировать и обосновать своё основное утверждение.

2. Предпосылки построения операциональной функции распределения вероятностей для измеряемой квантово-механической наблюдаемой

Вероятность обнаружить состояние $|\psi\rangle$ в другом состоянии, описываемом матрицей плотности $\hat\rho$, равна $\mathrm{Tr}\,(\hat\rho\hat P)$, где $\hat P = |\psi\rangle\,\langle\psi|$. Мы можем рассматривать проекционный оператор $\hat P$ как фильтрующее устройство. Чтобы сравнивать состояния в фазовом пространстве, нужно сдвинуть одно из них относительно другого

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2010 г.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-00467-а.

на величины q и p соответственно. В координатном пространстве этот сдвиг осуществляется оператором $\exp\{iq\hat{p}\}$, где $\hat{p}$ — генератор пространственного сдвига. В импульсном пространстве можно использовать оператор $\exp\{ip\hat{x}\}$, так как $\hat{x}$ — генератор сдвига в пространстве импульсов. Комбинируя их в один унитарный оператор $\hat{U}(q,p)$, мы вводим определение

$$P(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Tr}\,\left[\hat{\rho}\hat{U}^{-1}(q,p)\,\hat{P}\hat{U}(q,p)\right].$$

Для чистых состояний $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ введённое соотношение принимает вид

$$P(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\int \psi^*(x+q)\,\varphi(x)\exp\left\{\frac{-ipx}{\hbar}\right\}\mathrm{d}x\right|^2. \tag{1}$$

Из соотношения (1) следует соотношение $P(0,0) = \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\langle\psi \mid \varphi\rangle\right|^2$: квадрат модуля скалярного произведения состояний $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ в гильбертовом пространстве состояний является «склонностью» состояний $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ принимать одинаковые значения координат и импульсов.

В работе [14] автор пишет: «Я вывожу положительно определённую квантовую функцию распределения вероятностей $P(q,p)$, непосредственно связанную с реальной процедурой измерения. Чтобы её определить, мне нужно устройство, действующее как фильтр, чтобы различить текущие координату и импульс исследуемой системы».

Мысль, что любое реальное измерение требует детектора и фильтрующего устройства, не является квантово механической. В [13] автор пишет о фильтрующем свойстве измерений частотных характеристик оптического сигнала на конечном промежутке времени.

3. Частотно-временная спектрограмма

Чтобы получить распределение, представляющее частоты как функции времени, нужно разбить время на интервалы и проводить анализ Фурье для каждого отрезка времени. В более общем случае мы можем взять функцию, имеющую пик в интересующее нас время, и умножить её на функцию сигнала. В результате мы получим модифицированный сигнал, с наибольшим весом в интересующее нас время и при этом вклады первоначального сигнала во все другие отрезки времени будут подавлены. Эта функция называется смотровой, поскольку она пропускает лишь часть сигнала, а именно ту часть, которая приходится на интересующий нас промежуток времени. Рассмотрим теперь преобразование Фурье модифицированного сигнала, тогда результирующий спектр будет отображать распределение частот в нужный момент времени. В частности, если $s(t)$и $W(t)$ — сигнал и смотровая функция соответственно, то смотровой сигнал будет $s(\tau)W(\tau-t)$, где теперь τ — текущее время и t — интересующее нас время. Тогда преобразование Фурье малого периода будет

$$S_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int s(\tau)W(\tau-t)\exp(-i\omega\tau),$$

и плотность энергетического спектра в момент времени t с частотой ω имеет вид

$$P(t,\omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int s(\tau)W(\tau-t)\exp(-i\omega\tau)\right|^2, \tag{2}$$

что можно рассматривать как плотность частот в момент времени t. Частотно-временное распределение (2) называется спектрограммой. Величина и характер взвешивания отображается выбором смотровой функции, который находится в нашем распоряжении. Выбирая различные смотровые функции, мы можем получить разнообразные оценки для физических величин.

4. Координатно-импульсная спектрограмма — квантовая функция распределения

Мы можем провести схожую аргументацию для квантово-механической волновой функции. При этом вместо частоты и времени рассматриваем координаты и импульс точки. Предположим, что имеем координатную волновую функцию $\psi(x)$, тогда волновая функция, зависящая от импульса материальной точки, будет иметь вид
$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(x) \exp\left\{\frac{-ipx}{\hbar}\right\} \mathrm{d}x$$
и вероятность значений импульса задаётся выражением $\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2$. Однако эта вероятность характерна для всего пространства в целом, и с её помощью нельзя уточнить, что происходит с материальной точкой в конкретной области пространства. Предположим, что мы хотим узнать свойства физических величин в положении x. По аналогии со случаем частотно-временного распределения мы удерживаем волновую функцию в окрестности некоторой координаты q, придавая ей в точке q существенно больший вес, чем в других точках. Это достигается умножением волновой функции на смотровую функцию с пиком в окрестности q, т.е. приходим к новой волновой функции. Чем больший пик имеет смотровая функция в окрестности q, тем более локализованную информацию мы можем получить. В частности, если $\psi(x)$ — волновая функция и $\varphi(x-q)$ — смотровая функция с пиком в окрестности $x = q$, тогда преобразованная волновая функция будет иметь вид $\varphi_q(x) = \psi(x)\varphi(x-q)$. Соответствующая ей импульсная волновая функция принимает вид
$$\tilde{\varphi}_q(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\left\{\frac{-ipx}{\hbar}\right\} \psi(x)\varphi(x-q)\mathrm{d}x,$$
и функция распределения импульсов принимает вид
$$P_K(q,p) = |\tilde{\varphi}_q(p)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\int \psi(x)\,\varphi(x-q)\exp\left\{\frac{-ipx}{\hbar}\right\}\mathrm{d}x\right|^2$$
Это выражение в точности совпадает с координатно-импульсным распределением, построенным В. Курышкиным [18–20].

5. Процедура построения операциональной функции распределения вероятностей для измеряемой квантово-механической наблюдаемой

Авторы работы [21] осознали, что, как и при измерении времени и частоты в оптике, в квантовой механике присутствует неизбежное влияние фильтрующих свойств на любое разрешающее наблюдение динамики в координатно-импульсном (фазовом) пространстве. Важность этого наблюдения автор [13] иллюстрирует следующим примером. В качестве возможной схемы измерения одномерной координаты и импульса заряженной частицы предполагается использовать импульсное взаимодействие (лазерный импульс, например) с потенциалом $U_q(x)$, центрированным вокруг детектируемого положения q и с течением времени меняется по δ-образному закону $\delta(t-t_0)$, сосредоточенному в момент времени t_0. Волновая функция частицы, движущейся со скоростью v, под воздействием потенциала

$V_q(x,t) = U_q(x) * \delta(t - t_0)$ «подвергается фильтрации». Изменяя параметр q, мы можем пробежать по всем x. Результат взаимодействия даёт нам информацию о положении частицы в момент времени t_0.

По аналогии с механизмом детектирования в оптике этот потенциал взаимодействия играет роль фильтрующего устройства, которое как бы «подстраивается» простым изменением параметра q. Этот фильтр рассеивает волновую функцию измеряемой частицы. В приближении Борна рассеянная волновая функция движущейся частицы записывается в виде

$$\varphi_s(x,t) = \int \mathrm{d}t_1 \int \mathrm{d}x_1 K_0(x,t;x_1,t_1) V_q(x_1,t_1) \varphi(x_1,t_1), \tag{3}$$

где K_0 — это свободный Шрёдингеровский пропагатор, который в дальней зоне от области взаимодействия вдоль прямой линии, задаваемой уравнением $x = vt$, имеет асимптотический характер

$$K_0(vt,t;x_1,t_1) \underset{t\to\infty}{\to} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{imv^2 t}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{imv^2 t_1}{2\hbar}\right) \exp\left(-\frac{imvx_1}{\hbar}\right). \tag{4}$$

Квадрат модуля рассеянной волны, измеренный детектором, расположенным далеко от области взаимодействия, содержит измеренную информацию о положении q и об импульсе $p = mv$ детектируемой частицы φ в момент времени t_0. Потенциал взаимодействия $U_q(x)$, который в случае рассеивающего лазерного импульса является просто окружающим импульс электрическим полем, может быть ассоциирован с «экспериментальным» квантово механическим состоянием фильтрующего устройства, которое можно обозначить через $\psi^*(x+q)$ (по причинам последующего упрощения преобразований). Запишем этот квадрат модуля в виде $\left|\int \mathrm{d}x_1 K_{\exp}(x,t;x_1,t_0) \varphi(x_1,t_0)\right|^2$, где $K_{\exp} = K_0 * V_q$ — пропагатор прохождения через наше экспериментальное фильтрующее устройство. Этот пропагатор пропорционален величине $K_0 * \psi^*(x+q)$, т.е. волновой функции фильтра.

Из выражений (3) и (4) получаем двухпараметрическое выражение для квадрата модуля рассеянной волны, которую К. Вудкевич предложил называть *операциональным координатно-импульсным распределением вероятностей*

$$P(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int \psi^*(x+q) \varphi(x) \exp\left\{\frac{-ipx}{\hbar}\right\} \mathrm{d}x \right|^2. \tag{5}$$

Выражение (5) буквально совпадает с выражением неотрицательной квантовой функции распределения В. Курышкина [18–20].

Первая координатно-импульсная функция распределения (4) была предложена Ю. Вигнером [15], который с самого начала понимал, что введённая им функция не может быть интерпретирована в качестве плотности распределения вероятностей, так как она может принимать отрицательные значения.

С целью сделать её положительно определённой предпринимались различные попытки, большей частью сглаживания, например, свёрткой с гауссовой или с другими формальными функциями на фазовом пространстве. Их общей слабой стороной оставалось невнимание к проблеме (конструкции, схеме) реалистического квантово-механического измерения.

Функция Курышкина–Вудкевича (5) претендует на эту роль, если ψ — волновая функция измерительного прибора, т.е. аналог смотровой функции из оптической теории частотно-временной спектрограммы [13]. Как и в оптике, она включает в себя и фильтр, и детектор.

Рассмотрим маргинальное распределение функции Курышкина–Вудкевича (5)

$$P(q) = \int P(q,p)\,\mathrm{d}p = \int \varphi^*(x) \left|\psi(x+q)\,\mathrm{d}x\right|^2. \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует выражение для фазово-ожидаемого среднего значения координаты q

$$\langle q\rangle_P = \int qP\,(q)\mathrm{d}q = \langle q\rangle_\psi - \langle q\rangle_\varphi\,. \tag{7}$$

Из соотношения (7) видно, что величина $\langle q\rangle_P$ измеряет относительное положение детектируемого состояния φ по отношению к положению состояния (фильтра/детектора) ψ. Этот результат полностью согласуется со схемой измерения, описанной К. Вудкевичем при построении его фазовой функции распределения вероятностей.

Имеется глубокая связь функции распределения Курышкина–Вудкевича с функцией распределения Вигнера

$$P\,(q,p) = \int W_\psi\,(q+x,p+y) * W_\varphi\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Соотношение (8) отвечает на фундаментальный вопрос о правильном соответствии между функцией Вигнера и реально измеряемой координатно-импульсной функцией распределения в фазовом представлении квантовой механики.

В оптике аналоги соотношений (8) и (5) связывают частотно-временную спектрограмму со смотровой функцией частотно-фильтрующего устройства.

В работе [22] соотношение (5) было обобщено на случай, когда состояния и измеряемого объекта ρ_1 и квантового фильтрующего детектора ρ_2 являются смешанными. Полученный авторами результат также буквально совпадает с выражением неотрицательной квантовой функции распределения В. Курышкина для смешанных состояний [18–20].

6. Операциональный постулат К. Вудкевича и квантовая функция распределения В. Курышкина

Один из результатов конструкции К. Вудкевича — положительная определённость функции распределения вероятности измеренных значений наблюдаемой. Результат о положительной определённости свёртки двух функций Вигнера был доказан в работе [23]. И оба этих результата подтверждают тезис о положительно определённой квантовой функции распределения вероятностей наблюдения измеренных величин. Именно этот тезис В. Курышкин положил в основу построения своего правила квантования, однозначно соответствующего (согласно работам [9, 11]) неотрицательной квантовой функции распределения. Затем построил и саму квантовую функцию распределения, и правило квантования, зависящее от вспомогательных функций $\{\varphi_k\}$.

Литература

1. *фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.
2. *Холево А. С.* Статистическая структура квантовой теории. — М.: ИКИ, 2003.
3. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979.
4. *Терлецкий Я. П.* О предельном переходе квантовой механики в классическую // ЖЭТФ. — 1937. — Т. 7, вып. 11. — С. 1290–1298.
5. *Blokhintzev D. I.* The Gibbs Quantum Ensemble and its Connection with the Classical Ensemble // Journ. of Phys. — 1940. — Vol. II, No 1. — Pp. 71–74.
6. *Блохинцев Д., Немировский П.* Связь квантового ансамбля с классическим ансамблем Гиббса. II // ЖЭТФ. — 1940. — Т. 10, вып. 11. — С. 1263–1266.

7. *Moyal J. E.* Quantum Mechanics as a Statistical Theory // Proc. Cambr. Philos. Soc. — 1949. — Vol. 45. — Pp. 99–124.
8. *Mehta C. L.* Phase-Space Formulation of the Dynamics of Canonical Variables // Journ. Math. Phys. — 1964. — Vol. 5, No 5. — Pp. 677–686.
9. *Cohen L.* Generalized Phase-Space Distribution Functions // Journ. Math. Phys. — 1966. — Vol. 7, No 5. — Pp. 781–786.
10. *Shankara T. S.* A New Phase Space Distribution Function // Progr. Theor. Phys. — 1967. — Vol. 37. — P. 1335.
11. *Shewell J. R.* On the formation of Quantum-Mechanical Operators // Amer. J. Phys. — 1959. — Vol. 27. — Pp. 16–21.
12. *Курышкин В. В.* Фазовые представления матрицы плотности и квантовые функции распределения // Известия ВУЗов. Физика. — 1969. — № 4. — С. 111–115.
13. *Коэн Л.* Распределения Курышкина и их обобщения // Дискуссионные вопросы квантовой физики. — М.: Изд. РУДН, 1993. — С. 49–58.
14. *Wodkiewich K.* Operational Approach to Phase-Space Measurements in Quantum Mechanics // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 52. — P. 1064.
15. *Wigner E.* On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. — 1932. — Vol. 40. — Pp. 749–759.
16. *Aharonov Y., Albert D. Z., Au C. K.* New Interpretation of the Scalar Product in Hilbert Space // Phys. Rev. Lett. — 1981. — Vol. 47. — Pp. 1029–1031.
17. *O'Connell R. F., Rajagopal A. K.* New Interpretation of the Scalar Product in Hilbert Space // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — Pp. 525–526.
18. *Курышкин В. В.* К построению квантовых операторов // Известия ВУЗов. Физика. — 1971. — № 11. — С. 102–106.
19. *Kuryshkin V. V.* La Mecanique Quantique Avec une Fonction Nonnegative de Distribution Dans 1'espace des Phases // Annales Inst. Henri Poincare. — 1972. — Vol. 17, No 1. — Pp. 81–95.
20. *Kuryshkin V. V.* Some Problems of Quantum Mechanics Possessing a Non-Negative Phase-Space Distribution Function // Int. J. Theor. Phys. — 1973. — Vol. 7, No 6. — Pp. 451–466.
21. *Eberly J. H., Wodkiewich K.* The Time-Dependent Physical Spectrum of Light // J. Opt. Soc. Amer. — 1977. — Vol. 67. — P. 1252.
22. Canonical and Measured Phase Distributions / U. Leonhardt, J. A. Vaccaro, B. Bohmer, H. Paul // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51. — P. 84.
23. *O'Connel R. F., Wigner E. P.* Some Propetries of a Non-negative Quantum-Mechnical Distribution Function // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 85A, No 3. — Pp. 121–126.

UDC 530.145; 51-7

Kuryshkin-Wodkiewicz Quantum Measurement Model

A. V. Zorin*, L. A. Sevastianov†

* *Computational Physics and Mathematical Modeling Research Laboratory*
† *Telecommunication Systems Department*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We show the coincidence of K. Wodkiewicz operational probability distribution function and V. Kuryshkin quantum distribution function. The correspondence of both functions to L. Cohen time-frequency spectrogram is shown. We discuss in brief the connection of investigated distribution functions with statistical model of quantum measurement theory.

Key words and phrases: frequency-time spectrogram, quantum distribution function, operational approach to quantum measurement theory.