Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 32–49
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49
EDN: ENHOAY

# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

**А. Ашыралыев**[1,2,3], **Ч. Ашыралыев**[1,4]

[1] *Бахчешехир университет, Стамбул, Турция*
[2] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[3] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[4] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

Исследуются разностные схемы второго порядка точности для приближенного решения нелокальных по времени параболических задач интегрального типа. Установлены теоремы об устойчивости $r$-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона и неявной разностной схемы второго порядка точности для приближенного решения нелокальных по времени параболических задач интегрального типа в гильбертовом пространстве с самосопряженным положительно определенным оператором. В качестве приложения получены оценки устойчивости решений второго порядка точности по $t$ разностных схем для одномерной и многомерной нелокальной во времени параболической задачи. Приведены численные результаты.

**Ключевые слова:** нелокальная параболическая задача, разностная схема второго порядка точности, схема Кранка—Николсона, неявная разностная схема, устойчивость

**Для цитирования:** *А. Ашыралыев, Ч. Ашыралыев.* Разностные схемы второго порядка точности для нелокальных по времени параболических задач интегрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 32–49. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49

## 1. Введение

Многие задачи физики и прикладных наук сводятся к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений параболического типа. Приближенные решения и корректность локальных и нелокальных краевых задач для параболических уравнений широко исследовались в ряде работ (см., например, [1–41] и приведенные там ссылки).

В работе [12] исследована однозначная разрешимость нелокальной по времени краевой задачи для параболического уравнения в гильбертовом пространстве $H$ с самосопряженными положительно определенными операторами $A$ и $B$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t),\ 0 < t < T, \\ u(0) = \int\limits_0^T a(s)Bu(s)ds + \varphi \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f : (0,T) \longrightarrow H$ и $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные функции, $\varphi \in H$ — известный элемент, оператор $B$ ограничен и $D(B) = H$.

В работе [17] исследована корректность нелокальной по времени краевой задачи (1.1). Представлены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы Роте и Кранка—Николсона для приближенного решения задачи (1.1). Установлена корректность дифференциальных и разностных задач в пространствах Гёльдера. В примерах даны численные иллюстрации.

В настоящей работе одношаговые разностные схемы второго порядка точности для приближенного решения задачи (1.1) строятся с помощью разложения Тейлора на двух точках, порожденных $A$ и $A^2$. Установлены теоремы об устойчивости и коэрцитивной устойчивости $r$-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона и неявной разностной схемы второго порядка точности для приближенного решения задачи (1.1) в гильбертовом пространстве с самосопряженным положительно определенным оператором. В качестве приложения получены оценки устойчивости решений разностных схем второго порядка точности по $t$ для одномерной и многомерной нелокальной во времени параболической задачи. Приведены численные результаты.

## 2. Устойчивость $r$-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона

Пусть $C_\tau(H) = C([0,T]_\tau, H)$, $C_\tau^\alpha(H) = C_0^\alpha([0,T]_\tau, H])$, $\alpha \in (0,1)$, — банаховы пространства всех $H$-значных сеточных функций $w_\tau = \{w_k\}_{k=0}^N$, определенных на $[0,T]_\tau = \{t_k = k\tau, 0 \leqslant k \leqslant N, N\tau = T\}$ с соответствующими нормами

$$\|w_\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{0\leqslant k\leqslant N} \|w_k\|_H, \qquad \|w_\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \sup_{1\leqslant k<k+n\leqslant N} (N-n)^{-\alpha}(k)^\alpha \|w_{k+n} - w_k\|_H + \|w_\tau\|_{C_\tau(H)}.$$

Для приближенного решения краевой задачи (1.1) мы вводим $r$-модифицированную разностную схему Кранка—Николсона

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k, \quad \varphi_k = f\Big(t_k - \frac{\tau}{2}\Big), \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \quad \varphi_k = f\Big(t_k - \frac{\tau}{2}\Big), \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \\ u_0 = \frac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_iBu_i\tau + \varphi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Из положительности оператора $A$ следует существование ограниченных шаговых операторов

$$C = (I + \tau A)^{-1}, \quad R = \Big(I - \frac{\tau A}{2}\Big)\Big(I + \frac{\tau A}{2}\Big)^{-1}, \quad P = \Big(I + \frac{\tau A}{2}\Big)^{-1}.$$

**Лемма 2.1.** *При любом $k = 1, \ldots, N$ выполнены оценки*

$$\|C\|_{H\to H} \leqslant 1, \quad \left\|R^k\right\|_{H\to H} \leqslant 1, \quad \left\|(I-R)R^k\right\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{2.2}$$

**Лемма 2.2.** *Предположим, что*

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right]\|B\| < 1. \tag{2.3}$$

*Тогда оператор*

$$I - \frac{a_0B + a_NBR^{N-r}C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_iBC^i\tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_iBR^{k-r}C^r\tau$$

*имеет обратный $Q_\tau$, и выполнена следующая оценка:*

$$\|Q_\tau\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{1 - \left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right]\|B\|} = M_{a,b}. \tag{2.4}$$

Доказательство этой оценки основано на спектральном представлении самосопряженного положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

**Лемма 2.3.** *Для решения разностной схемы* (2.1) *имеет место следующая формула*:

$$u_k = \begin{cases} C^k u_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} C^{k-j+1}\varphi_j \tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ R^{k-r}C^r u_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} R^{k-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{k} R^{k-j}P\varphi_j\tau, \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \\ Q_\tau \left\{ \dfrac{a_N B}{2}\tau \left[ \sum\limits_{j=1}^{r} R^{N-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{N} R^{N-j}P\varphi_j\tau \right] + \right. \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i B \sum\limits_{j=1}^{i} C^{i-j+1}\varphi_j\tau^2 + \varphi + \\ \left. + \sum\limits_{i=r+1}^{N-1} a_i B \left[ \sum\limits_{j=1}^{r} R^{i-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{i} R^{i-j}P\varphi_j\tau \right]\tau \right\}, \quad k=0. \end{cases} \tag{2.5}$$

*Здесь*

$$Q_\tau = \left( I - \frac{a_0 B + a_N B R^{N-r}C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i \tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau \right)^{-1}.$$

*Доказательство.* Для решения разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k, \ \varphi_k = f(t_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\dfrac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \\ \varphi_k = f\Big(t_k - \dfrac{\tau}{2}\Big), \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \ u_0 \text{ — заданный элемент}, \end{cases} \tag{2.6}$$

имеем формулу

$$u_k = \begin{cases} C^k u_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} C^{k-j+1}\varphi_j \tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ R^{k-r}C^r u_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} R^{k-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{k} R^{k-j}P\varphi_j\tau, \quad r+1 \leqslant k \leqslant N. \end{cases} \tag{2.7}$$

Применяя эту формулу и нелокальное условие $u_0 = \dfrac{a_0 B u_0 + a_N B u_N}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i B u_i \tau + \varphi$, получим

$$\begin{aligned} u_0 = {} & \frac{a_0 B u_0 + a_N B R^{N-r} C^r u_0}{2}\tau + \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i u_0 \tau + \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau u_0 + \\ & + \frac{a_N B}{2}\tau \left[ \sum_{j=1}^{r} R^{N-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum_{j=r+1}^{N} R^{N-j}P\varphi_j\tau \right] + \sum_{i=1}^{r} a_i B \sum_{j=1}^{i} C^{i-j+1}\varphi_j\tau^2 + \\ & + \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B \left[ \sum_{j=1}^{r} R^{i-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum_{j=r+1}^{i} R^{i-j}P\varphi_j\tau \right]\tau + \varphi. \end{aligned}$$

По лемме 2.1 оператор

$$I - \frac{a_0 B + a_N B R^{N-r} C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i \tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau$$

имеет обратный $Q_\tau$. Отсюда следует формула (2.5). Лемма 2.3 доказана. □

**Теорема 2.1.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число. Тогда разностная схема* (2.1) *устойчива в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$, а для решения разностной схемы* (2.1) *в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$ выполняются следующие неравенства устойчивости*:

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}], \tag{2.8}$$

$$\| u^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}]. \tag{2.9}$$

*Доказательство.* Неравенства устойчивости

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant \left[ \|u_0\|_H + T\| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \right], \tag{2.10}$$

$$\| u^\tau\|_{C^\alpha_\tau(H)} \leqslant M[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(H)}] \tag{2.11}$$

для решения разностной схемы (2.6) в $C_\tau(H)$ и $C^\alpha_\tau(H)$ были доказаны ранее (см. [20]). Используя формулу (2.5) и оценку (2.2), получаем оценки для решения разностной схемы (2.1) в $C_\tau(H)$ и $C^\alpha_\tau(H)$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}], \tag{2.12}$$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(H)}]. \tag{2.13}$$

Поэтому оценки (2.8) и (2.9) следуют из оценок (2.10)–(2.13). Теорема 2.1 доказана. □

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве $C([0,T],H)$ непрерывных $H$-значных функций, определенных на $[0,T]$, не является корректной для произвольного положительного оператора $A$ и пространства $H$, то не имеет места равномерная по $\tau > 0$ корректность разностной схемы (2.1) в норме $C_\tau(H)$. Это означает, что коэрцитивная норма

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} = \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau(H)} + \|\{Au_k\}_1^r\|_{C_\tau(H)} + \left\| \left\{ A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\}_{r+1}^N \right\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к бесконечности при $\tau \to +0$. Исследование разностной схемы (2.1) по норме $C_\tau(H)$ позволяет установить порядок роста этой нормы.

**Теорема 2.2.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число. Тогда для решения разностной схемы* (2.1) *имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости*

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| A\varphi \|_H \Big].$$

*Доказательство.* Доказательство теоремы 2.2 основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M\Big[ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| Au_0\|_H \Big]$$

для решения разностной схемы (2.6) в $C_\tau(H)$ из монографии [20], а также на оценке

$$\| Au_0 \|_H \leqslant M_{a,b}\Big[ \| A\varphi \|_H + \min\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H} |\} \|\varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \Big]$$

для решения разностной схемы (2.1) в $C_\tau(H)$. □

**Теорема 2.3.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число и $\varphi \in D(A)$. Тогда для решения разностной схемы* (2.1) *выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в $C^\alpha_\tau(E)$*:

$$\begin{aligned} \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C^\alpha_\tau(H)} + \| \{Au_k\}_1^r \|_{C^\alpha_\tau(H)} + \left\| \left\{ A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\}_{r+1}^N \right\|_{C^\alpha_\tau(H)} \leqslant \\ \leqslant \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(E)} + M_{a,b} \|A\varphi\|_H. \end{aligned} \tag{2.14}$$

*Доказательство.* Корректность разностных схем первого и второго порядков точности в $C^\alpha_\tau(E)$ для задачи Коши получена в работах [10, 20]. Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательств из работ [10, 20] и опирается на оценку коэрцитивной устойчивости

$$\| Au_0 \|_E \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(E)} + M \| A\mu \|_E$$

для решения разностной схемы (2.1). □

**Замечание 2.1.** Переходя к пределу при $\tau \longrightarrow 0$ в (2.14), можно получить корректность нелокальной краевой задачи (1.1) в $C_0^\alpha([0,T],H)$.

**Замечание 2.2.** Заметим, что оценки устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости разностной схемы (2.1) в теоремах 2.1–2.3 в произвольном банаховом пространстве $E$ верны в предположении, что оператор

$$I-\frac{a_0B+a_NBR^{N-r}C^r}{2}\tau-\sum_{i=1}^{r}a_iBC^i\tau-\sum_{i=r+1}^{N-1}a_iBR^{k-r}C^r\tau h$$

имеет ограниченный обратный в $E$.

Теперь рассмотрим приложения результатов теорем 2.1–2.3.

Во-первых, рассматривается нелокальная краевая задача для одномерного параболического уравнения

$$\begin{cases} v_t-(a(x)v_x)_x+\delta v=f(t,x), & 0<t<T,\quad 0<x<l,\\ v(0,x)=\int\limits_0^T\alpha(s)Bv(s,x)ds+\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ v(t,0)=v(t,l),\quad v_x(t,0)=v_x(t,l), & 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь $0<a\leqslant a\left(x\right)$, $a(l)=a(0)$ и $\delta$ — положительная константа. При условиях согласования задача (2.15) имеет единственное решение $v(t,x)$ для гладких функций $a\left(x\right)$, $x\in\left(0,l\right)$, $\varphi(x)$, $x\in[0,l]$, $f(t,x)$, $(t,x)\in(0,T)\times(0,l)$. Это позволяет свести смешанную задачу (2.20) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2[0,l]$. Известно, что дифференциальное выражение

$$Az=-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)+\delta z(x) \tag{2.16}$$

определяет самосопряженный положительно определенный оператор $A$ с областью определения

$$D(A)=\{z:z,z^{''}\in L_2[0,l],z(0)=z(l),z^{'}(0)=z^{'}(l)\}. \tag{2.17}$$

Пусть $L_{2h}=L_2\left[0,l\right]_h$ и $W_{2h}^2=W_2^2\left[0,l\right]_h$ — нормированные пространства всех сеточных функций $\gamma^h\left(x\right)=\{\gamma_n\}_{n=0}^M$, определенных на $\left[0,l\right]_h=\{x_n=nh,0\leqslant n\leqslant M,Mh=l\}$ и оснащенных, соответственно, нормами

$$\left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}}=\left(\sum_{x\in[0,l]_h}\left|\gamma^h(x)\right|^2h\right)^{1/2},\qquad \left\|\gamma^h\right\|_{W_{2h}^2}=\left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in[0,l]_h}\left|\left(\gamma^h\right)_{x\overline{x},j}\right|^2h\right)^{1/2}.$$

Кроме того, введем разностный оператор $A_h^x$, действующий в пространстве сеточных функций $u^h\left(x\right)=\{u_n\}_{n=0}^M$, определенных на $\left[0,l\right]_h$ и удовлетворяющих условиям $u_M=u_0$ и $u_1-u_0=u_M-u_{M-1}$, по формуле

$$A_h^xu^h(x)=\left\{-\frac{1}{h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}-u_n}{h}-a_n\frac{u_n-u_{n-1}}{h}\right)+\delta u_n\right\}_1^{M-1}. \tag{2.18}$$

Для численного решения $\left\{u_k^h\left(x\right)\right\}_{k=0}^N$ нелокальной краевой задачи (2.15) приведем разностную схему второго порядка точности по $t$

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}-\dfrac{1}{h}\left(a_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^k-u_n^k}{h}-a_n\dfrac{u_n^k-u_{n-1}^k}{h}\right)+\delta u_n^k=f_n^k,\\ f_n^k=f\left(t_k-\dfrac{\tau}{2},x_n\right),\quad t_k=k\tau,\quad x_n=nh,\quad k=\overline{1,r},\quad n=\overline{1,M-1},\\ \dfrac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}-\dfrac{1}{2h}\left(a_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^k-u_n^k}{h}-a_n\dfrac{u_n^k-u_{n-1}^k}{h}\right)-\\ \qquad-\dfrac{1}{2h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}^{k-1}-u_n^{k-1}}{h}-a_n\dfrac{u_n^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{h}\right)+\delta\dfrac{u_n^k+u_n^{k-1}}{2}=f_n^k,\\ f_n^k=f\left(t_k-\frac{\tau}{2},x_n\right),\quad t_k=k\tau,\quad x_n=nh,\quad k=\overline{r+1,N},\quad n=\overline{1,M-1},\\ u_n^0=\dfrac{a_0Bu_n^0+a_NBu_n^N}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_iBu_n^i\tau+\varphi_n,\quad \varphi_n=\varphi\left(x_n\right),\quad n\in\overline{0,M},\\ u_M^k=u_0^k,\quad u_1^k-u_0^k=u_M^k-u_{M-1}^k,\quad k\in\overline{0,N}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Применяя результаты теорем 2.1–2.3, мы можем получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (2.19).

**Теорема 2.4.** *Пусть $\tau$ и $h$ — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

*Тогда для решения разностной схемы* (2.19) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

*почти коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{h+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

*и коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

Во-вторых, пусть $\Omega$ — единичный куб в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(0<x_k<1$, $1\leqslant k\leqslant n)$ с границей $S$ и $\widetilde{\Omega}=\Omega\cup S$. В $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для многомерного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t-\sum\limits_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}=f(t,x), \quad 0<t<T, \quad x\in\Omega,\\ u(0,x)=\int\limits_0^T\alpha(s)Bu(s,x)ds+\varphi(x),\ x\in\widetilde{\Omega},\\ u(t,x)=0,\ x\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{2.20}$$

Задача (2.20) имеет единственное гладкое решение $u(t,x)$ для гладких функций $a_r(x)\geqslant a>0$ $(x\in\Omega)$, $\varphi(x)(x\in\widetilde{\Omega})$ и $f(t,x)$ $(t\in[0,T],x\in\Omega)$. Это позволяет свести смешанную задачу (2.20) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2(\Omega)$ всех интегрируемых функций, определенных на $\Omega$, снабженных нормой

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}=\left\{\int\cdots\int_{x\in\Omega}|f(x)|^2\,dx_1\ldots dx_n\right\}^{\frac{1}{2}},$$

с самосопряженным положительно определенным оператором $A^x$, определяемым формулой

$$A^x u(x)=-\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}, \tag{2.21}$$

с областью определения

$$D(A^x)=\left\{u(x):u(x),u_{x_r}(x),(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}\in L_2(\overline{\Omega}),1\leqslant r\leqslant n,u(x)=0,x\in S\right\}.$$

Численное решение задачи (2.20) проводится в два этапа. На первом этапе задаётся сетка

$$\widetilde{\Omega}_h=\left\{x=x_m=(h_1m_1,\ldots,h_nm_n),\ m=(m_1,\ldots,m_n),\ 0\leqslant m_r\leqslant M_r,\ h_rM_r=L,\ r=1,\ldots,n\right\},$$

$$\Omega_h=\widetilde{\Omega}_h\cap\Omega, \quad S_h=\widetilde{\Omega}_h\cap S$$

и разностный оператор $A_h^x$ по формуле

$$A_h^x u^h(x)=-\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r}, \tag{2.22}$$

действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x) = 0$ для всех $x \in S_h$. С помощью $A_h^x$ приходим к нелокальной краевой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_t^h(t,x) + A_h^x v^h(t,x) = f^h(t,x), 0 < t < T, \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ v^h(0,x) = \int\limits_0^T \alpha(s) B_h v^h(s,x)ds + \varphi^h(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.23}$$

На втором этапе задача (2.23) заменяется разностной схемой второго порядка точности по $t$

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^k(t_k - \dfrac{\tau}{2}, x), t_k = k\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ \dfrac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \dfrac{1}{2} A_h^x u_k^h(x) + \dfrac{1}{2} A_h^x u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^k(t_k - \dfrac{\tau}{2}, x), t_k = k\tau, \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x) = \dfrac{a(0)Bu_0^h(x) + a(T)u_N^h(x)}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i) B u_i^h(x)\tau + \varphi^h(x), x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.24}$$

Для формулировки результата об устойчивости введем пространство $L_{2h} = L_2(\Omega_h)$ всех сеточных функций $\varphi^h(x) = \varphi(h_1 m_1, \ldots, h_n m_n)$, определенных на $x \in \widetilde{\Omega}_h$, снабженных нормой

$$\left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} = \left( \sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2}.$$

Применяя результаты теорем 2.1–2.3 и теорему о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической разностной задачи в $L_{2h}$ (см. [11]), можно получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

**Теорема 2.5.** *Пусть $\tau$ и $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}$ — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[ \frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\| < 1.$$

*Тогда для решений разностной схемы* (2.24) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\| \left\{ u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta} \left[ \left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right],$$

*почти коэрцитивной устойчивости*

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} \left( u_k^h - u_{k-1}^h \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta} \left[ \left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{|h| + \tau} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right]$$

*и коэрцитивной устойчивости*

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} \left( u_k^h - u_{k-1}^h \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta} \left[ \left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right].$$

## 3. Устойчивость неявной разностной схемы второго порядка точности

Для приближенного решения краевой задачи (1.1) мы рассмотрим неявную разностную схему второго порядка

$$\frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k = \left(I + \frac{\tau A}{2}\right)\varphi_k, \quad \varphi_k = f\Big(t_k - \frac{\tau}{2}\Big), \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{3.1}$$

$$u_0 = \frac{a_0 B u_0 + a_N B u_N}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_i B u_i \tau + \varphi.$$

Из положительности оператора $A$ следует, что существует ограниченный оператор шага $R = R(\tau A)$ этой разностной схемы на всем пространстве $H$, определяемый формулой

$$R = \Big(I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\Big)^{-1}.$$

**Лемма 3.1.** *При любых $k = 1, \ldots, N$ выполнены оценки*

$$\left\|R^k\right\|_{H\to H} \leqslant 1, \qquad \left\|(I-R)\, R^k\right\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{3.2}$$

**Лемма 3.2.** *Предположим, что*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right] \|B\| < 1. \tag{3.3}$$

*Тогда оператор* $I - \dfrac{a_0B + a_NBR^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_iR^iB\tau$ *имеет обратный* $Q$ *и выполняется оценка*

$$\|Q_\tau\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{1 - \left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right]\|B\|} = M_{a,b}. \tag{3.4}$$

Доказательство этой оценки основано на спектральном представлении самосопряженного положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

**Лемма 3.3.** *Для решения разностной схемы* (3.1) *имеет место формула*:

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{i=1}^{k} R^{k-i+1}\left(I + \frac{\tau A}{2}\right)\varphi_i\tau, \tag{3.5}$$

$$u_0 = Q_\tau\left[\frac{\tau a_N}{2}B\sum_{i=1}^{N} R^{N-i+1}\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_i\tau + \sum_{i=1}^{N-1}\tau a_iB\sum_{j=1}^{i}R^{i-j+1}\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_j\tau + \varphi\right]. \tag{3.6}$$

*Доказательство.* Для решения разностной схемы

$$\frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)u_k = \left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \quad u_0 \text{ — заданный элемент} \tag{3.7}$$

применим формулу (3.5). С учетом нелокального условия

$$u_0 = \frac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_iBu_i\tau + \varphi$$

получаем

$$u_0 = \frac{\tau a_0}{2}Bu_0 + \frac{\tau a_N}{2}B\left[R^Nu_0 + \sum_{i=1}^{N}R^{N-i+1}\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_i\tau\right] + {} \\ + \sum_{i=1}^{N-1}\tau a_iB\left[R^iu_0 + \sum_{j=1}^{i}R^{i-j+1}\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_j\tau\right] + \varphi.$$

По лемме 3.2 оператор $I - \dfrac{a_0B + a_NBR^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_iR^iB\tau$ имеет обратный $Q_\tau$. Отсюда следует формула (3.6). Лемма 3.3 доказана. □

**Теорема 3.1.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число. Тогда разностная схема* (3.1) *устойчива в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$, а для решения разностной схемы* (3.1) *в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$ выполняются следующие неравенства устойчивости*:

$$\| u^\tau\|_{C_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}\Big], \tag{3.8}$$

$$\| u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}\Big]. \tag{3.9}$$

*Доказательство.* Неравенства устойчивости решения разностной схемы (3.7) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant \Big[ \|u_0\|_H + T\| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \Big], \tag{3.10}$$

$$\| u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M\Big[\| u_0 \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}\Big] \tag{3.11}$$

были доказаны ранее (см. [10]). Используя формулу (3.6) и оценку (3.2), получаем оценки для решения разностной схемы (3.1) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}\Big], \tag{3.12}$$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}\Big]. \tag{3.13}$$

Поэтому оценки (3.8) и (3.9) вытекают из оценок (3.10)–(3.13). □

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве $C([0,T], H)$ непрерывных $H$-значных функций, определенных на $[0,T]$, не является корректной для произвольного положительного оператора $A$ и пространства $H$, то равномерная по $\tau > 0$ корректность разностной схемы (3.1) по норме $C_\tau(H)$ не имеет места. Это означает, что коэрцитивная норма

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} = \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau(H)} + \left\| \left\{ A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k \right\}_1^N \right\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к $\infty$ при $\tau \to$ . Исследование разностной схемы (3.1) по норме $C_\tau(H)$ позволяет установить порядок роста этой нормы до $\infty$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число. Тогда для решения разностной схемы* (3.1) *имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости*

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M_{a,b} \left[ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| A\varphi \|_H \right].$$

*Доказательство.* Доказательство теоремы основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M \left[ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| Au_0\|_H \right]$$

для решения разностной схемы (3.7) в $C_\tau(H)$ из монографии [20] и оценки

$$\| A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right)u_0 \|_H \leqslant M_{a,b} \left[ \| A\varphi \|_H + \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H} | \right\} ||\varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \right]$$

для решения разностной схемы (3.1) в $C_\tau(H)$. □

**Теорема 3.3.** *Пусть $\tau$ — достаточно малое число и $\varphi \in D(A)$. Тогда для решения разностной схемы* (3.1) *выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в $C_\tau^\alpha(E)$*:

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(H)} + \| \left\{ A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k \right\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)} ||\varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M_{a,b} \|A\varphi\| |_H.$$

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы основано на теореме о корректности в $C_\tau^\alpha(E)$ разностной схемы (3.7) из работ [10, 20] и оценках коэрцитивной устойчивости

$$\| A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right)u_0 \|_E \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M \| A\mu \|_E$$

для решения разностной схемы (3.1). □

**Замечание 3.1.** Заметим, что оценки устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости разностной схемы (3.1) теорем 3.1–3.3 в произвольном банаховом пространстве $E$ выполняются при предположении, что оператор $I - \dfrac{a_0 B + a_N B R^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i R^i B\tau$ имеет ограниченный обратный в $E$.

Теперь перейдем к приложениям результатов теорем 3.1–3.3.

Сначала рассмотрим нелокальную краевую задачу для одномерного параболического уравнения (2.15). Для численного решения $\left\{u_k^h(x)\right\}_{k=0}^N$ нелокальной краевой задачи (2.15) используем разностную схему второго порядка точности по $t$

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)u_k^h(x)=\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k\Big(t_k-\dfrac{\tau}{2},x\Big), \quad t_k=k\tau, \quad 1\leqslant k\leqslant N, \quad x\in[0,l]_h, \\ u_0^h(x)=\dfrac{a(0)Bu_0^h(x)+a(T)u_N^h(x)}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau+\varphi^h(x), \quad x\in[0,l]_h. \end{cases} \tag{3.14}$$

Применяя результаты теорем 3.1–3.3, мы можем получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (3.14).

**Теорема 3.4.** *Пусть $\tau$ и $h$ — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

*Тогда для решения разностной схемы* (3.14) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

*почти коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{h+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

*и коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

Теперь в $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.20) для многомерного параболического уравнения. Численное решение задачи (2.20) проводится в два этапа. На первом этапе определяется сетка

$$\widetilde{\Omega}_h=\left\{x=x_m=(h_1m_1,\dots,h_nm_n),\ m=(m_1,\dots,m_n),\ 0\leqslant m_r\leqslant M_r,\ h_rM_r=L,\ r=1,\dots,n\right\},$$

$$\Omega_h=\widetilde{\Omega}_h\cap\Omega, \quad S_h=\widetilde{\Omega}_h\cap S$$

и разностный оператор $A_h^x$ по формуле

$$A_h^xu^h(x)=-\sum_{r=1}^n\left(a_r(x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r}, \tag{3.15}$$

действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x)=0$ для всех $x\in S_h$. С помощью $A_h^x$ приходим к нелокальной краевой задаче

$$\begin{cases} v_t^h(t,x)+A_h^xv^h(t,x)=f^h(t,x), \quad 0<t<T, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ v^h(0,x)=\int\limits_0^T\alpha(s)B_hv^h(s,x)ds+\varphi^h(x), \quad x\in\widetilde{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.16}$$

для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

На втором этапе задача (3.16) заменяется разностной схемой второго порядка точности по $t$

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)u_k^h(x)=\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k\Big(t_k-\dfrac{\tau}{2},x\Big), \quad t_k=k\tau, \quad 1\leqslant k\leqslant N, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x)=\dfrac{a(0)Bu_0^h(x)+a(T)u_N^h(x)}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau+\varphi^h(x), \quad x\in\widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.17}$$

Применяя результаты теорем 3.1–3.3 и теорему о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической разностной задачи в $L_{2h}$ (см. [11]), можно получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

**Теорема 3.5.** *Пусть $\tau$ и $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\ldots+h_n^2}$ — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

*Тогда для решений разностной схемы* (3.17) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

*почти коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{|h|+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

*и коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

## 4. Численные результаты

Рассмотрим разностные схемы второго порядка точности для решения нелокальной краевой задачи

$$\begin{cases} u_t(t,x)-\left(1+x^2\right)u_{xx}(t,x)-2x\ u_x(t,x)+2u(t,x)=f(t,x), \\ f(t,x)=\exp(-t-1)\ \left\{\left(2+x^2\right)\sin x-2x\cos x\right\}, \\ u(0,x)=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 e^{-s}u(s,x)ds+\varphi(x), \quad \varphi(x)=\sin x\left\{e^{-1}+\dfrac{1}{10}\left(e^{-3}-e^{-1}\right)\right\}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u(t,0)=0, \quad u(t,\pi)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

для одномерного параболического уравнения.

Точное решение задачи $u\,(t,x)=\exp(-t-1)\sin x$. Множество семейства узлов сетки $[0,1]_\tau\times[0,\pi]_h$, зависящее от параметров $\tau$ и $h$, определяется как

$$[0,1]_\tau\times[0,\pi]_h=\left\{(t_k,x_n):t_k=\tau k,\ 0\leqslant k\leqslant N,\ \tau N=1,x_n=hn,\ 0\leqslant n\leqslant M,hM=\pi\right\}.$$

Сначала, применяя разностную схему (2.1) к задаче (4.1), мы получаем $r$-модифицированную разностную схему Кранка—Николсона

$$\left(-\frac{\left(1+x_n^2\right)}{h^2}-\frac{2x_n}{2h}\right)u_{n+1}^k+\left(-\frac{1}{\tau}\right)u_n^{k-1}+\left(2+\frac{1}{\tau}+\frac{2\left(1+x_n^2\right)}{h^2}\right)u_n^k+\left(-\frac{\left(1+x_n^2\right)}{h^2}+\frac{2x_n}{2h}\right)u_{n-1}^k=$$
$$=f(t_k-\frac{\tau}{2},x_n),\quad k=1,\dots,r,$$
$$\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^k+\left(\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1\right)u_n^k+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^k+$$
$$+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^{k-1}+\left(-\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1\right)u_n^{k-1}+$$
$$+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^{k-1}=f(t_k-\frac{\tau}{2},x_n),\quad k=r+1,\dots,N. \tag{4.2}$$

Эту систему уравнений можно переписать в матричной форме

$$\begin{cases}A_nU_{n+1}+B_n\,U_n+C_n\,U_{n-1}=R\varphi_n,\quad 2\leqslant n\leqslant M-2,\\ U_0=\overrightarrow{0},\quad U_1=\frac{4}{5}U_2-\frac{1}{5}U_3U_{M-1}=\frac{4}{5}U_{M-2}-\frac{1}{5}U_{M-3},\quad U_M=\overrightarrow{0},\end{cases} \tag{4.3}$$

где $R$ — единичная матрица с $(N+1)$ строками и столбцами,

$$\varphi_n=\begin{bmatrix}\varphi_n^0\\ \varphi_n^1\\ \dots\\ \varphi_n^N\end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},\qquad \varphi_n^k=\begin{cases}\left[e^{-1}+\frac{1}{10}\left(e^{-3}-e^{-1}\right)\right]\sin x_n,\quad k=0,\\ f\left(t_k-\frac{\tau}{2},x_n\right),\quad 1\leqslant k\leqslant N,\end{cases}$$

$$U_s=\begin{bmatrix}U_s^0\\ U_s^1\\ \dots\\ U_s^{N-1}\\ U_s^N\end{bmatrix},\quad s=n-1,n,n+1,\qquad Q(p,r)=\begin{bmatrix}p & r & \dots & 0 & 0\\ 0 & p & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & p & r\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_n=Q(0,a_n),\quad C_n=Q(0,c_n),$$

$$B_n=\begin{bmatrix}b_n & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_n & d & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & d\\ 1-\frac{\tau}{10} & -\frac{\tau}{5} & -\frac{\tau}{5} & \dots & -\frac{\tau}{5} & -\frac{\tau}{5} & -\frac{\tau e^{-1}}{10}\end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

$$a_n=\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{2h}\right),$$
$$b_n=\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1,$$
$$d=-\frac{1}{\tau},c_n=\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{2h}\right).$$

Во-вторых, применяя для решения разностную схему (4.1), получим разностную схему второго порядка точности

$$\frac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}+\left(1+\frac{\tau}{2}\right)u_n^k+q_2\left(u_{n+1}^k-u_{n-1}^k\right)(2h)^{-1}+\frac{q_3}{h^2}\left(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k\right)+$$
$$+\frac{q_0\,\tau}{h^3}\left(u_{n+2}^k-2u_{n+1}^k+2u_{n-1}^k-u_{n-2}^k\right)+\frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2}\left(u_{n+2}^k-4u_{n+1}^k+6u_n^k-4u_{n-1}^k+u_{n-2}^k\right)=$$
$$=e^{-t_{k-\frac{1}{2}}-1}\left\{\left(2+x_n^2\right)\sin x_n-2x\cos x_n\right\}+\frac{\tau}{2}e^{-t_{k-\frac{1}{2}}-1}\left\{\left(x_n^4-9x_n^2\right)\sin x_n+\left(-10x_n-8x_n^3\right)\cos x_n\right\},$$
$$n=\overline{2,M-2},\quad k=\overline{1,N}, \tag{4.5}$$

$$u_0^k=0,\quad u_1^k=\frac{4}{5}u_2^k-\frac{1}{5}u_3^k,\quad u_M^k=0,\quad u_{M-1}^k=\frac{4}{5}u_{M-2}^k-\frac{1}{5}u_{M-3}^k,\quad k=\overline{0,N},$$
$$u_n^N=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\mu(t_j-\frac{\tau}{2})\tau\ \left[u_n^j+u_n^{j-1}\right]+\varphi_n,\quad n=\overline{0,M},$$

где

$$q_1=\left(1+x_n^2\right)^2,\quad q_0=4x_n\left(1+x_n^2\right),\quad q_3=-\left(1+x_n^2\right)+\left(2+10x^2\right)\frac{\tau}{2}\,q_2=\left(-2x_n-2x_n\tau\right).$$

Можно записать (4.5) в следующей матричной форме:

$$\begin{cases}A_nu_{n+2}+B_nu_{n+1}+C_nu_n+D_nu_{n-1}+E_nu_{n-2}=I_{N+1}\varphi_n,\quad n=\overline{2,M-2},\\ u_0=\overrightarrow{0},\quad u_1=\frac{4}{5}u_2-\frac{1}{5}u_3,\quad u_{M-1}=\frac{4}{5}u_{M-2}-\frac{1}{5}u_{M-3},\quad u_M=\overrightarrow{0}.\end{cases}\tag{4.6}$$

Здесь $I_k$ — единичная матрица $k\times k$, $\varphi_n$ — матрица размера $(N+1)\times 1$, $\varphi_n=\left[\begin{array}{ccc}\varphi_n^0 & \cdots & \varphi_n^N\end{array}\right]^t$, $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$, $E_n$ — матрицы размера $(N+1)\times(N+1)$, $O_{k\times m}$ — матрица типа $k\times m$ с нулевыми элементами,

$$A_n=\left[\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}}\\ v_nI_N & O_{N\times 1}\end{array}\right],\qquad B_n=\left[\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}}\\ y_nI_N & O_{N\times 1}\end{array}\right],$$
$$D_n=\left[\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}}\\ z_nI_N & O_{N\times 1}\end{array}\right],\qquad E_n=\left[\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}}\\ w_nI_N & O_{N\times 1}\end{array}\right],$$
$$C_n=\left[\begin{array}{ccccccc}s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{N-2} & s_{N-1} & s_N\\ r_n & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_n & d & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & r_n & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_n & d\end{array}\right],$$

где

$$v_n=\frac{q_0\tau}{h^3}+\frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2},\quad d=-\frac{1}{\tau},\quad y_n=\frac{q_2}{2h}+\frac{q_3}{h^2}-\frac{2q_0\tau}{h^3}-\frac{2q_1\tau}{h^4},$$
$$r_n=2+\tau+\frac{1}{\tau}-\frac{2q_3}{h^2}+\frac{3q_1\tau}{h^4},\quad w_n=-\frac{q_0\tau}{h^3}+\frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2},$$
$$z_n=-\frac{q_2}{2h}+\frac{q_3}{h^2}+\frac{2q_0\tau}{h^3}-\frac{2q_1\tau}{h^4},\quad s_0=1-\frac{\tau}{2}\mu\Big(\frac{\tau}{2}\Big),$$
$$s_N=-\frac{\tau}{2}\mu\Big(t_N-\frac{\tau}{2}\Big),\quad s_j=-\frac{\tau}{2}\left(\mu(t_{j-\frac{1}{2}})+\mu(t_{j+\frac{1}{2}})\right),\quad j=1,\ldots,N-1.$$

Решение (4.6) определяется модифицированным методом исключения Гаусса:

$$\begin{aligned}&u_n=\alpha_{n+1}u_{n+1}+\beta_{n+1}u_{n+2}+\gamma_{n+1},\\ &\beta_{n+1}=-F_n^{-1}A_n,\alpha_{n+1}=-F_n^{-1}\left(B_n+D_n\beta_n+E_n\alpha_{n-1}\beta_n\right),\\ &\gamma_{n+1}=-F_n^{-1}\left(I_{N+1}\varphi_n-D_n\gamma_n-E_n\alpha_{n-1}\gamma_n-E_n\gamma_{n-1}\right),\\ &F_n=\left(C_n+D_n\alpha_n+E_n\beta_{n-1}+E_n\alpha_{n-1}\alpha_n\right)\end{aligned}$$

при $n=M-2,\ldots,0$, где

$$\gamma_1=\gamma_2=O_{(N+1)\times 1},\quad \alpha_1=\beta_1=O_{(N+1)\times(N+1)},\quad \alpha_2=\frac{4}{5}I_{N+1},\quad \beta_2=-\frac{1}{5}I_{N+1},\quad u_M=\overrightarrow{0},$$
$$D_M=\left(\beta_{M-2}+5I_{N+1}\right)-\left(4I_{N+1}-\alpha_{M-2}\right)\alpha_{M-1},\quad u_{M-1}=D_M^{-1}\left[\left(4I_{N+1}-\alpha_{M-2}\right)\gamma_{M-1}-\gamma_{M-2}\right].$$

Для сравнения приближенного решения с точным решением вычисляется погрешность

$$E_N^M=\max_{1\leqslant k\leqslant N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u(t_k,x_n)-u_n^k\right|^2h\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В табл. 1 приведена погрешность между точным решением и решениями, полученными по разностной схеме (4.2). Погрешности (4.2) приведены в табл. 1 для $r = 1$ и $N, M = 20, 40, 80, 160$, соответственно. Из табл. 1 видно, что порядок точности сходится к двум.

В табл. 2 показана погрешность между точным решением и решением, полученным по разностной схеме (4.5) для $N, M = 20, 40, 80, 160$, соответственно. Из табл. 2 видно, что порядок точности сходится к двум.

| $N = M$ | $E_N^M$ |
|---|---|
| 20 | $3{,}15\times10^{-2}$ |
| 40 | $7{,}05\times10^{-3}$ |
| 80 | $1{,}47\times10^{-3}$ |
| 160 | $3{,}71\times10^{-4}$ |

Таб. 1. Погрешность приближения для разностной схемы (4.2)
Tab. 1. Error of approximation for difference scheme (4.2)

| $N = M$ | $E_N^M$ |
|---|---|
| 20 | $3{,}10\times10^{-4}$ |
| 40 | $7{,}66\times10^{-5}$ |
| 80 | $1{,}92\times10^{-5}$ |
| 160 | $4{,}80\times10^{-6}$ |

Таб. 2. Погрешность приближения для разностной схемы (4.5)
Tab. 2. Error of approximation for difference scheme (4.5)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т.* Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 12. — С. 1596–1609.
2. *Ашыралыев А., Соболевский П. Е.* Разностные схемы высокого порядка точности для параболических уравнений с переменными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — *6*. — С. 3–7.
3. *Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А.* Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 7. — С. 926–932.
4. *Гулин А. В., Морозова В. А.* Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 7. — С. 912–917.
5. *Кожанов А. И.* Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия// Мат. заметки СВФУ. — 2014. — *21*, № 4. — С. 20–30.
6. *Оразов И., Садыбеков М. А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 1. — С. 180–186.
7. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 140–151.
8. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
9. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 1. — С. 52–55.
10. *Соболевский П. Е.* О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений// Докл. АН СССР. — 1971. — *201*, № 5. — С. 1063–1066.
11. *Соболевский П. Е.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
12. *Старовойтов В. Н.* Об однозначной разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными по времени данными// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 2. — С. 417–421.
13. *Шелухин В. В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, № 2. — С. 154–165.

14. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 2. — С. 191–207.
15. *Ashyralyev A.* Well-posedness of the modified Crank-Nicholson difference schemes in Bochner spaces// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — *7*, № 1. — С. 29–51.
16. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R. P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation// Appl. Comput. Math. — 2020. — *19*, № 2. — С. 175–204.
17. *Ashyralyev A., Ashyralyyev C.* On the stability of parabolic differential and difference equations with a time-nonlocal condition// Comput. Math. Math. Phys. — 2022. — *62*, № 6. — С. 962–973.
18. *Ashyralyev A., Ashyraliyev M., Ashyralyyeva M. A.* Identification problem for telegraph-parabolic equations// Comput. Math. Math. Phys. — 2020. — *60*, № 8. — С. 1294–1305.
19. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — *6*, № 1. — С. 53–61.
20. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
21. *Ashyralyyev C.* Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition// Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 8. — С. 5369–5379.
22. *Ashyralyyev C.* The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. — 2020. — *46*, № 2. — С. 346–359.
23. *Ashyralyyev C., Gonenc A.* Crank—Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 273–282.
24. *Ashyraliyev M.* On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 363–376.
25. *Beyn W. J., Garay B. M.* Estimates of variable stepsize Runge—Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data// Appl. Numer. Math. — 2002. — *41*, № 3. — С. 369–400.
26. *Buranay S. C., Arshad N.* Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons// Adv. Difference Equ. — 2020. — *2020:309*. — С. 1–24.
27. *Buranay S. C., Matan A. H., Arshad N.* Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation// Fractal and Fractions. — 2021. — *5*, № 19. — С. 1–26.
28. *Erdogan A. S.* Numerical solution of parabolic inverse problem with an unknown source function// Канд. дисс. — Istanbul: Yildiz Technical University, 2010.
29. *Erdogan A. S.* Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 401–410.
30. *Gavrilyuk I. P.* Strongly $p$-positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — *236*, № 2. — С. 327–349.
31. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Exponentially convergent parallel disretization method for the first order evolution equation// Appl. Math. Inform. — 2000. — *5*, № 2. — С. 47–69.
32. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — *122*, № 2. — С. 3013–3054.
33. *Iskenderov N. Sh., Allahverdiyeva S. I.* Inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2020. — *11*, № 2. — С. 226–237.
34. *Islomov B. I., Alikulov Y. K.* Boundary value problem for loaded equation of parabolichyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 377–389.
35. *Khankishiyev Z. F.* Solution of one problem for linear loaded parabolic type of differential equation with integral conditions// Adv. Math. Models Appl. — 2022. — *7*, № 2. — С. 178–190.
36. *Musaev N. K.* The Cauchy problem for degenerate parabolic convolution equation// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2021. — *12*, № 2. — С. 278–288.
37. *Restrepo J. E., Suragan D.* Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations// Adv. Differ. Equ. — 2021. — *26*, № 7/8. — С. 305–339.
38. *Ruzhansky M., Serikbaev D., Torebek B. T., Tokmagambetov N.* Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations// Quaest. Math. — 2022. — *45*, № 7. — С. 1071–1089.
39. *Sadybekov M. A.* Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem// e-J. Anal. Appl. Math. — 2018. — *2018*, № 1. — С. 1–10.
40. *Shakhmurov V.* Regularity properties of nonlocal fractional differential equations and applications// Georgian Math. J. — 2022. — *29*, № 2. — С. 275–284.
41. *Wang Y. G., Oberguggenberger M.* Nonlinear equations with regularized derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — *233*, № 2. — С. 644–658.

Аллаберен Ашыралыев
Бахчешехир университет, Стамбул, Турция
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: aallaberen@gmail.com

Чарыяр Ашыралыев
Бахчешехир университет, Стамбул, Турция
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: charyar@gmail.com

UDC 517.9+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49
EDN: ENHOAY

# The second-order accuracy difference schemes for integral-type time-nonlocal parabolic problems

**A. Ashyralyev[1,2,3] and Ch. Ashyralyyev[1,4]**

[1] *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*
[2] *RUDN University, Moscow, Russia*
[3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[4] *National University of Uzbekistan Named After Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

This is a discussion on the second-order accuracy difference schemes for approximate solution of the integral-type time-nonlocal parabolic problems. The theorems on the stability of r-modified Crank–Nicolson difference schemes and second-order accuracy implicit difference scheme for approximate solution of the integral-type time-nonlocal parabolic problems in a Hilbert space with self-adjoint positive definite operator are established. In practice, stability estimates for the solutions of the second-order accuracy in $t$ difference schemes for the one and multidimensional time-nonlocal parabolic problems are obtained. Numerical results are given.

**Keywords:** nonlocal parabolic problem, second-order accuracy difference scheme, Crank–Nicolson scheme, implicit difference scheme, stability

**For citation:** A. Ashyralyev, Ch. Ashyralyyev, "The second-order accuracy difference schemes for integral-type time-nonlocal parabolic problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 32–49. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49

## REFERENCES

1. R. R. Ashurov and A. T. Mukhiddinova, "Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation," *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 12, 1550–1563.
2. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, "Raznostnye skhemy vysokogo poryadka tochnosti dlya parabolicheskikh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [Difference schemes of high order of accuracy for parabolic equations with variable coefficients], *Dokl. AN USSR. Ser. A* [Rep. Acad. Sci. Ukr. SSR. Ser. A.], 1988, **6**, 3–7 (in Russian).
3. A. V. Gulin, N. I. Ionkin, and V. A. Morozova, "On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem," *Differ. Equ.*, 2001, **37**, No. 7, 970–978.

4. A. V. Gulin and V. A. Morozova, "On the stability of a nonlocal finite–difference boundary value problem," *Differ. Equ.*, 2003, **39**, No. 7, 962–967.
5. A. I. Kozhanov, "Razreshimost' kraevykh zadach dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy v sluchae zadaniya integral'nogo po vremennoy peremennoy usloviya" [Solvability of boundary-value problems for linear parabolic equations in the case of integral condition with respect to the time variable], *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes North-East Fed. Univ.], 2014, **21**, No. 4, 20–30 (in Russian).
6. I. Orazov and M. A. Sadybekov, "On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature," *Sib. Math. J.*, 2012, **53**, No. 1, 146–151.
7. L. E. Rossovskii and A. R. Khanalyev, "Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, No. 6, **239**, 855–866.
8. A. L. Skubachevskii, "Nonclassical boundary-value problems. II," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **166**, No. 4, 377–561.
9. P. E. Sobolevskii, "Coercivness inequalities for abstract parabolic equations," *Sov. Math. Dokl.*, 1964, **5**, 894–897.
10. P. E. Sobolevskii, "The coercive solvability of difference equations," *Sov. Math. Dokl.*, 1971, **12**, 1802–1805.
11. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Difference Methods for Solving Differential Equations], VGU, Voronezh, 1975 (in Russian).
12. V. N. Starovoitov, "Unique solvability of a linear parabolic problem with nonlocal time data," *Sib. Math. J.*, 2021, **62**, No. 2, 337–340.
13. V. V. Shelukhin, "A problem with time-average data for nonlinear parabolic equations," *Sib. Math. J.*, 1991, **32**, No. 2, 309–320.
14. V. V. Shelukhin, "A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time," *Sib. Math. J.*, 1993, **34**, No. 2, 369–384.
15. A. Ashyralyev, "Well-posedness of the modified Crank-Nicholson difference schemes in Bochner spaces," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2007, **7**, No. 1, 29–51.
16. A. Ashyralyev, D. Agirseven, and R. P. Agarwal, "Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation," *Appl. Comput. Math.*, 2020, **19**, No. 2, 175–204.
17. A. Ashyralyev and C. Ashyralyyev, "On the stability of parabolic differential and difference equations with a time-nonlocal condition," *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, **62**, No. 6, 962–973.
18. A. Ashyralyev, M. Ashyraliyev, and M. A. Ashyralyyeva, "Identification problem for telegraph-parabolic equations," *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, **60**, No. 8, 1294–1305.
19. A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, "Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations," *Abstr. Appl. Anal.*, 2002, **6**, No. 1, 53–61.
20. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004.
21. C. Ashyralyyev, "Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**, No. 8, 5369–5379.
22. C. Ashyralyyev, "The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition," *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2020, **46**, No. 2, 346–359.
23. C. Ashyralyyev and A. Gonenc, "Crank—Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 273–282.
24. M. Ashyraliyev, "On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 363–376.
25. W. J. Beyn and B. M. Garay, "Estimates of variable stepsize Runge—Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data," *Appl. Numer. Math.*, 2002, **41**, No. 3, 369–400.
26. S. C. Buranay and N. Arshad, "Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons," *Adv. Difference Equ.*, 2020, **2020:309**, 1–24.
27. S. C. Buranay, A. H. Matan, and N. Arshad, "Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation," *Fractal and Fractions*, 2021, **5**, No. 19, 1–26.
28. A. S. Erdogan, "Numerical solution of parabolic inverse problem with an unknown source function," *PhD Thesis*, Yildiz Technical University, Istanbul, 2010.
29. A. S. Erdogan, "Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 401–410.
30. I. P. Gavrilyuk, "Strongly $p$-positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space," *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **236**, No. 2, 327–349.

31. I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov, "Exponentially convergent parallel disretization method for the first order evolution equation," *Appl. Math. Inform.*, 2000, **5**, No. 2, 47–69.
32. D. Guidetti, B. Karasozen, and S. Piskarev, "Approximation of abstract differential equations," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **122**, No. 2, 3013–3054.
33. N. Sh. Iskenderov and S. I. Allahverdiyeva, "Inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2020, **11**, No. 2, 226–237.
34. B. I. Islomov and Y. K. Alikulov, "Boundary value problem for loaded equation of parabolichyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 377–389.
35. Z. F. Khankishiyev, "Solution of one problem for linear loaded parabolic type of differential equation with integral conditions," *Adv. Math. Models Appl.*, 2022, **7**, No. 2, 178–190.
36. N. K. Musaev, "The Cauchy problem for degenerate parabolic convolution equation," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2021, **12**, No. 2, 278–288.
37. J. E. Restrepo and D. Suragan, "Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations," *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **26**, No. 7/8, 305–339.
38. M. Ruzhansky, D. Serikbaev, B. T. Torebek, and N. Tokmagambetov, "Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations," *Quaest. Math.*, 2022, **45**, No. 7, 1071–1089.
39. M. A. Sadybekov, "Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem," *e-J. Anal. Appl. Math.*, 2018, **2018**, No. 1, 1–10.
40. V. Shakhmurov, "Regularity properties of nonlocal fractional differential equations and applications," *Georgian Math. J.*, 2022, **29**, No. 2, 275–284.
41. Y. G. Wang and M. Oberguggenberger, "Nonlinear equations with regularized derivatives," *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **233**, No. 2, 644–658.



Allaberen Ashyralyev
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey
RUDN University, Moscow, Russia
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: `aallaberen@gmail.com`

Charyyar Ashyralyyev
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey
National University of Uzbekistan Named After Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `charyar@gmail.com`