ИНТЕРПРЕТАЦИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

О ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А.П. Ефремов

Институт гравитации и космологии
Российского университета дружбы народов

Обсуждается феноменологическая модель квантовой частицы де Бройля и ее фрактальный геометрический аналог, возникающий в результате чисто математического вывода уравнения Шредингера из теории гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: квантовая механика, волны де Бройля, предгеометрия, гиперкомплексные числа, кватернионы, фрактальное пространство.

Модель де Бройля

Квантовая механика считается наукой аксиоматической. Но отправным пунктом ее математического воплощения все же является модель: предложенная в 1923 году де Бройлем модель частицы-волны. И хотя некогда высказывалось мнение, что де Бройль мало что сделал в квантовой механике, с этим трудно согласиться. Действительно, само по себе представление о том, что частица, масса которой сконцентрирована в ограниченной области пространства, обладает и волновыми свойствами – абсолютно революционно. Конечно, де Бройль был в курсе эйнштейновской квантовой теории света, но уравнения Максвелла для электромагнитного поля с их волновыми решениями к тому времени были известны уже почти полвека, а волновые свойства света, впрочем, как и корпускулярные, – еще со времен Гука и Ньютона. Утверждать, что любая массивная частица, в том числе электрически нейтральная, является источником некоторой волны, мог человек только с мощной научной интуицией – и завидной смелостью. (Впрочем, де Бройль по рождению был герцогом в нескольких поколениях, а князьям, как известно, смелости не занимать). Вот фрагмент его исторического доклада [1] на заседании Французской академии наук 10.09.1923.

SÉANCE DU 10 SEPTEMBRE 1923. 507

RADIATIONS. — *Ondes et quanta* (1). Note de M. **Louis de Broglie**, présentée par M. Jean Perrin.

. . . .

Passons maintenant au cas d'un électron décrivant d'une vitesse uniforme sensiblement inférieure à c une trajectoire fermée. Au temps $t = 0$, le mobile est en un point O. L'onde fictive associée, partant alors de O et décrivant toute la trajectoire avec la vitesse $\frac{c}{\beta}$, rattrape l'électron au temps τ en un point O′ tel que $\overline{OO'} = \beta c \tau$.

On a donc

$$\tau = \frac{\beta}{c}[\beta c(\tau + T_r)] \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} T_r,$$

où T_r est la période de révolution de l'électron sur son orbite. La phase interne de l'électron, quand celui-ci va de O en O′, varie de

$$2\pi\nu_1\tau = 2\pi \frac{m_0 c^2}{h} T_r \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Il est *presque nécessaire* de supposer que la trajectoire de l'électron n'est stable *que si* l'onde fictive passant en O′ retrouve l'électron en phase avec elle : l'onde de fréquence ν et de vitesse $\frac{c}{\beta}$ doit être en résonance sur la longueur de la trajectoire. Ceci conduit à la condition

$$\frac{m_0\beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} T_r = nh, \qquad n \text{ étant entier}.$$

Кажется, что самое главное здесь – требование целого числа длин волн на замкнутой траектории электрона в атоме, изложенное в последней формуле; вот предпоследняя фраза: «*Почти необходимо* предположить, что траектория электрона нестабильна, *если* фиктивная волна, подходя в точке O' к электрону, окажется не в фазе с ним: на длине траектории волна с частотой ν и скоростью c/β должна быть резонансной». Именно это требование, в нерелятивистском пределе приводящее де Бройля к такому же квантованию электронных орбит, как в модели Бора, представляется ему (видимо, и его слушателям) наиболее убедительным и важным. Однако самым важным, как представляется уже автору этих комментариев, в вышеприведенной фразе является определение «фиктивная волна». О ней де Бройль пишет выше.

Supposons maintenant qu'au temps $t = o$, le mobile coïncide dans l'espace avec une onde de fréquence ν ci-dessus définie se propageant dans la même direction que lui avec la vitesse $\frac{c}{\beta}$. Cette onde de vitesse plus grande que c ne peut correspondre à un transport d'énergie; nous la considérerons seulement comme une onde fictive associée au mouvement du mobile.

Je dis que, si au temps $t = o$, il y a accord de phase entre les vecteurs de l'onde et le phénomène interne du mobile, cet accord de phase subsistera. En effet, au temps t le mobile est à une distance de l'origine égale

«Пусть при $t = 0$ движущийся объект совмещен в пространстве с некой волной частотой ν и, как определено выше, распространяющейся в том же направлении со скоростью c/β. Такая волна со скоростью более c не может быть связана с переносом энергии; мы рассматриваем ее лишь как фиктивную волну, ассоциируемую с движением объекта». И следующая (первая) фраза в рамке: «Я утверждаю, что если при $t = 0$ есть согласие фаз векторов этой волны и процесса внутри движущегося объекта, то это согласие фаз сохраняется».

Вот главное: «фиктивная» волна, с точки зрения де Бройля, не переносит энергию, но представляет собой определенное проявление периодического процесса, происходящего «внутри» рассматриваемой частицы. В дальнейшем такой частицей практически всегда оказывался электрон.

Стоит заметить, прошло почти сто лет, а суть устройства этой частицы столь же далека от истинного понимания, как и во времена де Бройля. Мы некоторым образом можем описывать физические следствия присутствия электронов в различных системах, но по-прежнему не знаем, что такое электрический заряд, почему он парен и бывает элементарным, что являет собой спин частицы и как распределена – если вообще распределена – в ней масса. Мы вообще не понимаем, что такое масса и почему она является причиной гравитации. Наконец, возвращаясь к электрону, – никто как движущуюся или покоящуюся частицу его «не видел», известен лишь результат взаимодействия.

У автора этих строк есть убежденность, что сегодняшний исследователь уже не может удовлетворяться теми возможностями, которые предоставляет выработанная сто лет назад технология более или менее правильного описания взаимодействий физических тел, в том числе малых частиц. Понимание сути вещей в значительной степени зависит от возможности некой визуализации исследуемого объекта. Иными словами, суть объекта становится существенно понятнее, если он представим в образах. То есть нужна модель изучаемого объекта. Именно так и пытались делать исследователи XIX и начала XX века; к таковым, безусловно, относится и де Бройль, хотя его «фиктивная» волна, неким образом отражающая внутреннюю сущность частицы, весьма абстрактна. И все же пусть модель де Бройля была несовершенна, но эта была модель, и он, не удовлетворенный как истинный исследователь, практически всю жизни продолжал над ней работать.

Гейзенберг, Шредингер и копенгагенская группа повергла модельный подход в прах. Хотя авторы квантовой механики были, безусловно, гениальны. Введенные ими, по сути, эвристически уравнения оказались чрезвычайно точны, но – как сказано выше – лишь технологичны. Результаты теоретических расчетов вполне соответствовали (и соответствуют) данным эксперимента. Видимо, можно утверждать, что на современном уровне научного знания аксиоматическая квантовая механика – правильная теория, которая описывает физику микромира адекватно. Но для самой главной величины в уравнении Шредингера – функции состояния – пришлось мучительно искать приемлемую трактовку, и хотя с той поры прошел почти целый век, огромный срок для фундаментальной науки, далеко не всех удовлетворяет интерпретация Макса Борна. Самым знаменитым несогласным был Эйнштейн.

Но речь не об оппонентах, а о потере модельности, хотя теория, повторюсь, верна. Удивительный факт – решение Шредингера для атома водорода дает в точности те же квантовые характеристики этой физической системы, что и эвристическая модель Бора, предложенная за 15 лет до формулировки уравнения волновой механики. Но модель Бора, пусть с постулатом о квантовании, все же дает представление о том, что такое атом водорода: это отрицательно заряженный (точечный?) электрон в центральном поле положительного заряда, вращающийся вокруг этого центра по строго определенным орбитам, так что переход с одной орбиты на другую сопровождается выделением (поглощением) заданной дозы квантов электромагнитного излучения. Да, в решении Шредингера появились особенности пространственного квантования, но уже не орбит – орбиталей. И поныне в популярной литературе встречается изображение атома, более всего похожее на модель Бора. Потому что решение Шредингера не имеет визуализации: модель отсутствует как таковая.

Другой удивительный факт, но уже из нашего века, состоит в том, что уравнение квантовой механики, помимо решения Шредингера, имеет другое точное решение для атома водорода, и это решение в точности соответствует описанию модели Бора, только электрон в этом решении – не точечная частица, а скорее вращающееся вокруг центрального заряда тонкое кольцо с гармонически изменяющейся плотностью [2]. И здесь стоит заметить, что поиском этого решения автор занимался осознанно, представляя себе не только функционально-алгебраический, но и геометрический, то есть визуализируемый, смысл величин, входящих в уравнение Шредингера.

Впрочем, и само уравнение Шредингера, как выяснилось, допускает строгий математический вывод, приобретая при этом внятный геометрический смысл, который вряд ли мог занимать умы создателей квантовой механики. Потому что они не изучали теорию гиперкомплексных чисел, ее еще не было.

Предгеометрия и фрактальная модель частицы

Сам по себе факт возникновения идеи о гиперкомплексных числах представляется явлением трансцендентным. Хотя начало этой идеи, конечно, было заложено еще в XVI веке, когда в работах Кардано, Бомбели и Декарта впервые отнеслись с вниманием к величинам, содержащим квадратный корень из отрицательного числа. Затем появились великие формулы Эйлера, связывающие тригонометрические функции и экспоненты с мнимым показателем, и вскоре математика настолько абстрагировалась от реальности, что одной мнимой единицы стало мало. В 1843 году Гамильтон построил алгебру кватернионов с тремя такими единицами, а чуть позже усилиями Кэли возникла восьмимерная алгебра с семью мнимыми единицами. Продолжить далее список не удалось: более сложные алгебры теряли свои лучшие свойства. Теорема Фробениуса–Гурвица, доказанная в конце XIX века, ограничила список «хороших» алгебр всего четырьмя; это алгебры действительных, комплексных, кватернионных и октонионных чисел.

Это еще один удивительный факт, но уже из области математики: оказывается число алгебр с хорошими свойствами конечно и равно четырем. При этом в последней по размерности алгебры октонионов операция умножения оказывается неассоциативной, и стоит заметить, что мы пока не знаем ни одной физической величины с такими свойствами. А вот алгебра кватернионов отлично подходит для описания физических явлений, поскольку три ее мнимые единицы ведут себя как три взаимно ортогональных вектора, направляющих декартову систему координат в трехмерном физическом пространстве. Но это особые, так называемые аксиальные векторы. Проще всего их изображать квадратными матрицами второго ранга; самый известный набор таких матриц следующий: $\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – это матрицы Паули с множителем $-i$. Несложно проверить, что последовательно умноженные друг на друга соседние единицы в точности дадут третью, так что три векторные единицы естественно ассоциируются с размерностями нашего физического пространства.

Вообще говоря, это своего рода загадка: почему оказалось, что последняя по размерности ассоциативная алгебра описывает трехмерное пространство? Это случайность или закономерность? Хочется верить в последнее, но всякая серьезная вера должна подкрепляться чудесами. И чудеса есть! Одно из них – в том, что такое 3D-пространство оказывается имеет внутреннюю структуру, и это очень легко показать. Здесь о них расскажем, но сначала совсем немного очень простой чистой математики.

Заметим, что все векторы размерности 3D-пространства $\mathbf{q}_n$, $n = 1, 2, 3$, аксиальны (некоторым образом похожи на оси гироскопов); в то же время компоненты в матрицах, описывающих эти векторы, постоянны, то есть в пространстве ничто не движется, в частности, не вращается, и это замечание существенно. В теории матриц доказана так называемая спектральная теорема, которая гласит следующее. Невырожденную (имеющую обратную) матрицу с различными собственными значениями можно разложить в ряд по проекторам, каждый из которых есть своеобразное (прямое или тензорное) произведение элементов примитивного базиса, число векторов которого равно рангу этой матрицы. На примере матрицы-вектора $\mathbf{q}_3$ это выглядит и доказывается очень просто

$$\mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $\psi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\psi^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – векторный базис, $\varphi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ – его ковекторная пара. Понятно, что базис (ψ^+, ψ^-) образует 2D-пространство с метрикой в виде матричной единицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (она же – скалярная единица действительных, комплексных и всех гиперкомплексных чисел). При этом размерность 3D-пространства $\mathbf{q}_3$ является, по сути, квадратом примитивного 2D-базиса. Это значит, что размерность ψ^+ (или ψ^-) 2D-пространства дробная по отношению к «размерности» $\mathbf{q}_3$ 3D-пространства. Несложно проверить, что любая из матриц $\mathbf{q}_n$ («3D размерностей») строится из того же самого 2D-базиса (ψ^+, ψ^-), например,

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi^+\varphi^- - \psi^-\varphi^+;$$ похоже строится и $\mathbf{q}_1$.

Таким образом, трехмерное (физическое?) пространство является производной структурой, неким «квадратичным» образом построенной из локальных областей более простого двумерного пространства дробной размерности; такое пространство иногда называют фрактальным. Интересно, что Дж.А. Уилер, размышляя о сущности волновой механики, но, скорее, умозрительно и в несколько ином ключе, предположил существование некоей «предгеометрии», где должны существовать и действовать квантовые величины [3]. Теория гиперкомплексных чисел в качестве предгеометрии предлагает фрактальное пространство, «подлежащее» под физическим пространством и не наблюдаемое человеком визуально, но благодаря математике позволяющее иметь свой геометрический образ.

И это пространство, действительно, имеет прямое отношение к квантовой механике, но не только к ней. Впрочем, по порядку: ненадолго вернемся к фрактальному базису (ψ^+, ψ^-), причем в нашем случае достаточно одного из этих двух векторов, обозначим его просто ψ. Ему можно придать некоторое колебательное движение, и это не портит алгебру, но 3D-репер $\mathbf{q}_n$ начинает вращаться вокруг $\mathbf{q}_3$; если движение волновое, то вращающийся репер перемещается в 3D-пространстве.

Кроме того, ψ можно растянуть, тогда он теряет свойство единичности сам, а вместе с ним и весь 3D-репер $\mathbf{q}_n$, алгебра нарушается. Простейшее условие постоянной нормализации репера $\mathbf{q}_n$ приводит к уравнению типа непрерывности, которое фрактализуется (из него «извлекается квадратный корень») и распадается на действительную и мнимую части. Действительная часть представляет собой закон сохранения коэффициента растяжения при векторе ψ. Мнимая же часть является определением некоторой произвольной функции и в физических единицах оказывается не чем иным, как уравнением Шредингера, где произвольная функция трактуется как потенциал частицы. Чистая математика, но в размерных функциях, приводит в точности к уравнению квантовой механики. В более сложном случае, когда волновое движение вектора ψ происходит на фоне некоторого векторного поля, аналогичная процедура нормализации репера $\mathbf{q}_n$ приводит в точности к уравнению Паули для заряженной квантовой частицы со спином во внешнем магнитном поле [4]; это уравнение никогда ранее не выводилось математически.

Наконец, разделяя собственно уравнение Шредингера, записанное с комплекснозначными операторами для комплексной же функции состояния, на действительную и мнимую части (уравнения Бома) мы приходим в лабораторных координатах к уравнению классической механики в формате уравнения Гамильтона–Якоби.

Таким образом, уравнения механики – и квантовой, и классической всецело содержатся в математике гиперкомплексных чисел, но возникают в ней как некоторые условия сохранения «хороших» алгебр при попытках их системно исказить. Но, повторюсь, полученные безразмерные математические уравнения становятся уравнениями физики только при записи их в выбранных масштабах длины и времени.

В таком подходе появляется геометрический образ двух самых загадочных функций механики – функции состояния частицы и функции механического действия. Как, наверное, несложно понять из вышесказанного, «волновая функция» частицы представляет собой один из векторов 2D-базиса фрактального пространства ψ, но лишь в том случае, если этот вектор снабжен волновым множителем (экспонента с мнимым показателем) и фактором растяжения (модуль комплексного числа). Этот геометрический объект всецело принадлежит фрактальному пространству и не может быть наблюдаем в физическом мире. Фаза этой волны-частицы (по сути, аргумент комплексного числа) при переходе к лабораторным координатам становится функцией действия классической механики, измеренной в некоторых единицах действия (или момента импульса), например в величинах постоянной Планка. Отметим еще раз – все эти характеристики «расположены» на фрактальной поверхности (в предгеометрии Уилера), из которой некоторым нелинейным образом строятся ячейки трехмерного пространства. В физическом же пространстве частица «видится» как распределенная в очень малом объеме масса (в классической механике – просто массивная точка), вращающаяся вокруг одной из своих осей.

Конечно, дать краткое словесное описание математическому выводу уравнений механики непросто, здесь приходится делать целый ряд упрощений и умолчаний. Но смысл, хочется надеяться, понятен: математика гиперкомплексных чисел позволяет чисто теоретически прийти к законам физики, изначально сформулированным на основании опытных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Louis de Broglie, Ondes et Quanta, Comptes Rendus, 1923. – V. 177. – P. 507–510.
2. Bohr-Schrodinger “Hydrogen Truce” // Quantum Matter. – 2014. – V. 3. – P. 510–514.
3. *Wheeler J.A.* Pregeometry: Motivations and prospects, in Quantum Theory and Gravitation, ed. A.R. Marlov (Academic Press, New York, 1980). – P. 1–11.
4. *Yefremov A.P.* General Theory of Particle Mechanics Arising from a Fractal Surface // Gravitation and Cosmology. – 2015. – V. 21. – No. 1. – P. 19–27.

ON PHYSICAL MODELS IN QUANTUM MECHANICS

A.P. Yefremov

Phenomenological the de Broglie’s model of quantum particle is discussed together with its fractal geometric analogue arising in pure mathematical derivation of the Schrodinger equations within the theory of hypercomplex numbers.

Key words: quantum mechanics, de Broglie waves, pregeometry, hypercomplex numbers, quaternions, fractal space.